

5. Кайдасов Ж., Шикин Е.В. Об изометрическом погружении в E^3 выпуклой области плоскости Лобачевского, содержащей два орикурга. – Матем. заметки, 1986, т.39, №4. С.612-617.
6. Кайдасов Ж. О регулярном изометрическом погружении в E^3 расширяющейся полосы плоскости Лобачевского. – В сб.: Иссл. по теории поверхностей в римановых пространствах. Л.: ЛГПИ, 1984, с.119-129.
7. Кайдасов Ж. Об изометрическом погружении в E^3 неограниченных областей плоскости Лобачевского. Материалы респуб. научно-прак. конф. Современные методики и технологии в модернизации системы образования, г.Аркалык, 2012, с.79-91.
8. Б. Л. Рождественский, Система квазилинейных уравнений теории поверхностей. ДАН СССР, 143, № 1 (1962), 50-52.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О БИЛЬЯРДНОЙ ТРАЕКТОРИИ ВНУТРИ УГЛА МЕТОДОМ ОТРАЖЕНИЙ

THE SOLUTION OF A TASK ON A BILLIARD TRAJECTORY IN A CORNER A METHOD OF REFLECTIONS

Кравцов В.М., Калакова Г.К.

Костанайский государственный университет им. А.Байтурсынова, г.Костанай, Казахстан

Калаков Б.А.

Костанайский государственный педагогический институт, г.Костанай, Казахстан

Знакомство с решением задачи о бильярдной траектории внутри угла позволяет лучше понять особенности бильярдных траекторий в выпуклых замкнутых многоугольниках. Но как геометрическая эта задача интересна сама по себе. В популярной литературе интерес к задаче носит хрестоматийный характер [1 - 3]. Однако полное и подробное решение задачи в литературе отсутствует. Задачу можно рассматривать и с точки зрения физики, то есть как динамическую.

Решение задачи методом отражений служит иллюстрацией применения этого метода. Для пояснения решения задачи воспользуемся рис. 1, на котором показано построение траектории для угла ACB конкретной величины α , равной 48° .

