КОСТАНАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПСИХОЛОГИИ**

Учебное пособие

КОСТАНАЙ – 2016

УДК 519.22.(075.8)

ББК 22.172.я 73

К17

Автор-составитель:

Калжанов М.У., доцент, кандидат физико-математических наук

Рецензенты:

Тастанов М.Г. кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и математики КГУ им. А.Байтурсынова

Смаглий Т.И. зав. кафедрой психологии КГПИ, кандидат педагогических наук

К 17 Калжанов М.У. Математические методы в психологии: учебное пособие // М.У. Калжанов. – Костанай: Изд-во КГПИ, 2016. – 101 с.

ISBN 978-601-7839-24-6

В учебном пособии даны основные математические модели, используемые в психологии. Представлены основные статистические понятия, алгоритм подготовки данных к математической обработке.

Изложены основные виды распределений и различные меры связи между переменными, в том числе изменчивости, центральной тенденции, различий, связи и зависимости, основные теоретические вопросы подкреплены многочисленными задачами и методами их решения.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности «Психология», а также для психологов-практиков, имеющих дело со сбором и статистической обработкой материала, его количественным анализом и конструированием различных математических моделей психических явлений, процессов, состояний

УДК 519.22.(075.8)

ББК 22.172.я 73

Рекомендовано к изданию Ученым Советом Костанайского

государственного педагогического института

ISBN 978-601-7839-24-6

© КГПИ, 2016

**СОДЕРЖАНИЕ**

## ВВЕДЕНИЕ 5

ГЛАВА 1 Измерения в психологии 6

1.1 Понятие об измерении 6

1.2 Особенности измерения в психологии 8

1.3 Шкалы измерений 10

ГЛАВА 2 Основные статистические понятия 13

2.1 Генеральная и выборочная совокупности 13

2.2 Переменная величина 13

2.3 Уровни значимости 14

2.4 Достоверность результатов исследования 15

ГЛАВА 3 Подготовка данных к математической обработке 17

3.1 Протоколирование данных 17

3.2 Составление сводных таблиц 18

3.3 Определение квантилей 19

3.4 Графическое представление данных 21

ГЛАВА 4 Меры центральной тенденции 22

4.1 Мода 22

4.2 Медиана 22

4.3 Среднее арифметическое значение 23

4.4 Среднее геометрическое значение 24

Задача 4.1 25

Задача 4.2 25

Задача 4.3 26

ГЛАВА 5 Меры изменчивости признака 27

5.1 Лимиты (пределы) 27

5.2 Размах вариаций 27

5.3 Среднее отклонение 28

5.4 Дисперсия 28

5.5. Среднеквадратичное (стандартное) отклонение 29

5.6. Коэффициент вариации 29

Задача 5.1 29

Задача 5.2 30

ГЛАВА 6 Распределение переменных величин 31

6.1 Нормальное распределение 31

6.1.1 Основные понятия 31

6.1.2 Коэффициент асимметрии 33

6.1.3 Коэффициент эксцесса 35

6.1.4 Критерий хи-квадрат (χ2) 36

6.1.5 Критерий Колмогорова-Смирнова (λ) 38

6.2 Равномерное распределение 41

6.3 Биноминальное распределение 43

6.4. Распределение Пуассона 45

Задача 6.1 47

Задача 6.2 47

Задача 6.3 47

ГЛАВА 7 Меры различий 48

7.1 Постановка проблемы 48

7.2 Непараметрический критерий Q Розенбаума 49

7.3 U – критерий Манна-Уинтни 50

7.4 Критерий Стьюдента 52

7.5 Критерий Фишера 54

7.6 Критерий ϕ\* − угловое преобразование Фишера 55

## 7.7 Использование критерия χ2 Пирсона и критерия λ Колмогорова

для оценки различий между двумя выборками 56

Задача 7.1 59

Задача 7.2 59

Задача 7.3 59

ГЛАВА 8 Меры связи 61

8.1 Постановка проблемы 61

8.2 Представление данных 61

8.3 Коэффициент корреляции Фехнера 62

8.4 Коэффициент корреляции Пирсона 63

8.5 Коэффициент ранговой корреляции Спирмэна 67

8.6 Коэффициент ранговой корреляции Кендалла 69

8.7 Дихотомический коэффициент корреляции (ϕ) 70

8.8 Точечный бисериальный коэффициент корреляции (*r*pb) 72

8.9 Рангово-бисериальный коэффициент корреляции (*r*rb) 73

8.10 Выбор меры связи 74

8.11 Матрица корреляций 74

Задача 8.1 76

Задача 8.2 76

Задача 8.3 77

ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ ….78

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 80

ПРИЛОЖЕНИЕ. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ 81

**ВВЕДЕНИЕ**

Предлагаемые математические методы используются для планиро­вания эксперимента и прогнозирования предполагаемых оценок, для статистической обработки результатов психологического исследования с использованием ЭВМ и специализированных программ обработки пси­хологических данных, а также для разработки и построения матема­тических моделей, касающихся различных процессов и состояний.

Основным методом психологического исследования (если не брать во внимание чисто экспериментальные области психологии) традицион­но является метод наблюдения. Несмотря на некоторые положительные стороны этого метода, наблюдение всегда является в значительной сте­пени субъективным. Интерпретация полученных данных, как правило, несет на себе отпечаток личности психолога, его опыта, интуиции и т. д.

Во многих случаях возникает задача формализации результатов исследования и их более или менее однозначной трактовки. В этом смысле математика представляет собой универсальным и формализо­ванным языком, описывающим различные психологические свойства исследуемых объектов, признаки, изменения.

Предлагаемое учебное пособие ставит своей задачей помочь психологу овладеть начальными знаниями, необходимыми для примене­ния математических методов в психологии. При этом было сведено к минимуму освещение теоретических вопросов, которые подробно изла­гаются в соответствующих учебниках по теории вероятностей и мате­матической статистике.

Основная же задача пособия – дать психологу рабочий инструмент для решения конкретных научно-исследовательских и прикладных задач.

Предлагаемые темы подразумевает определенный уровень знаний в области теории вероятностей и математической статистики.

Большинство глав учебного пособия сопровождаются перечнем задач по рассматриваемой теме. В конце пособия приводится минимум справочных статистических таблиц, необходимых для математической интерпретации и выводов по каждой из рассматриваемых задач.

Учебное пособие предназначено для студентов изучающих психоло­гию, а также для психологов-практиков, имеющих дело со сбором и статистической обработкой материала, его количественным анализом и конструированием различных математических моделей психических явлений, процессов, состояний.

ГЛАВА 1

ИЗМЕРЕНИЯ В ПСИХОЛОГИИ

Начальным этапом математической обработки результатов любого (в том числе и психологического) исследования, является *измерение*, то есть, изучаемый признак (свойство, черта, характеристика) должен быть измерен, т. е. выражен в той или иной количественной (численной) форме. Численное выражение признака может быть различным – от представления его в бинарной системе (1 – наличие признака, 0 – отсут­ствие признака) до весьма точных количественных значений (например, максимальная амплитуда альфа-ритма электроэнцефа­лограммы для данного испытуемого составляет 95 микровольт).

Одной из достаточно сложных в психологии является задача математической формализации изучаемого признака, т. е. перевода ее в количественное выражение для изучения объектов и их взимосвязей.

В предлагаемой главе даны общие сведения об измерении вообще и об особенностях измерения психологических свойств (признаков, черт, характеристик) в частности.

## 1. 1. Понятие об измерении

Понятие измерение имеет много определений. Так, измерение иногда трактуют как познавательный процесс, включающий исследова­ние количественных характеристик материальных объектов с помощью соответствующих измерительных приборов. Такая формулировка впол­не подходит для физического измерения, но не всегда годится для изме­рения психологических величин. Чаще всего процедуры психологическо­го измерения подразумевают наличие не измерительных приборов, а совокупности заданий, вопросов, утверждений и т. д.

Тем не менее, в некоторых областях психологической науки (психо­физика, психофизиология и др.) предусматривается использование и приборных (аппаратурных) методов измерения.

Другое определение термина: измерение есть присваивание чисел определенным объектам, свойствам, признакам, событиям или измене­ниям в соответствии с определенными правилами. Это определение больше подходит к измерению в психологии, хотя справедливости ради необходимо отметить, что не все психологические величины можно вы­разить числом – некоторые из них выражаются качественными опреде­лениями, названиями, символами и пр.

И наконец, измерение можно определить как построение шкал по­средством изоморфного отражения эмпирической системы с отноше­ниями в численной системе с отношениями. Другими словами, это опре­деление фактически ставит знак равенства между измерением и шкали­рованием. В первом приближении это так, хотя в некоторых случаях понятие *шкалирование* шире понятия *измерение* и включает в себя упорядочение не только численных (количественных), но и качественных характеристик.

Любой вид измерения предполагает наличие вполне определенных единиц измерения. Единица измерения – это та «измерительная палоч­ка» (по выражению С. Стивенса), которая является своеобразным эталоном для осуществления тех или иных измерительных операций. В физике и других естественнонаучных дисциплинах используют основные и производные единицы измерения. Основных единиц измерения отно­сительно немного: в Международной системе единиц (СИ) это кило­грамм (кг) – единица массы, метр (м) – единица расстояния, секунда (с) – единица времени, градус Кельвина (°К) – единица температуры, ампер (А) – единица силы тока, кандела (кд) – единица силы света и моль – единица количества вещества. Все остальные единицы (скорость, плот­ность, освещенность, давление и др.) являются производными и выво­дятся из основных единиц измерения.

Кроме общепринятых (международных) единиц измерения, иногда применяются и традиционные (национальные) единицы (фунты, унции, дюймы, ярды, футы и пр.), использование которых в научных исследо­ваниях весьма ограниченно.

Физические единицы измерения используются в психологических исследованиях далеко не всегда. В ряде случаев, например, в психо­физике, представляется разумным, чтобы субъект оценивал какие-либо величины или находил степень различия между ними в общепринятых единицах (например, промежутки времени в минутах и секундах, длину линий – в сантиметрах, расстояние до объекта – в метрах и т. д.). Общепринятые единицы измерения используются и в психофизиологии.

Так, время сенсомоторных реакций и время опознания образов принято измерять в секундах или миллисекундах, амплитуду вызванных потенциалов – в микровольтах, частоту ритмов электроэнцефалограммы выражают числом колебаний в секунду и т. д. Тем не менее, чаще всего психологи в своих измерениях пользуются условными единицами («сы­рыми» баллами, стенами и т. д.). Так, при использовании большинства тестов-опросников в качестве единицы измерения выступают ответы «да» или «нет».

Исследуемое же свойство вычисляется на основе соотношения этих ответов (их суммы, разности и т. п.). При выполнении «интеллектуаль­ных» тестов в качестве единицы измерения выступает решение каждой отдельной задачи (выполнение отдельного задания), а исследуемый признак (коэффициент интеллекта и пр.) определяется по числу выполненных заданий.

## 1. 2. Особенности измерения в психологии

Впервые мысль о возможности измерения психических явлений, процессов и состояний высказал немецкий философ *Густав Теодор Фехнер* (1801–1887). В своей фундаментальной работе «Элементы психофизики» он писал так: «...трудно возразить против того, что духов­ное вообще подчинено количественным отношениям. Ведь можно говорить не только о большей или меньшей силе ощущения, но и о разной силе влечений, о том, что существует большая или меньшая сте­пень внимания, живости воспоминаний или образов фантазии, ясности сознания в целом, а также интенсивности отдельных мыслей... Таким образом, высшее духовное не в меньшей степени, чем чувственное... может быть охарактеризовано количественно» (Fechner, 1966).

