ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

THE SURFACES OF CONSTANT NEGATIVE CURVATURE

Кайдасов Ж.
Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова, г. Актобе,Казахстан

Начало исследований по теории поверхностей отрицательной кривизны было положено работой Миндинга[1], опубликованной в 1838 г. В этой работе исследовался вопрос о поверхностях вращения постоянной отрицательной кривизны. Миндингом было получено дифференциальное уравнение, решения которого давали все такие поверхности. Миндингом были указаны два типа таких поверхностей: поверхность с острием (рис.1) и поверхность, по виду похожая на катушку(рис.2), с параболическими краями. В работе [2] Бельтрами указал еще один тип поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны. Эту поверхность Бельтрами назвал псевдосфереой. В работе Бельтрами[2] исследовался важный вопрос, суть которого заключалась в установлении тех поверхностей трехмерного евклидова пространства E^3,внутренняя геометрия которых совпадала бы с геометрией плоскости Лобачевского. Бельтрами доказал, что такими поверхностями являются поверхности постоянной отрицательной кривизны. Бельтрами не ставилвопроса о существовании в E^3 полной поверхности, внутренняя геометрия которой совпадала бы с геометрией полной плоскости Лобачевского. Этот вопрос был сформулирован Гильбертом в известных Проблемах 1900 [3] и решен им же в 1901 г. в работе «О поверхностях постоянной гауссовой кривизны» [4]. Гильберт доказал теорему о невозможности изометрического погружения плоскости Лобачевского в E^3.

Для удобства формулировок и уяснения терминологии обратимся к конформной интерпретации в круге на плоскости Лобачевского (в дальнейшем – плоскости Л). При этой интерпретации плоскость взаимно однозначно и конформно отображается на открытый круг С (рис. 3), граница которого называется абсолютом, причем прямым плоскости Л отвечают ортогональные абсолюту С дуги окружностей. Выпуклым областям на плоскости Л отвечают выпуклые относительно указанных дуг области в круге С и наоборот.

Отметим некоторые типы выпуклых областей на плоскости Л.

Очевидно, любая конечная выпуклая область в этой плоскости (и вообще любая конечная область) содержится в некотором геодезическом круге (рис.4).Поэтому из конечных выпуклых областей плоскости Л мы отметим лишь геодезический круг (см. область 1 на рис.4). Классификация бесконечных выпуклых областей на плоскости Л значительно обширнее, чем на евклидовой плоскости. Укажем некоторые из таких областей.

Простейшей выпуклой областью является вся плоскость Л (см. рис. 3). На рис. 4 изображена полуплоскость 2, бесконечная полоса 3, ограниченная эквидистантами к геодезической (дуга окружности, ортогональной к абсолюту, в области 3),область 4, ограниченная орициклом (эту область мы будем называть **орикругом**). Отметим, что любой геодезический круг содержится в некотороморикруге. Можно представить себе бесконечные выпуклые области более сложной природы: на рис. 5 изображен многоугольник с бесконечно удаленными вершинами, на рис. 6 – выпуклая область, содержащая дваорикруга, на рис. 7 изображена выпуклая область М, граница Г которой имеет соприкосновение с абсолютом порядка выше первого. Такая область содержит орикруги (один из них изображен в области М), но не содержится ни в одном орикруге. Можно без труда построит бесконечные выпуклые области, содержащие, например, счетное множество орикругов изображенной на рис. 8. Можно представить себе бесконечные области и более сложной природы (рис.9).

Вернемся теперь к результатам Миндинга, Бельтрами. Универсальными накрывающими построенных Миндингом и Бельтрами поверхностей постоянной отрицательной кривизны служат: для псевдосферы – орикруг (см. рис. 4, область 4) и для поверхности, похожей на катушку, – бесконечная полоса (см. рис. 4, область 3) (на универсальной накрывающей этой поверхности горловая линия переходит в полнуюгеодезическую, а кривая – в эквидистанты).