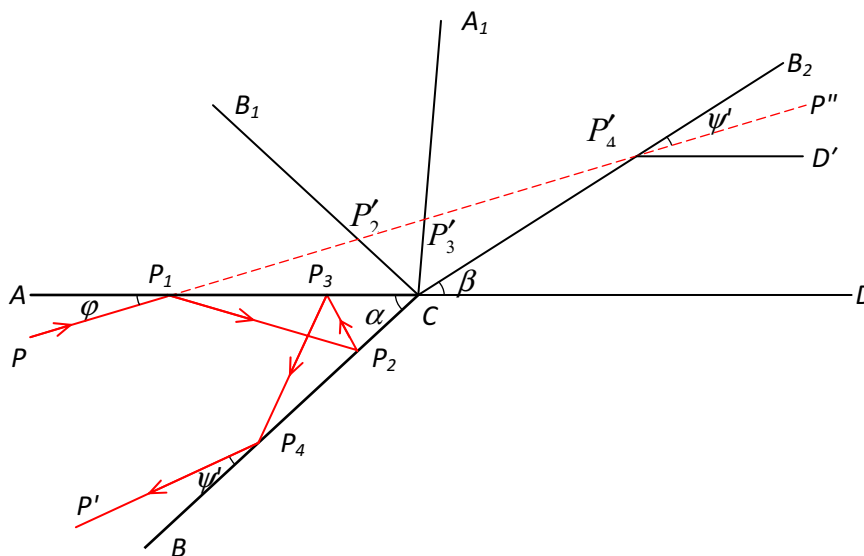


Рис.1

Итак, пусть бильярдный шар приближается из бесконечности к стороне AC по прямой

PP_1 , где P_1 - точка первого столкновения шара со стороной AC угла ACB . Полупрямую P_1P назовём входящей ветвью бильярдной траектории в угле. По условию задачи прямая PP_1 образует со стороной AC угол величины φ . Этот угол будем называть углом входа траектории в заданный угол ACB . После n столкновений (на рис. $1n = 4$) со сторонами угла шар удаляется в бесконечность по прямой P_nP' , где P_n - точка последнего столкновения со стороной угла. Полупрямую P_nP' назовём выходящей ветвью бильярдной траектории. Угол между полупрямыми CA и P_nP' назовём углом выхода траектории из угла ACB . Будем обозначать его через ψ . Точка P_n может лежать на стороне AC (при нечётном числе n столкновений шара со сторонами угла) либо на стороне BC (при чётном числе n). Иногда углы входа и выхода траектории удобно рассматривать относительно стороны BC , в таком случае будем обозначать их через φ' и ψ' . Между парами углов φ, ψ и φ', ψ' существует очевидная связь:

$$\begin{aligned}\varphi + \varphi' &= \alpha, \\ \psi + \psi' &= \alpha.\end{aligned}$$

После первого столкновения со стороной AC шар будет двигаться по прямой P_1P_2 (P_2 - точка столкновения шара со стороной BC угла ACB). В соответствии с законом отражения прямая P_1P_2 симметрична прямой PP_1 относительно прямой AC . Положение прямой P_1P_2 относительно сторон угла ACB можно определить, если отразить угол ACB относительно стороны AC , оставив прямую PP_1 и её продолжение P_1P_2' неподвижными. При таком отражении сторона BC угла ACB перейдёт в сторону CB_1 угла ACB_1 и точка P_2 перейдёт в точку P_2' на стороне CB_1 . Обратно, по положению точки P_2' на стороне CB_1 можно определить положение точки P_2 на стороне BC ($P_2'C = P_2C$). Точку третьего столкновения P_3 шара со стороной CA определим аналогично. Отразим угол ACB_1 относительно его стороны CB_1 . Сторона AC угла ACB_1 при этом перейдёт в сторону A_1C угла A_1CB_1 . Оставленная неподвижной прямая PP_2' пересечёт сторону A_1C угла A_1CB_1 в точке P_3' . Вершине траектории P_3 на стороне CA соответствует указанная точка P_3' . По рассмотрению проведённых симметрий можно заключить, что $P_3C = P_3'C$. Таким образом, по положению точки P_3' на прямой A_1C можно определить положение точки P_3 на прямой AC .

Процесс последовательных отражений угла ACB относительно его сторон, необходимый для определения последующих точек столкновения шара со сторонами угла, может быть продолжен. Максимально возможное число таких отражений угла ACB относительно его сторон равно целой части числа $\frac{\pi}{\alpha}$, которую мы обозначим через m : $m = \left[\frac{\pi}{\alpha} \right]$. Целое неотрицательное число m удовлетворяет соотношению

$$\pi = \alpha m + \beta,$$

где $0 \leq \beta < \alpha$. Если ввести обозначение $\left\{ \frac{\pi}{\alpha} \right\}$ для дробной части числа $\frac{\pi}{\alpha}$, то для величины β можем записать

$$\beta = \left\{ \frac{\pi}{\alpha} \right\} \alpha.$$

Можно убедиться, что для заданного значения угла α существует простая зависимость угла ψ от угла φ , определяемая значениями числа m и величины β . Роль числа m в этой зависимости определяется только тем, чётно оно или нечётно. Мы установим эту зависимость ψ от φ для различных значений α , рассмотрев все возможные случаи.

Как отмечено выше, на рис. 1 показано построение бильярдной траектории для значения угла $\alpha \approx 48^\circ$. В этом случае имеем: $m = 3$, $\beta = 180^\circ - 48^\circ \times 3 = 36^\circ$. Число отражений угла ACB , необходимых для построения траектории равно $m = 3$. Заметим, что число m нечётно. На рис. 1 представлено построение траектории для значения угла φ из интервала $0 < \varphi < \beta$. Прямая PP_1 пересекает сторону CB_2 угла ACB в его положении A_1CB_2 (после трёх его отражений) в точке P'_4 . Число столкновений шара со сторонами угла ACB (число вершин траектории) равно 4. Учитывая, что $P'_4C = P_4C$, строим точку P_4 , последнюю точку столкновения шара со сторонами угла. После столкновения со стороной BC в точке P_4 шар будет двигаться по прямой P_4P' , образующей с прямой AC угол величины ψ , а с прямой BC - угол величины ψ' . На рис. 1 через точку P'_4 проведена прямая P'_4D' , параллельная AC . Так как угол $B_2P'_4D'$ равен углу B_2CD (CD - продолжение прямой AC) и угол B_2CD равен β , то по рис. 1 имеем