Несмотря на длительную полемику по поводу возможности коли­чественного описания психических явлений, процессов и состояний, которая развернулась после выхода в свет книги Фехнера, на се­годняшний день трудно представить психологическую науку без измере­ния. Психофизика, психофизиология, психометрика, психодиагностика – вот далеко не полный перечень психологических дисциплин, в которых измерение является важным инструментом.

Иногда говорят, что измерение психических величин, зачастую основанное на субъективных отчетах испытуемых, не внушает доверия только потому, что оно субъективно. Не вдаваясь в философскую сторо­ну проблемы, можно сказать, что психологические измерения так же надежны и валидны, как и измерения физические, но обладают своими особенностями. Основные свойства психологического измерения – это его многофакторность и вариативность.

*Многофакторность* измерения в психологии состоит в том, что на психологические величины оказывает влияние множество различных факторов, одни из которых (релевантные) непосредственно связаны с измеряемым признаком, другие (иррелевантные) не связаны с ним или связаны косвенно.

Влияние всех иррелевантных факторов учесть невозможно. Однако чем большее их число будет учтено, тем более действенна данная методика, более валидна та или иная математическая модель, более точен тот или иной психологический прогноз.

Существует наиболее оптимальный способ преодоления трудно­стей, связанных с многофакторностью психологических измерений. Так, если на измеряемый психологический признак оказывает действие боль­шое число разнообразных факторов, то априорно принимается точка зрения, что все эти многообразные и разнонаправленные факторы в конечном счете уравновешивают друг друга, и исследуемый признак варьирует *случайным образом*.

Именно на принципе случайности берет развитие целая область математической науки – теория вероятностей. Поэтому многие матема­тические методы, применяемые в психологии, основаны именно на ве­роятностной теории и случайных процессах.

Более того, существуют специальные методы и приемы, позво­ляющие определить, изменяется ли исследуемый признак случайным образом или неслучайно. Если психологическое свойство (признак) – случайная величина, то к нему применимы основные статистические критерии; если признак изменяется неслучайно, следует выявить и по возможности устранить (или минимизировать) тот фактор, который вно­сит систематическую ошибку. Если же это не представляется возмож­ным, следует использовать так называемые *непараметрические мето­ды* статистической обработки полученных результатов.

*Вариабельность (вариативность)* психологических измерений состоит в том, что психологические величины (признаки, переменные) зачастую принимают значения, весьма отличающиеся друг от друга. По­этому, наряду с мерами центральной тенденции (мода, медиана, сред­нее значение), в психологии всегда приходится учитывать и вариабель­ность (изменчивость) измеряемого признака. Подтверждено, что вариа­бельность переменных сама по себе является весьма информативным показателем. Разработано большое количество статистических методов, основанных именно на анализе вариабельности – дисперсионный, кор­реляционный, факторный анализ и др.

В различных предметных областях и разделах психологии измере­ние имеет свою специфику. Так, психофизические измерения пре­дусматривают, как правило, использование двух шкал: первая – это шкала физических единиц (сила света, звука, пространственные, вре­менные параметры сигнала и т. д.), вторая – субъективная (шкала суж­дений, оценок и пр.), которая может быть выражена в терминах номи­нальной, порядковой, интервальной шкалы или шкалы отношений

В случаях неметрического шкалирования правило, оперирует только субъективными шкалами.

Двойственная метрика предполагается и в психофизиологических исследованиях. Физиологические процессы в организме человека изме­ряются специальными приборами и выражаются в общепринятых физи­ческих единицах – секундах, герцах, микро- и милливольтах и т. д. В то же время психические процессы, сопутствующие физиологическим изменениям в организме, измеряются в терминах субъективного самоот­чета испытуемых.

Особое место занимают измерения в психодиагностике, поскольку они включают в себя, с одной стороны, систему субъективных отчетов или невербальных операций субъекта, с другой – систему условных приемов и методов оценки психологических показателей.

В заключение необходимо отметить, что, несмотря на вариатив­ность и многофакторность психологических величин, измерение в психо­логии является неотъемлемым и важным этапом психологических исследований, позволяющим с определенной степенью точностью и на­дежностью описывать разнообразные психические процессы и явления.

## 1. 3. Шкалы измерений

*Шкала* в широком понимании этого слова представляет собой упорядоченную совокупность данных. То есть, если в психологическом эксперименте (наблюдении, опросе и т. д.) получены какие-либо резуль­таты (данные) и определенным образом они упорядочиваются , то можно конструировать шкалу.

В самом общем смысле различают четыре типа шкал измерений: номинальную, порядковую, интервальную и шкалу отношений.

***Номинальная (номинативная) шкала,*** или ***шкала наименований*** состоит в присваивании какому-либо свойству или признаку определен­ного обозначения или символа (численного, буквенного и др.). По сути, это – классификация свойств, группировка объектов, объединение их в классы при условии, что объекты, принадлежащие к одному классу, идентичны (аналогичны) или, по меньшей мере, сходны друг с другом в отношении какого-либо признака или свойства, тогда как объекты, различающиеся по этому признаку, попадают в разные классы.

Примеры:

1. классификация вкусовых качеств:

*А* – сладкое, *В* – горькое, *С* – кислое, *D* – соленое;

1. цвета видимого спектра: *А* – красный, *В* – зеленый, *С* – синий и пр.;
2. распределение людей по типам темперамента:

*А* – холерики, *В* – сангвиники, *С* – флегматики, *D* – меланхолики.

Независимо от характера обозначения групп, классов (буквенные или численные), номинальная шкала определяет, что разные классы отличаются друг от друга лишь в качественном отношении, но не подра­зумевает каких-либо количественных операций с ними. Так, исходя из приведенных выше примеров, нельзя сказать, что *A* > *B* или *B* < *C*, мож­но лишь утверждать, что *A* нетождественно *B*, *B* отличается от *C* и т. д.

Номинальная шкала допускает любые замены и перестановки буквенных (численных) обозначений.

Частным случаем номинальной шкалыявляется ***дихотомическая шкала наименований***, когда свойство или признак может принимать только два значения, например:

*А* (1): мужчина верующий успевающий демократ

*В* (0): женщина атеист неуспевающий коммунист

***Ординарная (порядковая, ранговая) шкала*** предполагает ранжирование определенного признака или свойства так, что *А* > *B* > *C* > ... (или наоборот). Порядковое измерение возможно тогда, когда в объектах можно обнаружить различия в степени выраженности признака или свойства. Шкала порядка не предусматривает меры (степени) различий между элементами ряда. Другими словами, можно конста­тировать, что объект (признак, свойство) *А* имеет преимущество над *В*, *С* над *D* и т. д., но не можем сказать, в каком случае это преимущество выражено в большей или меньшей степени. Ранговая шкала задает лишь порядок следования объектов в соответствии со степенью выраженности того или иного признака.

Примеры:

1. места, занятые студентами (школьниками) в соревновании (олимпиаде и пр.);
2. ранг (место) студента по среднему баллу успеваемости;
3. в психодиагностике (например, тест Спилбергера):

утверждение: Я спокоен, собран, хладнокровен

оценка: 1 (никогда) 2 (иногда) 3 (часто) 4 (всегда).

Допустимая операция – реверсия шкалы. В случае количественных обозначений не допускается никаких перестановок внутри ранжирован­ного ряда. Допустимая статистика: медиана, проценты, ранговая корре­ляция по Спирмену, Кендаллу и т. д.

***Интервальная шкала (шкала интервалов)*** предполагает разбие­ние диапазона (расстояния) между двумя крайними (реперными) точка­ми на определенное число равных интервалов (градаций, категорий).

На интервальной шкале нет естественной точки отсчета: нуль условен, он не указывает на отсутствие измеряемого свойства. Шкала допускает операции нахождения разности, суммы и среднего значения и не изменяется при преобразовании *x* → *x* + *a* (сложение или вычитание). Эти свойства шкалы позволяют количественно сравнивать между собой различия между парами признаков, например: *А – В > C – D*. Тем не менее, шкала не допускает нахождение отношений величин признака (т. е. *во сколько раз* одна величина больше или меньше другой). Это можно проиллюстрировать следующим примером. Допустим, вчера темпера­тура воздуха была +5, а сегодня +10 градусов по шкале Цельсия. Можно констатировать, что сегодня на 5 градусов теплее, чем вчера, но вряд ли можем сказать, что сегодня потеплело в два раза (если выразить те же температуры, например, в градусах Фаренгейта, то мы получим, соот­ветственно, +41 и +50 градусов).

Необходимо отметить, что подавляющее большинство шкал, рас­сматриваемых в психодиагностике, являются порядковыми или интер­вальными шкалами.

***Шкала отношений*** предполагает наличие естественного нуля, который означает полное отсутствие какого-либо свойства или признака. Шкала отношений является наиболее информативной шкалой, допуска­ет любые математические операции и использование различных стати­стических приемов. Шкала не изменяется при преобразовании *x* →*bx.* Это означает, в частности, что отношение двух величин не зависит от выбора единиц измерения. Если, например, имеется два груза с массой соответственно *m1* и *m2* и обнаруживаем, что *m1 : m2* = 1 : 2, то отношение не изменится, если измерить массу этих грузов в граммах, фунтах, унциях или любых других единицах. В то же время для шкал отношений неправомерна операция *x* → *x + a,* т. е. не допускается никакого линейного сдвига относительно нулевой точки. Так, если 100 : 200 = 1 : 2, то (100 + 10) : (200 + 10) ≠ 1 : 2.

Большинство измерительных шкал физических характеристик (пространство, время, масса, объем, скорость и пр.), используемых, в частности, в психофизике, являются шкалами отношений. Шкалы отно­шений используются также и в психофизиологии, где отсчет различных физиологических характеристик также ведется от естественного нуля.

Оперирование различными математическими методами предпола­гает изначальное определение типа шкалы исследуемого признака. Если тип шкалы определен неверно, то исследователь может выбрать неадекватный метод статистической обработки и прийти в результате к неверным выводам.

## ГЛАВА 2

## ОСНОВНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

## 2. 1. Генеральная и выборочная совокупности

*Генеральная совокупность*представляет собой массив данных одной категории. Например ставится задача исследовать коэффициент интеллекта (IQ) школьников выпускных классов школ некоторого города, то генеральной совокупностью будут являться все школьники всех выпускных классов всех школ города.

Обычно генеральная совокупность включает в себя очень большое число субъектов (испытуемых) – студентов вузов, школьников, работни­ков предприятий, военнослужащих, пенсионеров и др. Сплошное исследование генеральных совокупностей чрезвычайно затруднительно, а зачастую практически и невозможно. Поэтому, как правило, изучается часть генеральной совокупности, называемая *выборочной совокуп­ностью*, или *выборкой*.

*Выборка (выборочная совокупность)*– это такая группа объектов, которая должна удовлетворять следующим условиям:

1. Это группа объектов, доступная для изучения. Объем выборки определяется задачами и возможностями наблюдения и эксперимента.

2. Это часть заранее намеченной генеральной совокупности.

3. Это группа, отобранная случайным образом так, чтобы любой объект генеральной совокупности имел одинаковую вероятность по­пасть в выборку.

Основное и главное свойство выборочной совокупности – *репрезен­тативность*. Репрезентативность – это способность выборки характе­ризовать соответствующую генеральную совокупность с определенной точностью и достаточной надежностью.

*Ошибки репрезентативности* могут возникать в двух случаях:

* 1. Если выборка, характеризующая генеральную совокупность, мала. Так, если проведены исследования в группе, состоящей из 10 школьников 11-го класса какой-либо школы города, то вряд ли можно экстраполировать полученные данные на всю генеральную совокуп­ность.
  2. Свойства (параметры) выборки не совпадают с параметрами ге­неральной совокупности. Такое явление может наблюдаться в тех слу­чаях, когда нарушается принцип случайности при отборе испытуемых.