Следовательно, согласно результатам Миндинга и Больтрами в E^3 могут быть изометрично погружены следующие выпуклые области плоскости Лобачевского: орикруг (область 4 на рис. 4) ввиде универсальной накрывающей псевдосферы, и бесконечная полоса (область 3 на рис. 4) в виде универсальной накрывающей поверхности, похожей на катушку (горловая линия при этом переходит в полную геодезическую, а края – вэквидистанты). Итак, в E^3 могут быть изометрично погружены следующие выпуклые области плоскости Лобачевского: орикруг (а следовательно, и любой геодезический круг) и бесконечная полоса.

Ко времени опубликования работы Миндинга еще не была осмыслена связь между внутренней геометрией поверхностей постоянной отрицательной кривизны и геометрией плоскости Лобачевского. Этот принципиальный вопрос был решен Бельтрами.

Теорема Гильберта привела к следующему вопросу какие области Л регулярно изометрично погружаются в E^3, какие области непогружаютсяв E^3.

Определенные результаты в этом направлении были получены Н.В. Ефимовым (полуплоскость Л не допускает погружение E^3, см.рис.4.2), Э. Г. Позняком (некоторый класс выпуклых бесконечных многоугольников плоскости Л допускают погружение E^3, см.рис.5) [5], Е. В. Шикиными Ж.Кайдасовым[6](см.рис.6), Ж.Кайдасовым[7], [8](см.рис.6,7,9).

Аппаратом исследования в этих работах были основные уравнения теории поверхностей отрицательной кривизны в римановых инвариантах[9].

Пусть XOY – полугеодезическая система координат на плоскости Лобачевского с геодезической базой OY (линии x – геодезические, ортогональные к OY).

Метрику плоскости Л в этой системе координат можно записать так:

$$ds^2 = dx^2 + ch^2 x dy^2 .$$

Тогда основные уравнения теории поверхностей отрицательной кривизны в римановых инвариантах запишется в следующем виде(К=-1):

$$r_x + \frac{S}{Chx} \cdot r_y = -S \cdot (1 + r^2) thx,$$

$$S_x + \frac{r}{Chx} \cdot S_y = -r \cdot (1 + S^2) thx \tag{1}$$

Множество точек плоскости *Л* вида

$$\pi(\varphi) = \{(x, y) | |x| \leq \varphi(y), -\infty < y < +\infty\} \tag{2}$$

называется расширяющейся полосой с геодезической базой *Oy,* определяемойфункцией $x = \varphi(y)$[6], [7].

В работе [7] доказано, что расширяющаяся полоса$\pi(\varphi)$плоскости Л реализуется в E^3 в виде C^3 – гладкой поверхности. Граница $\varphi(y)$ расширяющейся полосы $\pi(\varphi)$ определяется свойствами некоторого функционального параметра *f(y).* В частности на *Oy* функция *f(y)* может иметь бесконечное число отрезков, на которых она принимает постоянные значения.

Наша задача состоит в том, чтобы указать способ построения гладких решений системы (1) в некоторых неограниченных областях (2) параметрической плоскости XOY, причем так, чтобы удовлетворялось условие $r \neq s$.

В работе [8] была доказана теорема о погружаемости в E^3 области F, содержащей три расширяющихся полуполос плоскости Л (см.рис.9).

Вопрос о погружаемости или непогружаемости выпуклой области плоскости Л, содержащей три орикруга остается еще открытим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Minding F., Deber die BiegungkriimmerFlachen. J. reine und angew Math,, 1838, 18.
2. Beltrami E., Sulla superficie di rotazioneche serve di tip oalle'superficiepseudosferiche- Giorn. di Mat, 1872, 10, Opere II.
3. Hilbert D., MathematischeProbleme.Vortaggehalten auf dem Inter- cnat'onalen Math.Kongresszu Paris 1900.Gott.Nachr., 1900, 253-297 UberFlachen von KonstanterGausscherKriimimmg. Trans. Amer. Math.Soc, 1901, 2, 87-99.
4. Позняк Э.Г. Изометрическое погружение в E^3 некоторых некомпактных областей плоскости Лобачевского // Мат. сб. 1977. 102. №2. С. 3-12.