$$\psi' + \varphi = \beta.$$

Отсюда, учитывая соотношение $\psi + \psi' = \alpha$, находим

$$\psi = \alpha - \beta + \varphi, \quad 0 < \varphi < \beta.$$

Соотношение $\psi = \alpha - \beta + \varphi$ при $0 < \varphi < \beta$ получено нами нами для значения m , равного 3, но, очевидно, оно справедливо при любом нечётном числе m . Для числа столкновений шара со сторонами угла n при $0 < \varphi < \beta$ имеем: $n = m + 1$.

Отдельного замечания заслуживают траектории с $\varphi = 0$ и $\varphi = \beta$. В случае, когда $\varphi = 0$, первое столкновение шара происходит со стороной BC . По рис. 2, на котором показано построение траектории с $\varphi = 0$, заметим, что в этом случае $\psi = \alpha - \beta$, $n = m$.

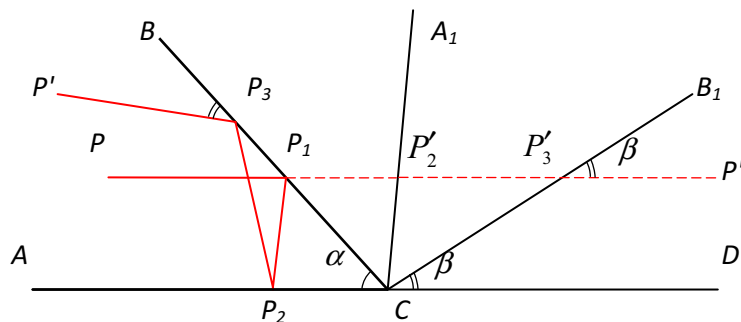


Рис.2

Нетрудно убедиться, что если $\varphi = \beta$, то $\psi = \alpha$ ($\psi' = 0$), $n = m$.

Перейдём теперь к рассмотрению бильярдной траектории в том же угле величины $\alpha = 48^\circ$ при величине угла $\varphi > \beta$. На рис. 3 представлено построение бильярдной траектории для этого случая. Рассмотрение проводится аналогично тому, как оно проводилось для случая величины угла $\varphi < \beta$.

На рис. 3 прямая PP_1 пересекает стороны отражаемого угла в трёх точках. Это означает, что число столкновений шара со сторонами угла n равно 3. На этом рисунке прямая P'_3D' параллельна прямой AC . По рисунку легко понять, что $\varphi + \psi = \alpha + \beta$. Отсюда находим

$$\psi = \alpha + \beta - \varphi, \quad \varphi > \beta, \quad n = 3.$$

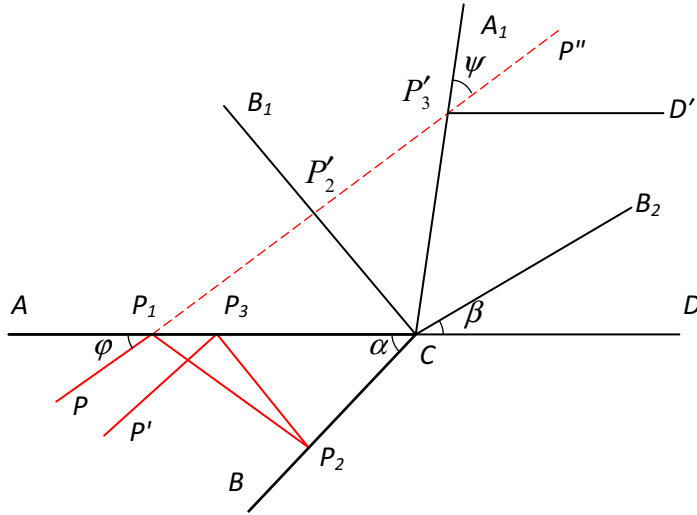


Рис.3

Результат, очевидно, может быть обобщён на случай угла произвольной величины α , такой, что $\left[\frac{\pi}{\alpha} \right] = m = 2k + 1$, $k = 1, 2, \dots$ и значений угла $\varphi > \beta = \left\{ \frac{\pi}{\alpha} \right\} \alpha$. Итак, в этом случае имеем:

$$\psi = \alpha + \beta - \varphi, \quad \varphi > \beta, \quad n = m.$$

Важный пример углов с нечётным числом m представляют тупые углы ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$). В этом случае $m = 1$, $\beta = \pi - \alpha$. Траектории в таких углах имеют по две вершины при значениях угла входа φ из интервала $(0, \beta)$. Два отражения от сторон угла в таком случае эквивалентны повороту вокруг вершины C угла ACB на угол 2β . Направление такого поворота противоположно направлению поворота от AC к BC (рис. 4а). На рис. 4б показана траектория в тупом угле для значения $\varphi = \beta$.

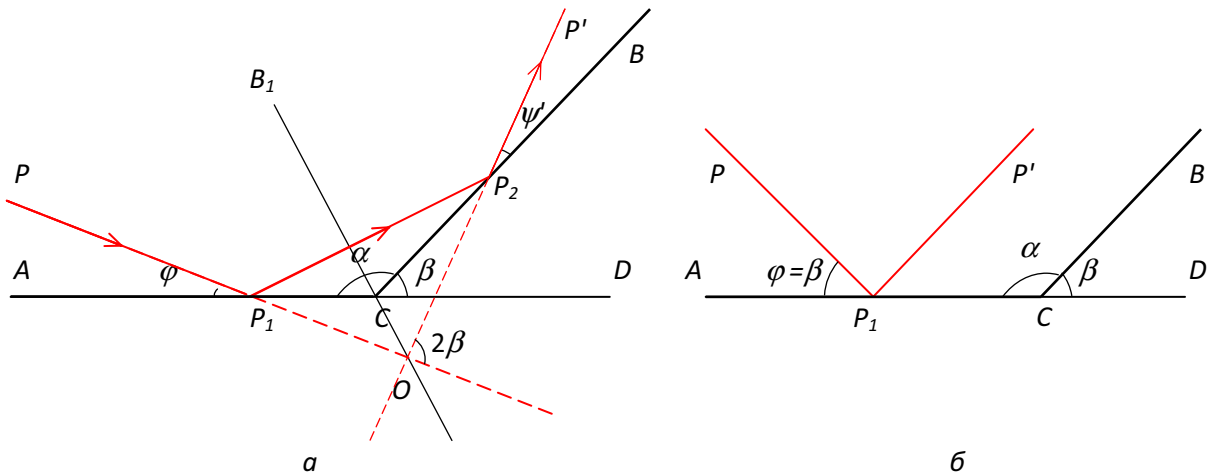


Рис.4

Рассмотрение задачи о бильярдных траекториях в углах, для которых $m = \left[\frac{\pi}{\alpha} \right]$ - число чётное, проводится аналогично. И в этом случае число столкновений шара со сторонами угла n зависит от того, величина угла входа траектории φ больше или меньше величины β - остатка деления угла π на угол α .

На рис. 5 показано построение бильярдной траектории внутри угла величины α , для которой число m чётно ($\alpha=37^\circ$, $m=4$, $\beta=32^\circ$) и значение угла $\varphi < \beta$. Легко убедиться, что в этом случае имеем: $\psi = \beta - \varphi$, $\varphi < \beta$, $n = m + 1$.