## 2. 2. Переменная величина

*Переменная величина*(или просто *переменная*) – количественно измеряемое свойство или признак, принимающие различные значения. В качестве переменных могут выступать различные психические признаки – время решения задачи, количество допущенных ошибок, уровень тревожности или нейротизма, коэффициент интеллекта и многое другое.

Значения переменных могут изменяться либо непрерывно, либо дискретно. Так, в большинстве психофизиологических исследований измеряемые величины, в принципе, непрерывны, и точность их изме­рения зависит от точности измерительного устройства (прибора). Дис­кретные значения переменных встречаются в большинстве психодиагно­стических процедур, где измеряемый параметр чаще всего принимает целочисленные значения – количество положительных и отрицательных ответов, число правильно решенных задач (выполненных заданий) и т.д.

Принято считать, что психологические переменные являются слу­чайными величинами, так как они испытывают на себе влияние много­численных и разнообразных факторов и невозможно предсказать зара­нее, какое значение они примут.

Математическая обработка – это оперирование со значениями признака (переменной), полученными у испытуемых в процессе психоло­гического исследования. Методы математической обработки весьма раз­нообразны. Это может быть построение распределения частот измеряе­мого признака, вычисление мер центральной тенденции, мер изменчи­вости (вариабельности) признака, определение характера связи между разными переменными, установление формы зависимости одного признака от другого, влияние тех или иных факторов на величину признака и многое другое.

Поскольку большинство изучаемых в психологии переменных не являются жестко детерминированными величинами, то большинство математических методов основано на основах теории вероятностей. Это касается и выводов, которые делает исследователь в результате мате­матической обработки полученных данных.

Любой вывод или прогноз может быть сделан лишь с определенной вероятностью (*Р* = 0 ÷ 1). Для характеристики этой вероятности исполь­зуется понятие уровней значимости.

## 2. 3. Уровни значимости

*Уровень значимости* (иначе, *порог достоверности*,β) является показателем вероятности безошибочных выводов и прогнозов. Чаще всего в статистике используются четыре стандартных уровня значи­мости – нулевой (β0 = 0,90), первый (β1 = 0,95), второй (β2 = 0,99) и третий (β3 = 0,999). Другими словами, если исследователь задает нулевой уровень значимости, то его выводы и прогнозы справедливы в 90% случаев (вероятность равна 0,90); если первый уровень – в 95% случаев и т. д. Большинство существующих статистических таблиц осно­ваны именно на этих «стандартных» уровнях, хотя с помощью совре­менной компьютерной техники можно решать и обратную задачу – по результатам исследования определять тот уровень значимости, на котором можно сделать безошибочный вывод (например, β = 0,978).

Необходимо отметить, что в психологических исследованиях уро­вень значимости 0,95, как правило, вполне достаточен для формули­ровки тех или иных выводов и прогнозов. Более высокие уровни (β2 и β3) в ряде психологических исследований почти недостижимы и исполь­зуются тогда, когда к исследованию предъявляются повышенные требо­вания (работа по важному социальному заказу и пр.).

Важно иметь в виду, что работа на каждом уровне значимости пред­полагает минимальный объем выборочной совокупности, на которой проводится исследование. Так, если объем выборки (*n*) – от 20 до 30 испытуемых, то можно использовать только нулевой уровень значи­мости (β0), при *n* ≥ 30 – нулевой и первый уровень, при *n* ≥ 100 - β0, β1 и β2, и, наконец, при *n* ≥ 200 – все четыре уровня (β0, β1, β2 и β3). При малочисленных выборках (*n* < 20) предпочтительнее пользоваться методами непараметрической статистики, поскольку определить харак­тер распределения исследуемого признака на такой выборке не пред­ставляется возможным.

Некоторые исследователи в качестве уровня значимости исполь­зуют величину α(или *р*), равную 1 – β*.* В этом случае уровни значимости приобретают следующий вид: α0 ≤ 0,10; α1 ≤ 0,05; α2 ≤ 0,01 и α3 ≤ 0,001. Логический смысл этих величин состоит в том, что они характеризуют вероятность случайности (вероятность ошибочных прогнозов). Другими словами, это та вероятность, которая приходится на долю случайных (как правило, непредсказуемых) факторов.

Какой именно критерий (α или β) использовать при статистической обработке – дело самого исследователя, поскольку принципиального значения это не имеет.

## 2. 4. Достоверность результатов исследования

О *статистической достоверности (статистической значимо­сти)* результатов психологического исследования можно говорить в тех случаях, когда статистический критерий (мера различий, связи, зависи­мости, влияния и т. д.) превышает стандартное (критическое) табличное значение для данного уровня значимости.

Так, например, для сравнения между собой двух независимых вы­борок по критерию Стьюдента стандартное значение, определяемое по соответствующей таблице(*t*кр.), равно 2,57. В то же время значение критерия Стьюдента, вычисленное по экспериментальным данным(*t*эксп*.*), составляет 2,63. В данном случае *t*эксп.*> t*кр., и различия между двумя выборками считаются статистически достоверными (статисти­чески значимыми). Если же *t*эксп *< t*кр.(например, *t*эксп*..*= 2,54), то различия называются недостоверными (они могут возникнуть в результате случайных вариаций признака). При равенстве показателей(*t*эксп.*.= t*кр.)достоверность различий подвергается сомнению (иногда говорят, что различия лежат на границе достоверности).

Аналогичные выкладки справедливы и в других случаях, когда определяется достоверность связи (корреляции) между переменными, или значимости влияния того или иного фактора

Исключение составляют некоторые непараметрические критерии, например, критерий Манна – Уитни или критерий Вилкоксона, где сте­пень различий или влияния считается статистически значимой, когда эмпирически полученное значение критерия меньше критического (табличного).

Особое место занимают меры соответствия экспериментального распределения теоретическому. В этом случае соответствие считается статистически значимым, если величина критерия, вычисленная по экспериментальным данным меньше табличной для данного уровня значимости.

**ГЛАВА 3**

**ПОДГОТОВКА ДАННЫХ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ**

Прежде чем приступать к математической обработке результатов психологического исследования, экспериментальный материал необхо­димо соответствующим образом подготовить. При этом психологу следует соблюдать два непременных условия.

Во-первых, данные должны быть представлены в наиболее компакт­ной, удобной для обработки форме. Во-вторых, при упорядочении дан­ных должен быть сохранен максимум содержащейся в них информации.

Подготовка данных к математической обработке включает в себя ряд последовательных этапов: протоколирование, табулирование дан­ных, создание таблиц сгруппированных частот, построение диаграмм или полигона распределения частот и т. д. Рассмотрим все этапы более подробно.

## 3. 1. Протоколирование данных

Если психолог имеет под рукой персональный компьютер, задача протоколирования значительно упрощается. Любой программист может составить соответствующую базу данных, и все необходимые сведения о каждом испытуемом можно заносить в компьютер.

Несомненное удобство компьютерного варианта состоит в том, что в любой момент можно извлекать информацию об интересующем нас контингенте испытуемых – по полу, возрасту, социальной принадлеж­ности и др. При отсутствии такой возможности на каждого испытуемого составляется отдельный протокол.

В протоколе необходимо отмечать фамилию и инициалы испытуе­мого, пол и возраст (за исключением случаев анонимного обследования, когда указываются только инициалы, пол и возраст). Несоблюдение этих требований делает невозможным дальнейший анализ результатов (в тех случаях, когда нас интересует связь исследуемой переменной с возрастом и полом испытуемых).

Весьма желательно указывать в протоколе дату исследования. Это особенно важно в тех случаях, когда исследование одной и той же вы­борки проводится повторно (период времени между повторными исследованиями, например, две недели или полгода) имеет большое значение, особенно когда речь идет о детях.

В некоторых случаях необходимо указывать время суток, когда проводилось исследование. Так, некоторые психологические и психофи­зиологические переменные (время сенсомоторной реакции, концентра­ция и переключаемость внимания, объем оперативной памяти и др.) в значительной мере зависят от уровня активности субъекта, степени его утомления, которые далеко не одинаковы в разное время суток.

При необходимости в протоколе следует отмечать условия опыта (проводилось ли исследование индивидуально или в группе, наличие внешних помех и т. д.). Все другие данные о каждом или отдельных испытуемых исследователь отмечает по своему усмотрению, т. е. фиксируется то, что психолог считает наиболее важным.

## 3. 2. Составление сводных таблиц

Использование индивидуальных протоколов для математической обработки результатов не очень удобно. Для того, чтобы представить материал в более компактном виде, данные сводятся в итоговую табли­цу следующего вида:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| №№  п/п. | Фамилия, имя, отчество | Другие данные  (если необходимо) | Исследуемый  показатель |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| *…* |  |  |  |
| *n* |  |  |  |

В ряде случаев перед составлением сводной таблицы проводится *ранжирование данных*. Оно, в частности, необходимо при определении квантилей. Для этого данные выстраиваются в общий ряд по исследуемому признаку в порядке его возрастания (или убывания) следующим образом: *х*1≤ *х*2≤ *х*3≤ *...* ≤ *х*n (или наоборот), где *n* – общее число значений признака (объем выборки). Знак «меньше или равно» предполагает, что у разных испытуемых могут встречаться одинаковые значения переменной.

Иногда даже итоговые таблицы могут оказаться довольно громоздкими и не вполне удобными для дальнейшей обработки. В этом случае материал можно сделать еще более компактным, составляя частотные таблицы *(таблицы распределения частот исследуемого признака):*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №№ пп. | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | *n* – 1 | *n* |
| *x*i |  |  |  |  |  |  |  |
| *f*i |  |  |  |  |  |  |  |

В первой строке дается номер значения переменной в ранжиро­ванном ряду, во второй – конкретное значение (величина признака) и в третьей – частота встречаемости признака (число одинаковых значений признака в выборке).

Для того чтобы полученные данные представить в еще более ком­пактном виде, используются таблицы *распределения сгруппированных частот*. Для составления такой таблицы необходимо:

1) общий диапазон изменения признака разделить на ряд поддиапа­зонов (классов) при условии, что ширина всех классов должна быть одинакова;

2) определить границы классов и их число в общем диапазоне;

3) подсчитать частоты встречаемости признака в каждом классе.

Обычно для построения распределения сгруппированных частот используется 7 – 15 классов. Для наиболее точного разбиения диапазо­на на классы (если в дальнейшем предполагаются математические операции с этими классами) можно использовать формулу Стэрджесса: *N =* 1 + 3,322 *lg n,* где *n –* объем выборки (количество значений признака), а *N* – количество классов. Так, например, если *n* = 100, то *N* = 1 + 3,322 ⋅ 2 ≈ 8.

Пример

На выборке испытуемых численностью 100 человек определялся коэффициент интеллекта (IQ)*.* Минимальное значениеIQоказалось равным 72, а максимальное – 134. Для составления таблицы сгруппиро­ванных частот используем 8 классов (в соответствии с формулой Стэрджесса). Определяем общий диапазон изменения признака – он будет соответствовать разнице между минимальным и максимальным значениями: 134 – 72 = 62. Следовательно, в каждый класс должно попадать по 8 значений признака (при разбиении на классы можно слегка расширить диапазон с тем расчетом, чтобы в каждом классе оказалось одинаковое число значений и чтобы крайние значения не оказались за пределами диапазона). В соответствии с этим определяем границы классов и составляем таблицу сгруппированных частот:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер класса (*N*) | 1 | 2 | 3 | ... | 8 |
| Границы класса (*x*min ÷ *x*max) | 72 ÷ 79 | 80 ÷ 87 | 88 ÷ 95 | ... | 128 ÷ 135 |
| Среднее значение (*х¯* ) | 75,5 | 83,5 | 91,5 | ... | 131,5 |
| Частоты ( *f*i ) | 1 | 7 | 32 | ... | 2 |
| Накопленные частоты ( *F*i) | 1 | 8 | 40 | … | 100 |

Накопленные частоты, приведенные в 5-й строке, могут быть использованы в некоторых статистических расчетах (например, для вы­числения критерия λ по Колмогорову). Накопленные частоты вычисля­ются путем простого суммирования частот от 1-го до *N*-го класса: *F*1 = *f*1; *F*2 = *f*1 + *f*2; *F*3 = *f*1 + *f*2 + *f*3 и т. д.