5. Кайдасов Ж., Шикин Е.В. Об изометрическом погружении в E^3 выпуклый области плоскости Лобачевского, содержащей два орикруга. – Матем. заметки, 1986, т.39, №4. С.612-617.
6. Кайдасов Ж. О регулярном изометрическом погружении в E^3 расширяющейся полосы плоскости Лобачевского. – В сб.: Иссл. по теории поверхностей в римановых пространствах. Л.: ЛГПИ, 1984,с.119-129.
7. Кайдасов Ж. Об изометрическом погружении в E^3 неограниченных областей плоскости Лобачевского. Материалы респуб. научно-прак. конф. Современные методики и технологии в модернизации системы образования, г.Аркалык, 2012, с.79-91.
8. Б. Л. Рождественский, Система квазилинейных уравнений теории поверхностен. ДАН СССР, 143, № 1 (1962), 50-52.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О БИЛЬЯРДНОЙ ТРАЕКТОРИИ ВНУТРИ УГЛАМЕТОДОМ ОТРАЖЕНИЙ

THE SOLUTION OF A TASK ON A BILLIARD TRAJECTORY IN A CORNER A METHOD OF REFLECTIONS

Кравцов В.М., Калакова Г.К.
Костанайский государственный университет им. А.Байтурсынова, г.Костанай, Казахстан

Калаков Б.А.
Костанайский государственный педагогический институт, г.Костанай, Казахстан

Знакомство с решением задачи о бильярдной траектории внутри угла позволяет лучше понять особенности бильярдных траекторий в выпуклых замкнутых многоугольниках. Но как геометрическая эта задача интересна сама по себе. В популярной литературе интерес к задаче носит хрестоматийный характер [1 - 3]. Однако полное и подробное решение задачи в литературе отсутствует. Задачу можно рассматривать и с точки зрения физики, то есть как динамическую.

Решение задачи методом отражений служит иллюстрацией применения этого метода. Для пояснения решения задачи воспользуемся рис. 1, на котором показано построение траектории для угла ACB конкретной величины α, равной 48°.

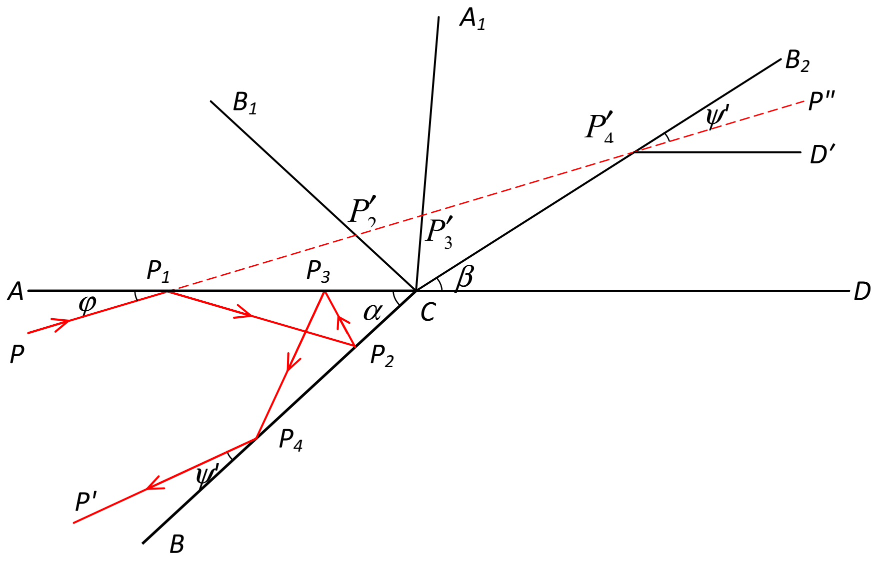

Рис.1

Итак, пусть бильярдный шар приближается из бесконечности к стороне AC по прямой