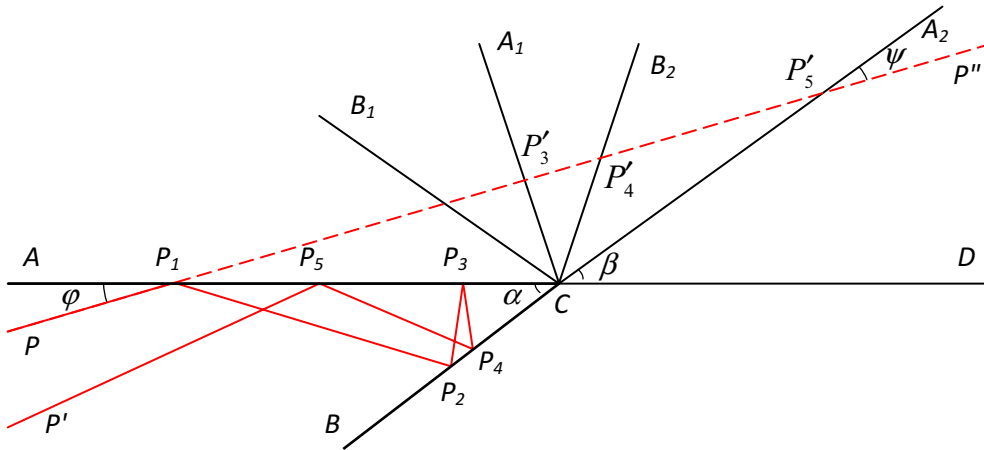


Рис.5

На рис. 6 показано построение траектории для угла $\alpha=38^\circ$ ($m=4$, $\beta=28^\circ$) и значения величины угла входа $\varphi=0$. По рисунку видим, что если $\varphi=0$, то $\psi = \beta$, $n=m$. Так как движение по траектории обратимо, то при $\varphi = \beta$ $\psi = 0$, $n=m$.

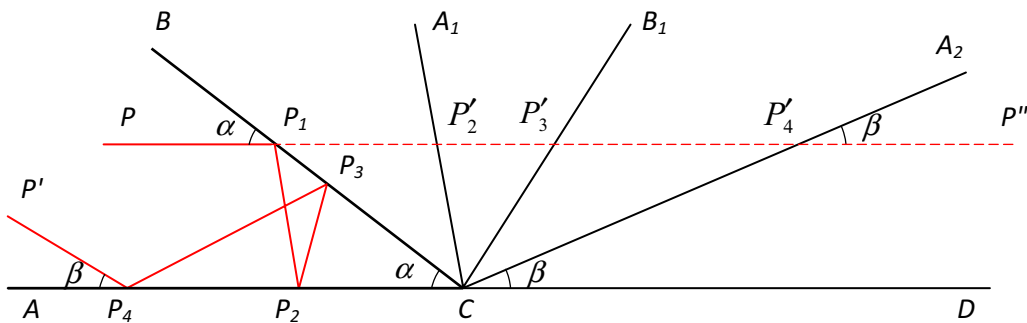


Рис.6

На рис. 7 показано построение траектории для угла $\alpha=40^\circ$ и значения φ больших $\beta=20^\circ$. По рисунку легко установить, что в этом случае $\psi = \varphi - \beta$, $n=m$.

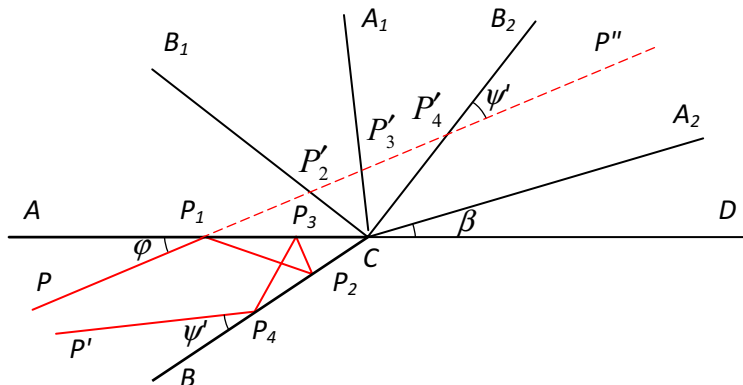


Рис.7

Графики зависимости ψ от φ для углов с нечётным и чётным числом m (при $\beta \neq 0$) представлены соответственно на рис. 8 и 9. На графиках стрелочками отмечено, что точки $\varphi=0$ и $\varphi=\beta$ отделены от интервала $0 < \varphi < \beta$. Для интервала $0 < \varphi < \beta$ $n=m+1$, для значений $\varphi=0$ и $\varphi=\beta$ имеем $n=m$.