## 3. 3. Определение квантилей

*Квантиль* – точка на числовой оси (значение признака), делящая совокупность наблюдений в определенной пропорции. Определение квантилей достаточно часто используется в психодиагностических про­цедурах (при определении тестовых норм и т. д.). Для определения квантилей необходимо иметь ряд значений исследуемого признака, ранжированных в порядке возрастания величины.

Различают несколько разновидностей квантилей:

а) *квартили* (*Q*)делят совокупность наблюдений (ранжированный ряд) на 4 равные части: 1-й квартиль (*Q*1) делит ряд в соотношении 25:75%, 2-й *(Q*2) *–* в соотношении 50:50% и 3-й *(Q*3*)* – в соотношении 75:25%.

б) *квинтили* (*K*) делят выборку на 5 равных частей: *K*1 – в соотно­шении 20:80%, *K*2 – 40: 60%, *K*3 – 60:40%, *K*4 – 80:20%.

в) *децили* *(D)* делят ранжированный ряд на 10 равных частей: *D*1 = 10%, *D*2 = 20%, ... *D*9 = 90%.

г) наконец, *процентили* (*Р*) делят совокупность наблюдений на 100 частей (в процентном отношении).

Соотношения квантилей можно представить в виде следующей схемы:



Пример

На 20 испытуемых определялся уровень личностной тревожности (УЛТ) по тесту Спилбергера. При ранжировании значений признака получен следующий вариационный ряд (см. таблицу). Задача состоит в том, чтобы определить значения 1-го, 2-го и 3-го квартилей.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №№ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| УЛТ | 31 | 32 | 32 | 34 | 36 | 36 | 36 | 37 | 39 | 41 | 42 | 42 | 43 | 44 | 45 | 45 | 45 | 46 | 47 | 48 |

*Q*1 = 36 *Q*2 = 41,5 *Q*3 = 45

Для определения значений квартилей разбиваем ранжированный ряд на 4 равные части (по 5 значений признака). 1-й квартиль располагается между 5-м и 6-м значениями ряда, оба из которых соответствуют 36. Следовательно, *Q*1 = 36. 2-й квартиль расположен между 10-м значением, равным 41, и 11-м, равным 42. Представляется разумным определить значение 2-го квартиля как среднее между двумя смежными значениями (*Q*2 = 41,5). Значение 3-го квартиля лежит между 15-м и 16-м значениями ряда (*Q*3 = 45).

Точно так же мы можно определить значения квинтилей (разбиение ранжированного ряда на 5 частей по 4 значения признака) или децилей (разбиение ряда на 10 равных частей по 2 значения переменной в каждой).

## 3. 4. Графическое представление результатов

Графическое представление результатов психологического иссле­дования имеет ряд несомненных преимуществ перед табличным (цифровым) материалом в тех случаях, когда речь идет о докладах, научных отчетах и сообщениях, диссертационных работах и т. д. Графи­ческое представление наиболее наглядно, оно позволяет визуально представить полученные закономерности, связи и пр. В данном разделе мы коснемся лишь графического представления распределений иссле­дуемого признака.

В основе графического представления лежат составленные заранее таблицы сгруппированных частот. Первый вид представления – построе­ние столбчатых диаграмм (иначе, гистограмм) распределения признака (рис. 3.1, а). Гистограммы строятся в координатах *f =* ϕ (*x*i), где по оси абсцисс откладываются значения признака (*x*i), а по оси ординат – частота встречаемости признака (*f*)*.* Ширина каждого столбца гистограм­мы соответствует ширине класса, а высота столбца – частоте встречае­мости признака в данном классе.

Вместо диаграмм можно использовать построение полигона распре­деления (рис. 3.1, б). В этом случае распределение отображается в виде точек, соединенных друг с другом прямыми линиями. Координаты каж­дой точки соответствуют среднему значению класса (по оси абсцисс) и частоте встречаемости признака в данном классе (по оси ординат).

*f*i

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*x*i

а б

Рис. 3.1. Графическое представление результатов исследования:

а – столбчатая диаграмма (гистограмма) распределения (зачерненный столбец соответствует модальному классу); б) полигон распределения.

По оси абсцисс – значение исследуемого признака (*x*i),

по оси ординат – частота встречаемости данного значения признака (*f*)

ГЛАВА 4

МЕРЫ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТЕНДЕНЦИИ

Центральная тенденция – то количественное (численное) значение признака, к которому тяготеет переменная величина. Поскольку понятие «тяготеет» несколько произвольно и с математической точки зрения не вполне корректно, имеет смысл рассмотреть различные меры централь­ной тенденции более подробно.

В психологических исследованиях в качестве мер центральной тенденции чаще всего используются *мода, медиана* и *среднее арифме­тическое значение*. Значительно реже используются такие меры как *среднее геометрическое, среднее гармоническое, обратное среднее гармоническое значение* и др.

## 4. 1. Мода

*Мода (Mo)* – наиболее часто встречающееся значение признака. В предыдущем примере (ранжированный ряд уровня личностной тревож­ности) мы имеем две моды: *Mo*1 = 36 и *Mo*2 = 45 (эти значения пере­менной встречаются трижды, в то время как все остальные – по 1 или 2 раза). В зависимости от того, сколько значений признака удовлетворяют определению моды, различают *мономодальные* (имеющие одну моду), *бимодальные* (имеющие две моды) и *полимодальные* распределения(имеют более чем две моды), а также *распределения, не имеющие моды* (все значения признака встречаются примерно с одинаковой частотой). В бимодальном и полимодальном распределениях, в свою очередь, можно определить наибольшую и наименьшую моды.

В тех случаях, когда анализируются таблицы сгруппированных частот исследуемого признака, как правило, определяется *модальный класс*, т. е. тот класс распределения, в который попадает наибольшее количество частот (значений признака). Так, для иллюстрации зачер­ненный столбец на рис. 3.1, а соответствует модальному классу.

Мода не является достаточно строгой мерой центральной тенден­ции, поскольку она не учитывает характера распределения переменных, а значит может использоваться лишь в предварительных выводах и прогнозах. Кроме того, необходимо использовать моду только для боль­ших объемов выборок, поскольку для малых она недостаточно инфор­мативна.

## 4. 2. Медиана

*Медиана (Md)* – значение, которое делит упорядоченное множество данных (ранжированный ряд) пополам так, что одна половина значений оказывается больше, а другая – меньше медианы. Медиана – среднее значение ранжированного ряда. Если число значений нечетное, то ме­диана соответствует среднему члену ряда, если четное, то медиана есть среднее между двумя центральными значениями (в предыдущем при­мере *Md* = 41,5).

Медиана соответствует 50-му процентилю, 5-му децилю или 2-му квартилю в группе данных, т. е. *Md = P*50 *= D*5 *= Q*2.

Мода и медиана не учитывают разброса данных, и переменные, лежащие в стороне от центра, не влияют на их величину.

## 4. 3. Среднее арифметическое значение

*Среднее арифметическое значение*,или просто *среднее*(******), равно сумме переменных, деленной на их число.

Для несгруппированных переменных среднее арифметическое вы­числяется по формуле:

 (4.1)

Для сгруппированных переменных можно воспользоваться другой формулой – среднее будет соответствовать сумме произведений средних значений каждого класса и частоты встречаемости значения признака в данном классе:

 (4.2)

Среднее арифметическое может использоваться и для тех признаков, для которых не найден способ количественного измерения (шкала порядка). Для этого в качестве *x*i используются ранговые числа, а среднее принято называть *непараметрическим средним*.

*Взвешенное среднее арифметическое* используется в тех случаях, когда разные составляющие имеют разный «удельный вес» в формировании общей совокупности:

 (4.3)

или:  (4.4)

где *n –* объем выборки, *N –* число классов.

Пример

Средний балл аттестата учащихся выпускных классов одной из школ соответствует следующим значениям: 11-а – 4,2; 11-б – 4,0 и 11-в – 3,8. Численность этих классов составляет: 11-а – 25 человек, 11-б – 28 и 11-в – 32 человека. В данном случае средний балл аттестата по всем выпускным классам составит (4,2 ⋅ 25 + 4,0 ⋅ 28 + 3,8 ⋅ 32) : (25 + 28 + 32) = 3,98.

Среднее принято округлять с точностью до знака, следующего за последним знаком *xi* (увеличение точности на порядок).

Свойства среднего

1. Сумма всех отклонений от среднего значения равна нулю: 

Доказательство:

поскольку ‾

2. Если константу *с* прибавить к каждому значению, то среднее  превратится в 

Доказательство:



3. Если каждое значение множества со средним  умножить на константу *c*, то среднее станет равным 

Доказательство: 

4. Сумма квадратов отклонений значений от их среднего арифме­тического меньше суммы квадратов отклонений от любой другой точки:  (приусловии, что *b ≠‾x* )*.*

Доказательство: где 

Примем  Тогда:



поскольку 

Так как *c*2 *> 0*, то:



4. 4. Среднее геометрическое значение

Среднее геометрическое значение *(xg)* используется для вычисления центральной тенденции при прогрессивно возрастающих квантилях (когда распределение значений переменной имеет выраженную положительную (правостороннюю) асимметрию).

Формула среднего геометрического:

 (4.5)

Для вычислений можно использовать логарифмирование каждой переменной по основанию *е*:



(4.6)

Переход от ln *xg* к *xg* осуществляется с помощью операции антилогарифмирования:

 (4.7)

## Задача 4.1

*Условие задачи*

У 50 школьников выпускных классов исследовался коэффициент интеллекта (IQ). Получен следующий вариационный ряд (см. табл.).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №№ | *IQ* | №№ | *IQ* | №№ | *IQ* | №№ | *IQ* | №№ | | *IQ* | |
| 1 | 119 | 11 | 104 | 21 | 111 | 31 | 103 | | 41 | | 107 | |
| 2 | 86 | 12 | 88 | 22 | 98 | 32 | 88 | | 42 | | 92 | |
| 3 | 100 | 13 | 113 | 23 | 84 | 33 | 108 | | 43 | | 105 | |
| 4 | 93 | 14 | 89 | 24 | 102 | 34 | 70 | | 44 | | 89 | |
| 5 | 108 | 15 | 103 | 25 | 92 | 35 | 113 | | 45 | | 95 | |
| 6 | 117 | 16 | 107 | 26 | 88 | 36 | 83 | | 46 | | 110 | |
| 7 | 82 | 17 | 78 | 27 | 104 | 37 | 91 | | 47 | | 101 | |
| 8 | 100 | 18 | 110 | 28 | 127 | 38 | 97 | | 48 | | 85 | |
| 9 | 86 | 19 | 98 | 29 | 103 | 39 | 87 | | 49 | | 114 | |
| 10 | 129 | 20 | 84 | 30 | 112 | 40 | 101 | | 50 | | 102 | |

*Задание*

1. Построить ранжированный ряд IQ*.*

2. Построить таблицу сгруппированных частот для 7 ÷ 8-классового распределения.

3. Построить графическое выражение IQ в виде полигона распределения или столбчатой диаграммы.

4. Определить 1-й, 2-й и 3-й квартили, моду, медиану и среднее арифметическое значение коэффициента интеллектуальности для выборки в 50 испытуемых.

## Задача 4.2

*Условие задачи*

В трех выпускных классах средней школы подсчитывался средний балл успеваемости. Получены следующие результаты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | 11-а класс | | 11-б класс | | | 11-в класс | |
| Пол | Число  учащихся | | Балл | | Число  учащихся | Балл | Число  учащихся | Балл |
| Девочки | 18 | | 3,62 | | 15 | 3,90 | 17 | 3,75 |
| Мальчики | 12 | | 3,44 | | 13 | 3,58 | 13 | 3,70 |

*Задание*

Вычислить средний балл успеваемости у девочек и мальчиков всех выпускных классов.

## Задача 4. 3

Имеется следующая совокупность экспериментальных данных: 1,00; 1,26; 1,58; 2,00; 2,51; 3,16; 3,98; 5,01; 6,31; 7,94.

*Задание*

Вычислить среднее геометрическое значение данной совокупности двумя способами:

а) вычислением произведения значений и возведения в соответ­ствующую степень;

б) путем логарифмирования по основанию *e*.

**ГЛАВА 5**

**МЕРЫ ИЗМЕНЧИВОСТИ ИССЛЕДУЕМОГО ПРИЗНАКА**

Две выборочные совокупности могут иметь одинаковые или близкие между собой средние значения признака и в то же время существенно различаться по степени вариабельности (вариативности) этого призна­ка.

Например, имеется две группы испытуемых (по 100 человек в каж­дой), у которых исследуется коэффициент интеллекта (IQ). Средние зна­чения IQ в той и другой группе могут приблизительно совпадать (до­пустим, IQ1 = 102 и IQ2 = 97), и констатация этого факта даст нам очень немного информации. В то же время известно, что индивидуальные зна­чения в первой группе испытуемых изменяются от 85 до 116, а во второй от 60 до 135. На основании этого можно констатировать, что вторая вы­борка обладает большим разнообразием признака по сравнению с первой.

Для определения степени разнообразия (изменчивости) иссле­дуемого параметра используются различные критерии: пределы разно­образия, размах вариаций, среднее и стандартное отклонения, диспер­сия, коэффициент вариации и др.

## 5. 1. Лимиты (пределы) разнообразия

***Лимит* (*предел*) *разнообразия*** – это указание наименьшей и наибольшей величины признака среди всех представителей группы:

(5.1)



Другими словами, предел разнообразия признака не вычисляется, а лишь констатируется. Так, в приведенном выше примере lim *x*1 = 85 ÷ 116 и lim *x*2 = 60 ÷ 135.

## 5. 2. Размах вариаций

*Размах вариаций* (ρ)есть математическая разность между максимальной и минимальной величиной признака:



(5.2)

В нашем примере размах вариаций в первой группе (ρ1)составляет 116 – 85 = 31 и во второй (ρ2) –135 – 60 = 75.

*Размах от 10-го до 90-го процентиля* (*мера D*)вычисляется следующим образом:



(5.3)

Другими словами, для вычисления меры *D* отсекается по 10% значений с левого и правого края распределения и определяется размах вариаций для оставшихся 80%. Эта мера более стабильна, чем включающий и исключающий размах, поскольку на него не влияют крайние (возможно, случайные) значения вариаций.

*Междуквартильный размах* **–** еще более жесткая мера изменчи­вости, нежели мера *D.* Междуквартильный размах – это разность между 1-м и 3-м квартилями группы:



(5.4)

Другими словами, для определения междуквартильного размаха с краев распределения признака отсекается по 25% значений и опре­деляются границы для оставшихся (наиболее типичных) 50%, которые в максимальной степени характеризуют центральную тенденцию.

*Полумеждуквартильный размах* (*Q*1/2) равен половине расстояния

между 1-м и 3-м квартилями:

(5.5**)**



Суть этой статистической меры состоит в уравнивании между собой расстояний между 1-м и 2-м и между 2-м и 3-м квартилями, которые в случае несимметричных распределений могут отличаться друг от друга. В случае же симметричного распределения полумеждуквартильный размах включает в себя приблизительно 25% данных.

## 5. 3. Среднее отклонение

***Среднее отклонение*** **(*MD*)** – параметрическая мера изменчивости, предложенная в свое время Г. Т. Фехнером. Среднее отклонение равно сумме отклонений от среднего значения (или, другими словами, сумме расстояний между *x*i и ), взятых по модулю:

 (5.6)

## 5. 4. Дисперсия

***Дисперсия*** (σ2)представляет собойсумму квадратов отклонений от среднего (сумму квадратов расстояний между *x*i и ):

 (5.7)

Деление суммы квадратов на число степеней свободы *n –* 1 позволяет сравнивать между собой совокупности, различные по объему. Считается, что дисперсия – более мощный статистический критерий, нежели среднее отклонение, так как больший вклад в дисперсию дают те значения признака, которые расположены дальше от среднего (вклад каждого значения в дисперсию возрастает пропорционально квадрату отклонения от среднего).

Формула 5.7 не очень удобна при расчете дисперсии вручную (на микрокалькуляторе). Поэтому для этих целей можно использовать дру­гую (рабочую) формулу, которую можно получить путем соответст­вующих преобразований.

*Преобразование формулы*:



Но . Отсюда следует, что:



Так как , то:

 (5.8)

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия не изменится, если к каждому значению *xi* прибавить константу *c*: *x*j = *x*i *+ c* ⇒ σj2 *=* σi2*.*
2. Умножение на константу *c* каждого значения *xi* увеличивает дисперсию в *c*2 раз: *xj = сxi ⇒* σj2 *= с*2 ⋅ σi2*.*

## 5. 5. Среднеквадратичное (стандартное) отклонение

***Стандартное отклонение***(σх) соответствует квадратному корню из дисперсии. Наряду с дисперсией является одной из наиболее часто используемых мер вариабельности признака.

 (5.9)

## 5. 6. Коэффициент вариации

***Коэффициент вариации*** *(V)* есть отношение стандартного откло­нения к среднему арифметическому значению, выраженное в процентах:

100*%* (5.10)

## Задача 5. 1

В психофизиологическом эксперименте регистрировалось время простой сенсомоторной реакции у 50 испытуемых в ответ на звуковой стимул средней интенсивности. Получены следующие значения времени реакции (ВР) в миллисекундах:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | *Т*, мс | № | *Т*, мс | № | *Т*, мс | № | *Т*, мс | № | *Т*, мс |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 | 138  180  160  144  169  140  178  134  141  174 | 11  12  13  14  15  16  17  18  19  20 | 137  172  143  126  139  130  127  144  125  132 | 21  22  23  24  25  26  27  28  29  30 | 136  132  135  142  129  139  156  130  141  175 | 31  32  33  34  35  36  37  38  39  40 | 142  164  147  144  131  150  128  143  133  151 | 41  42  43  44  45  46  47  48  49  50 | 149  158  145  155  161  148  166  146  128  153 |

*Задание*

1. Определить размах вариаций, междуквартильный и полумежду­квартильный размах, среднее отклонение, дисперсию, стандартное отклонение и коэффициент вариации.

1. Построить обычную и кумулятивную кривые распределения ВР. Определить процентное соотношение частот при нормировании распре­деления по стандартному отклонению от – 4 до + 4σ с шагом в 1σ.
2. Определить размах распределения признака в единицах стандартного отклонения.

## Задача 5.2

*Условие задачи*

Проведено тестирование двух групп испытуемых (по 10 человек в каждой) на уровень личностной тревожности (УЛТ) по Спилбергеру. Получены следующие результаты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| УЛТ1 | 24 | 42 | 29 | 39 | 26 | 37 | 40 | 33 | 44 | 38 |
| УЛТ2 | 34 | 40 | 26 | 47 | 29 | 31 | 38 | 43 | 45 | 42 |

*Задание*

Определить средние значения УЛТ, стандартные отклонения и коэффициенты вариаций для каждой группы испытуемых, сравнить их между собой, сделать выводы.

**ГЛАВА 6**

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Кроме эмпирических (построенных на основе данных эксперимен­тального исследования) существуют и теоретические распределения. Любое теоретическое распределение представляет собой определен­ную математическую модель, которой (с определенной долей вероят­ности) могут соответствовать (или не соответствовать) эксперименталь­ные распределения.

Перед психологом достаточно часто возникает проблема сопостав­ления экспериментального распределения с теоретическим – в плане выбора наиболее адекватного метода математической обработки ре­зультатов для прогнозирования вероятности тех или иных событий и т.д. В предлагаемой главе будут рассмотрены лишь те виды распределений, с которыми психологам приходится встречаться особенно часто. Особое внимание будет уделено *нормальному распределению.* Кроме него, бу­дут рассмотрены *равномерное, биномиальное распределение* и *распре­деление Пуассона.*

## 6.1. Нормальное распределение

6. 1. 1. Основные понятия

*Нормальное распределение* (*распределение Гаусса****,*** *распределение Муавра – Лапласа*) – это распределениезначенийпеременной величины в тех случаях, когда она варьирует случайным образом и не подвержена влиянию какого-либо систематического фактора.

*Формула нормального распределения*:

 (6.1 а, б)

где: *f* – теоретическая частота встречаемости значения *xi*; σ – стандарт­ное отклонение; *a, b* – константы; π ≈ 3,142 (отношение длины окруж­ности к диаметру); e ≈ 2,718 (основание натурального логарифма).

Теоретическое нормальное распределение имеет вид симметрич­ной колоколообразной кривой, которая подчиняется следующим зако­номерностям:

1. Правая и левая ветви теоретического нормального распреде­ления абсолютно симметричны и как бы зеркально отражают друг друга.
2. В нормальном распределении основные показатели центральной тенденции (мода, медиана и среднее арифметическое значение) совпадают и соответствуют самой высокой точке (вершине) распределения.
3. Правая и левая ветви распределения уходят в бесконечность, никогда не соприкасаясь с осью абсцисс. Другими словами, частота (вероятность) встречаемости того или иного значения признака может быть сколь угодно мала, но никогда не равна нулю. В практическом отношении это свойство нормального распределения весьма неудобно, так как погоня за бесконечностью – занятие весьма неблагодарное. Поэтому принято анализировать полученные данные в диапазоне от –4 до +4 стандартных отклонений (теоретически в этот диапазон должно попадать ~ 99,98% экспериментальной выборки). В то же время сужение диапазона до ±3 σ несколько рискованно, так как значения, даваемые «крайними» испытуемыми, могут выпасть из рассмотрения.

При переводе экспериментальных значений в единицы стандартно­го отклонения может быть использована мера Пирсона *z =* (*x*i *- *)/σх. На рис. 6.1 показаны теоретические частоты встречаемости значений признака (в процентном соотношении) при разбиении диапазона от –4 до +4 σ на восемь равных классов (ширина каждого класса соответ­ствует одному стандартному отклонению), а также соответствующие 8-классовому распределению кумулятивные (накопленные) частоты (рис. 6.2). Эти численные значения могут понадобиться для сравнения экспериментально полученного распределения с теоретическим.

Рис. 6.1. Кривая нормального распределения



****

≈0,1% ≈2,3% ≈15,9% ≈50% ≈84,1% ≈97,7% ≈99,9% ≈100%

Рис. 6.2. Кумулятивная кривая нормального распределения

Кроме 8-классового, иногда используют 16-классовое распределе­ние – в этом случае диапазон от –4 до +4 σ разбивают на 16 равных классов с шагом 0,5 стандартных отклонения.

Зная распределение частот в нормальном распределении, можно решить обратную задачу – определить размах (в единицах стандартного отклонения), в который укладывается определенное количество (про­цент) значений выборочной совокупности. Так, 90% выборки укладыва­ются в пределах ±1,645σ*;* 95% соответствуют ±1,96σ; 99% соответствуют ±2,58σ;99,9% укладываются в ±3,29σ. Как будет показано далее, эти соотношения имеют большое значение для определения достоверности некоторых статистических выводов при разных уровнях значимости.