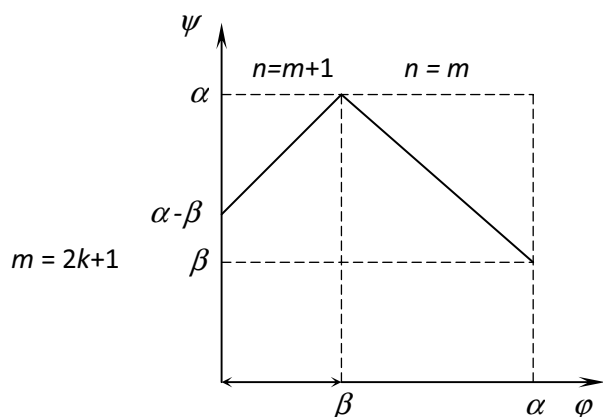


Рис.8

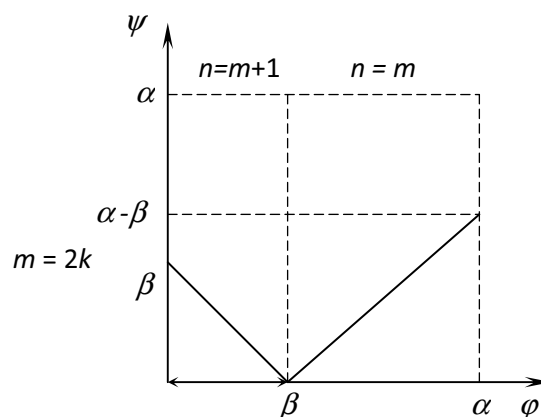


Рис.9

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гальперин Г. А., Земляков А. Н. Математические бильярды. – М.: Наука, 1990.
2. Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. П., Толпыго А. К., Математические задачи (библиотека физико-математической школы) – М.: Наука, 1966.
3. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. М.: Наука, 1982.
4. Гольдфарб Н. И. Сборник вопросов и задач по физике. – М.: Высшая школа, 1982.

ЭЛЕМЕНТЫ СТРАТЕГИИ «СЛУЧАЙНОГО ВЫБОРА» ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

ELEMENTS OF THE STRATEGY OF "RANDOM SELECTION" OF THE ELLIPTIC CURVE

Кудубаева С.А., Фатеев Д.Г.

Костанайский государственный университет им. А. Байтурсынова, г.Костанай, Казахстан

Как показано в работе [1], стратегия «случайного выбора» эллиптической кривой (ЭК) опирается на использование алгоритма SEA для вычисления количества точек ЭК и порядка циклической группы точек для случайно выбранной ЭК. Данный алгоритм является результатом усовершенствования алгоритма Чуфа [2] с учетом модификаций, предложенных Элкисом (N. Elkies) и Аткином (A. Atkin). Теоретические основания данных алгоритмов приведены в работе [3].

Алгоритм расчета точек ЭК имеет следующий вид. Пусть \overline{F}_q есть алгебраическое замыкание поля F_q . Эндоморфизм Фробениуса есть отображение $\varphi: E(\overline{F}_q) \rightarrow E(\overline{F}_q)$, которое определяется соотношениями $\varphi(x, y) = (x^q, y^q)$, $\varphi(O) = O$ и удовлетворяют уравнению

$$\varphi^2 - T\varphi + q = 0 \quad \text{или} \quad \varphi(\varphi(P)) - T\varphi(P) + qP = O, \quad (1)$$

где T – след эндоморфизма Фробениуса, и $|E(F_q)| = N = q + 1 - T$.

Соответственно, для нахождения порядка ЭК $E(F_q)$ необходимо найти значение T .