*Двумерное нормальное распределение* можно получить, измеряя две относительно независимые друг от друга переменные. Оно строится в трехмерном пространстве, в координатах *f* (*x, y*) и имеет колоко­лообразный вид.

Как отмечалось ранее, распределения переменных величин, полу­чаемые в эксперименте, имеют определенную степень приближения к теоретическому (нормальному) распределению. В данном случае сте­пень соответствия эмпирического распределения нормальному позво­ляет определить, насколько случайно или закономерно варьирует тот или иной показатель, подвержен ли он влиянию каких-либо системати­ческих факторов и т. д.

Существует ряд статистических критериев, позволяющих сравнить экспериментально полученное распределение с теоретическим (нор­мальным). Основными из них являются коэффициент асимметрии, пока­затель эксцесса, критерий хи-квадрат Пирсона (χ*2*) и критерий λКолмо­горова - Смирнова.

6. 1. 2. Коэффициент асимметрии

Распределение может быть приблизительно симметричным относи­тельно моды либо обладать отрицательной или положительной асим­метрией. Положительно асимметричным считается распределение с более крутым левым и более пологим правым крылом, распределение с отрицательной асимметрией, напротив, имеет более пологий левый фронт нарастания и более крутой правый (см. рис. 6.3.).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| Отрицательная асимметрия, *As* < 0 | Симметричное распределение, *As* = 0 | Положительная асимметрия, *As* > 0 |

Рис. 6.3. Типы асимметрии

Рассчитываемый по соответствующим формулам коэффициент асимметрии *(As)* может быть использован в качестве одного из крите­риев соответствия экспериментального распределения теоретическому.

*Вычисление коэффициента асимметрии:*

Коэффициент асимметрии вычисляется по следующей формуле:

 (6.2)

где *z*x – мера Пирсона .

При больших выборках (*n* > 50) можно использовать упрощенную формулу:



(6.3)

Соответствие эмпирического распределения нормальному находит­ся по соответствующим таблицам (в нашем приложении – табл. I). При этом эмпирическое распределение считается соответствующим теоретическому (нормальному), если асимметрия при данной выборке не превышает граничного значения.

Пример

Распределение значений исследуемого признака для выборки в 100 человек обнаружило коэффициент асимметрии As = 0,55.

Вопрос: соответствует ли данное распределение нормальному?

Решение: в табл. I находим, что для *n* = 100 *As*кр. = 0,39 (для β1 = 0,95) и *As*кр. = 0,57 (для β1 = 0,95).

Ответ: распределение статистически достоверно отличается от нормального с вероятностью 0,95, поскольку *As*эксп.> *As*кр. С вероят­ностью же 0,99 аналогичного вывода мы сделать не можем(*As*эксп. *<* *As*кр.).

Причины асимметрии могут быть различными. Во-первых, это воз­можное действие побочных однонаправленных факторов. Так, напри­мер, в тестах на измерение интеллекта могут преобладать сложные задания, с которыми большинство испытуемых не справляется. Это мо­жет явиться причиной положительной асимметрии (центральная тен­денция лежит слева от среднего значения). Во-вторых, это ограничение (сверху или снизу) размаха вариаций.

Например, при измерении времени сенсомоторной реакции нижний предел реагирования лимитирован физиологическими возможностями субъекта, в то время как верхний жестко не ограничен. Наконец, третьей причиной асимметрии может быть неоднородность выборки (например, если исследование проводится в смешанной группе разного возраста). При этом имеет место наложение друг на друга двух или нескольких разных по численности и сдвинутых относительно друг друга по моде распределений.

**6. 1. 3. Коэффициент эксцесса**

В отличие от коэффициента асимметрии, коэффициент (показатель) эксцесса характеризует компактность или «размытость» распределения, его островершинность или плосковершинность, что связано с разным характером группирования значений переменной вокруг среднего (рис. 6.4).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| Плосковершинное распределение, *Ex* < 0 | Нормальное  распределение, *Ex* = 0 | Островершинное  распределение, *Ex* > 0 |

Рис. 6.4. Типы эксцесса

Причинами эксцесса могут быть большая или меньшая степень тяготения переменных к центральной тенденции, неоднородность вы­борки, наложение друг на друга нескольких распределений с одинаковой модой и разной дисперсией и т. д.

*Вычисление показателя эксцесса*

 (6.4)

Теоретически величина эксцесса может варьировать от – 3 до + ∞. Критерий согласия с нормальным распределением аналогично коэффи­циенту асимметрии определяется по таблицам граничных значений. Например, для *n* = 100 и β1 = 0,95 *Ex*кр = 0,83 (см. Приложение, табл. II).

Аналогично определению асимметрии распределение соответст­вует нормальному (согласуется с нормальным), если *Ex < Ex*кр. При обратном соотношении принято говорить, что по показателю эксцесса эмпирическое распределение статистически достоверно отличается от нормального.

При анализе эмпирического распределения может возникнуть такая ситуация, когда по одному из показателей (асимметрии или эксцессу) распределение соответствует нормальному, по другому же – отличается от него. В этом случае следует использовать следующее правило: если хотя бы по одному из вышеуказанных показателей распределение достоверно отличается от нормального, то следует делать вывод о том, что экспериментальное распределение отличается от теоретического (нормального).

Кроме коэффициента асимметрии и показателя эксцесса, для сравнения экспериментального распределения с теоретическим исполь­зуют и другие критерии, в частности критерий хи-квадрат и критерий λ Колмогорова - Смирнова.

**6. 1. 4. Критерий хи-квадрат (χ2)**

Критерий хи-квадрат основан на сравнении между собой эмпиричес­ких (экспериментальных) частот исследуемого признака и теоретических частот нормального распределения. Для сравнения частот можно поль­зоваться как 8-классовым, так и 16-классовым распределениями, теоре­тические частоты которых в интервале от – 4 до + 4 стандартных отклонений даны в приложении (табл. III и IV). В случае необходимости можно вычислять хи-квадрат и по большему числу классов – для этого используют специальные таблицы нормального распределения.

Критерий χ2 рассчитывают по следующей формуле:

, (6.5)

Где *f*э и *f*т – соответственно, экспериментальные и теоретические частоты в каждом отдельном классе разбиения. Полученное значение сравнивается со стандартным (табличным). Решение о соответствии экспериментального распределения теоретическому принимается, если χ2 *<* χ2кр.при соответствующем числе степеней свободы и заданном уровне значимости. При этом необходимо иметь в виду, что в случае *нормального распределения* число степеней свободы (ν) принимается равным *N* – 3, где *N* – число классов (групп разбиения).

Рассмотрим алгоритм вычислений критерия χ2 на следующем примере.

*Условие задачи*

У 100 испытуемых определялся уровень нейротизма по тесту Айзенка. Получены следующие результаты (табл. 6.1):

Таблица 6.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Нейро-тизм | Число испытуе-мых | Нейро-тизм | Число испытуе-мых | Нейро-тизм | Число испытуе-мых | Нейро-тизм | Число испытуе-мых |
| *xi* | *fэ* | *xi* | *fэ* | *xi* | *fэ* | *xi* | *fэ* |
| 1  2  3  4  5  6 | 0  0  0  0  2  3 | 7  8  9  10  11  12 | 3  4  6  8  9  7 | 13  14  15  16  17  18 | 10  8  9  9  8  6 | 19  20  21  22  23  24 | 4  3  1  0  0  0 |

*Задание*

Определить соответствие экспериментального распределения тео­ретическому (нормальному) распределению с помощью критерия χ2 Пирсона.

*Решение*

Задача решается в три этапа:

1. Определяем среднее значение переменной и ее стандартное отклонение. Поскольку в данном случае мы имеем дело со сгруппиро­ванными частотами, то для вычисления среднего арифметического следует использовать следующую формулу (см. раздел 4):



Подставляем в формулу значения нейротизма и соответствующие ему частоты из условия задачи:



Стандартное отклонение следует определять по следующей форму­ле:



В нашем случае:



2. Нормируем полученные результаты в единицах стандартного отклонения с «шагом» в 1σ (8-классовое распределение). Для этого строим шкалу значений в единицах стандартного отклонения от –4 до + 4σ. Далее определяем границы каждого из 8 классов в абсолютных значениях исследуемого показателя (уровней нейротизма). Напомним, что точкой отсчета в данном случае является центральное значение (σх = 0), которому теоретически должны соответствовать основные меры центральной тенденции – мода, медиана и среднее арифметическое значение. Обозначим среднюю точку значением 13,2 (среднее арифме­тическое). После этого определяем границы классов в абсолютных еди­ницах (значениях нейротизма), последовательно вычитая из среднего (слева от нулевой точки) или добавляя к среднему (справа от нее) вели­чину стандартного отклонения (σх = 3,8). Наконец, подсчитываем часто­ты (число испытуемых) в каждом из классов и разносим полученные значения по классам теоретического распределения. Для большей наглядности можно представить результаты в виде следующей схемы:

– 4 σ – 3 σ – 2 σ – σ 0 σ 2 σ 3 σ 4 σ



-2,0 1,8 5,6 9,4 13,2 17,0 20,8 24,6 28,4

3. Составляем таблицу для вычисления критерия χ2 Пирсона (см. табл. 6.2). В столбце 1 обозначаем классы распределения (в единицах стандартного отклонения, в столбце 2 – подсчитанные нами экспериментальные частоты в каждом классе, в столбце 3 – теоретические частоты в процентном соотношении (см. табл. III Приложения). Столбец 4 служит для попарного сопоставления экспериментальных и теоретических частот: для этого следует использовать формулу 

Таблица 6.2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Границы класса | Частоты | |  |
|  | *fэ* | *fт* |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| – 4 σ ÷ – 3 σ  – 3 σ ÷ – 2 σ  – 2 ÷ – σ  – σ ÷ 0  0 ÷ σ  σ ÷ 2 σ  2 ÷ 3 σ  3 ÷ 4 σ | 0  2  16  34  30  17  1  0 | 0,13  2,15  13,59  34,13  34,13  13,59  2,15  0,13 | 0,13  0,01  0,43  0  0,50  0,86  0,62  0,13 |

Критерий χ2вычисляется как сумма значений в столбце 4 таблицы. Проводим соответствующие вычисления:



В табл. VI Приложения находим стандартные (критические) значения χ2*.* Напомним, что для 8-классового распределения (*N* = 8) число степеней свободы ν = *N* – 3 = 5. При этом стандартные значения χ2ст*.* для двух уровней значимости составляют, соответственно, 11,070 (β1 = 0,95) и 15,086 (β2 = 0,99).

*Вывод*

Для двух стандартных уровней значимости χ2< χ2ст., следовательно, по критерию χ2 Пирсона экспериментальное распределение статисти­чески не отличается от теоретического (нормального) распределения или, другими словами, соответствует последнему. Данный вывод можно считать справедливым для уровня значимости 0,99.

**6. 1. 5. Критерий Колмогорова – Смирнова (λ)**

Критерий Колмогорова – Смирнова основан на том же принципе, что и критерий χ2 Пирсона, но предполагает сопоставление *накопленных* частот экспериментального и теоретического распределений. Вычисля­ется как отношение максимальной разности (без учета знака) между теоретической и экспериментальной накопленной частотой к корню квадратному из численности выборки: (6.6)

Для вычисления λ также можно воспользоваться таблицами теоре­тических частот 8- и

16-классового распределения. Рассмотрим алгоритм вычислений критерия Колмогорова на примере предыдущей задачи (табл. 6.3).

Таблица 6.3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Границы класса | Экспериментальные  частоты | Накопленные частоты | | *d* |
| *F*э | *F*т |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| – 4 σ ÷ – 3 σ  – 3 σ ÷ – 2 σ  – 2 ÷ – σ  – σ ÷ 0  0 ÷ σ  σ ÷ 2 σ  2 ÷ 3 σ  3 ÷ 4 σ | 0  2  16  34  30  17  1  0 | 0  2  18  52  82  99  100  100 | 0,13  2,28  15,87  50,00  84,13  97,72  99,87  100 | 0,13  0,28  *2,13*  2,00  *2,13*  1,28  0,13  0 |

Столбцы 1 и 2 аналогичны таковым в предыдущей таблице. Стол­бец 3 соответствует экспериментальным частотам, накопленным путем суммирования частот от 1-го до 8-го класса. Теоретические накопленные частоты взяты из табл. III Приложения. Максимальная разность между экспериментальной и теоретической накопленными частотами (столбец 5) соответствует 2,13. Проводим соответствующие вычисления:



Для определения соответствия экспериментального распределения теоретическому по критерию Колмогорова можно воспользоваться следующим правилом. Если λ < 0,52, делается вывод о соответствии распределений для уровня значимости 0,95. При *λ* > 1,36 распределение достоверно отличается от нормального. При значениях же λ от 0,52 до 1,36 (интервал неопределенности) можно определить вероятность соответствия экспериментального распределения теоретическому по табл. VII Приложения.

***Вывод***

Полученное значение λ = 0,21 < 0,52, следовательно, по критерию Колмогорова экспериментальное распределение соответствует нор­мальному с вероятностью 0,95.

Для определения соответствия эмпирического распределения теоретическому (нормальному) распределению можно воспользоваться и другим способом, который зачастую дает более точные результаты, поскольку не ограничен числом классов. Этот способ будет рассмотрен на примере той же задачи.

Порядок вычислений приводится в табл. 6.4.

1. В столбце 1 таблицы фиксируем значения *xi* (уровень нейротиз­ма).
2. Переводим значения *xi* в меру *z* Пирсона по формуле: 
3. Ориентируясь на условие задачи, вносим экспериментальные частоты в столбец 3.
4. По значениям столбца 3 вычисляем накопленные эксперимен­тальные частоты и фиксируем их в столбце 4.
5. По значениям *z* Пирсона определяем теоретические накопленные частоты, для чего используем табл. V Приложений.
6. Вычисляем критерий *d*, сравнивая между собой эксперименталь­ные (столбец 4) и теоретические частоты по формуле: *d* = │*F*эксп. – *F*теор.│.
7. Вычисляем критерий λ Колмогорова по стандартной формуле.

*Ответ*

λ = 7,57:10 = 0,76 (столбец 6 таблицы), что соответствует интервалу неопределенности 0,52 ÷ 1,36.

С целью устранения случайных факторов используем процедуру интервальной нормализации  (столбец 7) и повторно вычисляем критерий λ:

λ\* = 4,64 : 10 = 0,46 (столбец 8 таблицы).

*Общий ответ*

Эмпирическое распределение соответствует теоретическому (нормальному) распределению.

Таблица 6.4

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x*i | *Z* | *f*э | *F*э | *F*т | *d* | *F*э*\** | *d\** |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24 | -3,2  -2,9  -2,7  -2,4  -2,2  -1,9  -1,6  -1,4  -1,1  -0,8  -0,6  -0,3  0  0,2  0,5  0,7  1,0  1,3  1,5  1,8  2,1  2,3  2,5  2,8 | 0  0  0  0  2  3  3  4  6  8  9  7  10  8  9  9  8  6  4  3  1  0  0  0 | 0  0  0  0  2  5  8  12  18  26  35  42  52  60  69  78  86  92  96  99  100  100  100  100 | 0,07  0,18  0,34  0,82  1,40  2,88  5,49  8,08  13,57  21,19  27,43  38,21  50,00  57,92  69,14  75,80  84,13  90,31  93,31  96,40  98,21  98,92  99,37  99,75 | 0,07  0,18  0,34  0,82  0,60  2,12  2,51  3,92  4,43  4,81  *7,57*  3,79  2,00  2,08  0,14  2,20  1,87  1,69  2,69  2,60  1,79  1,08  0,63  0,25 | 0  0  0  0  1  3,5  6,5  10  15  22  30,5  38,5  47  56  64,5  73,5  82  89  94  97,5  99,5  100  100  100 | 0,07  0,18  0,34  0,82  0,40  0,62  1,01  1,92  1,43  0,81  3,07  0,29  3,00  1,92  *4,64*  2,30  2,13  1,31  0,69  1,10  1,29  1,08  1,63  0,25 |

## 6. 2. Равномерное распределение

В ряде случаев психологу приходится иметь дело с *равномерным распределением*, когда варьирующая величина (переменная) приблизи­тельно с равной вероятностью принимает любое значение в определен­ном фиксированном диапазоне от *x*min до *x*max . Пример такого распре­деления приводится на рис. 6.5.



Рис. 6.5. Графическое выражение теоретического

равномерного распределения (пояснения в тексте)

Примером равномерного распределения может служить распреде­ление испытуемых по квантилям, поскольку в каждом интервале кван­тильной шкалы частоты встречаемости признака одинаковы.

Работа с равномерным распределением достаточно проста. Учи­тывая, что общая площадь распределения соответствует *Р* = 1, вероятность события в интересующем нас диапазоне *x*1 ÷ *x*2 равна отно­шению ширины этого диапазона (размаха вариаций) *x*2− *x*1 к общему (*x*max÷ *x*min). Для сравнения экспериментального распределения с теоре­тическим можно использовать критерий хи-квадрат, а при достаточном количестве эмпирических частот и критерий Колмогорова. Рассмотрим использование этих критериев на двух примерах.

**Пример 1**

Можно априорно предположить, что число людей, обладающих одним из четырех основных типов темперамента (холерики, сангвиники, флегматики и меланхолики) приблизительно одинаково. Для проверки этой гипотезы проведено тестирование по тесту-опроснику Айзенка 100 взрослых испытуемых. Тип темперамента определялся у них по соотношению показателей экстраверсии и нейротизма.

Было получено следующее распределение испытуемых по типам темперамента: холерики – 22 человека, сангвиники – 36, флегматики – 13 и меланхолики – 29 человек.

Задача состоит в том, чтобы либо принять, либо отвергнуть изначальную гипотезу (нуль-гипотезу) о равномерности распределения людей по типам темперамента.

Для решения задачи можно составить таблицу, аналогичную той, которая использовалась для оценки согласия эмпирического распределения с нормальным по критерию хи-квадрат (см. табл. 6.5).

Таблица 6.5

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тип темперамента | Частота | | (*f*эксп*− f*теор)2  *f*теор |
| *f*эксп | *f*теор |
| **Холерики**  (экстраверты с высоким уровнем нейротизма)  **Cангвиники**  (эмоционально стабильные экстраверты)  **Флегматики**  (эмоционально стабильные интроверты)  **Меланхолики**  (интроверты с высоким уровнем нейротизма) | 22  36  13  29 | 25  25  25  25 | 0,36  4,84  5,76  0,64 |

В данном случае следует пояснить, что теоретические частоты рассчитываются, исходя из гипотезы о том, что распределение по типам темперамента является идеально равномерным.

Вычисление показателя χ2 (сумма значений в последнем столбце таблицы) дает величину 11,6. При сравнении полученного значения со стандартным (табл. VI Приложений) следует иметь в виду, что для равномерного распределения число степеней свободы вычисляется как число групп (классов) разбиения минус единица: в нашем случае ν *= N –* 1 = 3.

Полученное нами значение (χ2 = 11,6) больше стандартных (крити­ческих) значений как для 1-го (χ2ст= 7,815), так и для 2-го уровня значи­мости (χ2ст= 11,345). Отсюда следует, что принять гипотезу о равномер­ности распределения людей по типам темперамента мы не можем. Другими словами, распределение статистически достоверно отличается от равномерного.

**Пример 2**

*Условие задачи*

В выборке здоровых лиц мужского пола, студентов технических вузов в возрасте от 19 до 22 лет проводился тест М. Люшера в 8-цветном варианте. Установлено, что желтый цвет предпочитается испытуемыми чаще, чем отвергается (см. табл. 6.6).

Таблица 6.6

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Разряды | Позиции желтого цвета | | | | | | | | Сумма |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Эмпирические частоты | 24 | 15 | 13 | 8 | 15 | 10 | 9 | 8 | 102 |

*Вопрос*

Можно ли утверждать, что распределение желтого цвета по восьми позициям у здоровых испытуемых отличается от равномерного распределения?

***Решение***

Для определения соответствия эмпирического распределения теоретическому (равномерному) можно использовать критерий Колмогорова. Для этого вносим экспериментальные данные в таблицу (табл. 6.7) и проводим стандартные вычисления.

Таблица 6.7

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Позиции желтого цвета | Частоты | | Накопленные частоты | | *d* |
| *f*эксп | *f*теор | *F*эксп*.* | *F*теор*.* |
| 1  2  3  4  5  6  7  8 | 24  15  13  8  15  10  9  8 | 12,75  12,75  12,75  12,75  12,75  12,75  12,75  12,75 | 24  39  52  60  75  85  94  102 | 12,75  25,50  38,25  51,00  63,75  76,50  89,25  102 | 11,25  13,50  ***13,75***  9,00  11,25  8,50  4,75  0 |

Отсюда: 

***Вывод***

Экспериментальное распределение не соответствует теоретическо­му (равномерному) распределению.

## 6. 3. Биномиальное распределение

В отличие от нормального и равномерного распределений, описы­вающих поведение переменной в исследуемой выборке испытуемых, биномиальное распределение используется для иных целей. Оно слу­жит для прогнозирования вероятности двух взаимоисключающих собы­тий в некотором числе независимых друг от друга испытаний.

Классический пример биномиального распределения – подбрасыва­ние монеты, которая падает на твердую поверхность. Равновероятны два исхода (события): 1) монета падает «орлом» (вероятность равна *р*) или 2) монета падает «решкой» (вероятность равна *q*). Если третьего исхода не дано, то *p* = *q* = 0,5 и *p* + *q* = 1. Используя формулу бино­миального распределения, можно определить, например, какова вероят­ность того, что в 50 испытаниях (число подбрасываний монеты) послед­няя выпадет «орлом», предположим, 25 раз.

Для дальнейших рассуждений введем общепринятые обозначения:

*n* – общее число наблюдений;

*i* – число интересующих нас событий (исходов);

*n* – *i* – число альтернативных событий;

*p* – эмпирически определенная (иногда – предполагаемая) вероятность интересующего нас события;

*q* – вероятность альтернативного события;

*P*n(*i*) – прогнозируемая вероятность интересующего нас события *i* по определенному числу наблюдений *n*.

Формула биномиального распределения:

 (6.7)

В случае равновероятного исхода событий (*p = q*) можно использовать упрощенную формулу:

 (6.8)

Рассмотрим три примера, иллюстрирующие использование формул биномиального распределения в психологических исследованиях.

**Пример 1**

Предположим, что 3 студента решают задачу повышенной сложно­сти. Для каждого из них равновероятны 2 исхода: (+) – решение и (−) – нерешение задачи. Всего возможно 8 разных исходов (2 3 = 8).

Вероятность того, что ни один студент не справится с задачей, равна 1/8 (вариант 8); 1 студент справится с задачей: *P* = 3/8 (варианты 4, 6, 7); 2 студента – *P* = 3/8 (варианты 2, 3, 5) и 3 студента – *P* =1/8 (вариант 1).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Студент | Варианты исходов | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| A | + | + | + | + | − | − | − | − |
| B | + | + | – | – | + | + | − | − |
| C | + | − | + | − | + | − | + | − |

**Пример 2**

Предположим, 5 студентов выполняют интеллектуальный тест по­вышенной сложности. Правильное выполнение теста «+», неправильное «−». Каждый студент может иметь 2 возможных исхода (+ или −), причем вероятность каждого из этих исходов равна 0,5.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Студенты | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Возможные  исходы | +  − | +  − | +  − | +  − | +  − |

Необходимо определить вероятность того, что трое из 5 студентов успешно справятся с данной задачей.

***Решение***

Всего возможных исходов: 25 = 32.

Общее число вариантов 3(+) и 2(−) составляет



Следовательно, вероятность ожидаемого исхода равна 10/32 ≈ 0,31.

**Пример 3**

Считается, что число экстравертов и интровертов в однородной группе испытуемых является приблизительно одинаковым.

*Задание*

Определить вероятность того, что в группе из 10 случайных испытуемых обнаружится 5 экстравертов.

***Решение***

1. Вводим обозначения: *p = q =* 0,5; *n* = 10; *i = 5; P10(5) =* ?
2. Используем упрощенную формулу (см. выше):



***Вывод***

Вероятность того, что среди 10 случайных испытуемых обнаружится 5 экстравертов, составляет 0,246.

## 6. 4. Распределение Пуассона

Распределение Пуассона является частным случаем биномиаль­ного распределения, используемым при очень низкой вероятности инте­ресующих нас событий. Другими словами, это распределение описывает вероятность редких событий. Формулой Пуассона можно пользоваться при *p* < 0,01 и *q* ≥ 0,99.

Уравнение Пуассона является приближенным и описывается следующей формулой:

 (6.9)

где μ представляет собой произведение средней вероятности события и числа наблюдений.

В качестве примера рассмотрим алгоритм решения следующей задачи.

***Условие задачи***

За несколько лет в 21 крупной клинике России было проведено мас­совое обследование новорожденных на предмет заболевания младен­цев болезнью Дауна (выборка в среднем составляла 1000 новорож­денных в каждой клинике). Были получены следующие данные:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Число клиник | 11 | 6 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| Число заболеваний | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

***Задание***

1. Определить среднюю вероятность заболевания (в пересчете на число новорожденных).
2. Определить, на какое число новорожденных в среднем прихо­дится одно заболевание.
3. Определить вероятность того, что среди 100 случайно выбранных новорожденных обнаружится 2 младенца с болезнью Дауна.

***Решение***

1. Определяем среднюю вероятность заболевания. При этом мы должны руководствоваться следующими рассуждениями. Болезнь Дауна зарегистрирована лишь в 10 клиниках из 21. В 11 клиниках заболеваний не обнаружено, в 6 клиниках зарегистрировано по 1 случаю, в 2 клиниках – 2 случая, в 1-й клинике – 3 и в 1-й клинике – 4 случая болезни. 5 случаев заболевания не было обнаружено ни в одной клинике. Для того чтобы определить среднюю вероятность заболевания, необходимо общее число случаев (6·1 + 2·2 + 1·3 + 1·4 = 17) разделить на общее число новорожденных (21000):



1. Число новорожденных, на которое приходится одно заболевание, является величиной обратной средней вероятности, т. е. равно общему числу новорожденных, отнесенному к числу зарегистрированных случаев:



1. Подставляем значения *p* = 0,00081, *n* = 100 и *i* = 2 в формулу Пуассона:



***Ответ***

Вероятность того, что среди 100 случайно выбранных новорож­денных обнаружится 2 младенца с болезнью Дауна, составляет 0,003 (0,3%).

## Задача 6. 1

***Задание***

Пользуясь данными задачи 5.1 по времени сенсомоторной реакции, вычислить асимметрию и эксцесс распределения ВР.

## Задача 6. 2

200 учащихся выпускных классов были протестированы на уровень интеллектуальности (*IQ*). После нормирования полученного распреде­ления *IQ* по стандартному отклонению были получены следующие результаты:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Классовый интервал | Частоты *IQ* | Классовый интервал | Частоты *IQ* |
| – 4,0 ÷ – 3,5 σ | 0 | 0 ÷ 0,5 σ | 31 |
| – 3,5 ÷ – 3,0 σ | 2 | 0,5 ÷ 1,0 σ | 14 |
| – 3,0 ÷ – 2,5 σ | 6 | 1,0 ÷ 1,5 σ | 4 |
| – 2,5 ÷ – 2,0 σ | 12 | 1,5 ÷ 2,0 σ | 2 |
| – 2,0 ÷ – 1,5 σ | 18 | 2,0 ÷ 2,5 σ | 1 |
| – 1,5 ÷ – 1,0 σ | 28 | 2,5 ÷ 3,0 σ | 1 |
| – 1,0 ÷ – 0,5 σ | 39 | 3,0 ÷ 3,5 σ | 0 |
| – 0,5 σ ÷ 0 | 42 | 3,5 ÷ 4,0 σ | 0 |

***Задание***

Пользуясь критериями Колмогорова и хи-квадрат, определить, соответствует ли полученное распределение показателей *IQ* нормальному.

## Задача 6. 3

У взрослого испытуемого (мужчина 25 лет) исследовалось время простой сенсомоторной реакции (ВР) в ответ на звуковой стимул с постоянной частотой в 1 кГц и интенсивностью 40 дБ. Стимул предъявлялся стократно с интервалами 3 – 5 секунд. Отдельные значения ВР по 100 повторностям распределилось следующим образом:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Время реакции, мс | 100÷110 | 110÷120 | 120÷130 | 130÷140 | 140÷150 | 150÷160 | 160÷170 | 170÷180 |
| Число испытуе­мых | 9 | 15 | 28 | 30 | 8 | 5 | 3 | 2 |

***Задание***

1. Построить частотную гистограмму распределения ВР; определить среднее значение ВР и величину стандартного отклонения.

2. Рассчитать коэффициент асимметрии и показатель эксцесса распределения ВР; на основании полученных значений *As* и *Ex* сделать вывод о соответствии или несоответствии данного распределения нормальному.

ГЛАВА 7

## МЕРЫ РАЗЛИЧИЙ

## 7. 1. Постановка проблемы

Предположим, что имеются две независимые друг от друга выборки испытуемых *х* и *у*. *Независимыми* выборки считаются тогда, когда один и тот же субъект (испытуемый) фигурирует только в одной выборке. Зада­ча состоит в том, чтобы сравнить между собой эти выборки (два ряда переменных) на предмет их различий.

Естественно, что как бы ни были близки между собой значения переменных в первой и второй выборке, какие-то, пусть даже незначи­тельные, различия между ними будут обнаруживаться. С точки же зрения математической статистики нас интересует вопрос, являются ли различия между этими выборками статистически достоверными (ста­тистически значимыми) или недостоверными (случайными).

Наиболее распространенными критериями достоверности различий между выборками являются параметрические меры различий – *крите­рий Стьюдента* и *критерий Фишера*. В ряде случаев используются непараметрические критерии – *критерий Q Розенбаума, U-критерий Манна- Уитни* и др. Особое место занимает *угловое преобразование Фишера φ\**, позволяющие сравнивать друг с другом значения, выражен­ные в процентах (процентных долях). И, наконец, как частный случай, для сравнения выборок могут быть использованы критерии, характе-ризующие форму распределений выборок – *критерий χ2 Пирсона* и *критерий λ Колмогорова* *– Смирнова*.

В целях наилучшего усвоения данной темы мы поступим следую­щим образом. Одну и ту же задачу мы решим четырьмя методами с использованием четырех различных критериев – Розенбаума, Манна-Уитни, Стьюдента и Фишера.

*Условие задачи*

30 студентов (14 юношей и 16 девушек) во время экзаменационной сессии протестированы по тесту Спилбергера на уровень реактивной тревожности. Получены следующие результаты (табл. 7.1):

Таблица 7.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Испытуемые | Уровень реактивной тревожности | | | | | | | | | | | | | | | |
| Юноши | 32 | 34 | 28 | 43 | 35 | 26 | 41 | 32 | 40 | 39 | 42 | 38 | 44 | 33 |  |  |
| Девушки | 34 | 30 | 37 | 43 | 42 | 44 | 46 | 36 | 45 | 28 | 34 | 41 | 40 | 35 | 42 | 39 |

*Задание*

Определить, являются ли статистически достоверными различия уровня реактивной тревожности у юношей и девушек.

Задача представляется вполне типичной для психолога, специали­зирующегося в области педагогической психологии: кто более остро пе­реживает экзаменационный стресс – юноши или девушки?

Если различия между выборками статистически достоверны, то существуют значимые половые различия в данном аспекте; если различия случайны (статистически недостоверны), от данного предположения следует отказаться.

## 7. 2. Непараметрический критерий *Q* Розенбаума

*Q*-критерий Розенбаума основан на сравнении «наложенных» друг на друга ранжированных рядов значений двух независимых перемен­ных. При этом не анализируется характер распределения признака внутри каждого ряда – в данном случае имеет значение лишь ширина неперекрывающихся участков двух ранжированных рядов. При сравне­нии между собой двух ранжированных рядов переменных возможны 3 варианта:

* + - 1. Ранжированные ряды *x* и *y* не имеют области перекрытия, т. е. все значения первого ранжированного ряда (*x*) больше всех значений второго ранжированного ряда(*y*):



В данном случае различия между выборками, определяемые по любому статистическому критерию, безусловно достоверны, и использование критерия Розенбаума не требуется. Тем не менее на практике такой вариант встречается исключительно редко.

* + - 1. Ранжированные ряды полностью накладываются друг на друга (как правило, один из рядов находится внутри другого), неперекры­вающиеся зоны отсутствуют. В данном случае критерий Розенбаума неприменим.



3. Имеется зона перекрытия рядов, а также две неперекрывающиеся области (*N1* и *N2*), относящиеся к *разным* ранжированным рядам (обозначим *х* – ряд, сдвинутый в сторону больших, *y* – в сторону меньших значений):



Данный случай является типичным для использования критерия Розенбаума, при использовании которого следует соблюдать сле­дующие условия:

1. Объем каждой выборки должен быть не менее 11.
2. Объемы выборок не должны существенно отличаться друг от друга.

Критерий *Q* Розенбаума соответствует числу неперекрывающихся значений: *Q* = *N*1 + *N*2*.* Вывод о достоверности различий между выборками делается в случае, если *Q > Q*кр*.* При этом значения *Q*кр находятся в специальных таблицах (см. Приложение, табл. VIII).

Введем обозначения: *х* – выборка девушек, *y* – выборка юношей. Для каждой выборки строим ранжированный ряд:

*х*: 28 30 34 34 35 36 37 39 40 41 42 42 43 44 45 46

*y*: 26 28 32 32 33 34 35 38 39 40 41 42 43 44

Подсчитывается число значений в неперекрывающихся областях ранжированных рядов. В ряду *х* неперекрывающимися являются зна­чения 45 и 46, т. е. *N*1 = 2;в ряду *y* только 1 неперекрывающееся значение 26, т. е. *N*2 = 1. Отсюда, *Q* = *N*1 + *N*2 = 1 + 2 = 3.

В табл. VIII Приложения определяется, что *Q*кр*.*= 7 (для уровня значимости 0,95) и *Q*кр= 9 (для уровня значимости 0,99).

***Вывод***

Поскольку *Q* < *Q*кр, то по критерию Розенбаума различия между вы­борками не являются статистически достоверными.

**Примечание**

Критерий Розенбаума может использоваться независимо от харак­тера распределения переменных, т. е. в данном случае отпадает необ­ходимость использования критериев χ2 Пирсона и λ Колмогорова для определения типа распределений в обеих выборках.

## 7. 3. *U*-критерий Манна – Уитни

В отличие от критерия Розенбаума, *U*-критерий Манна – Уитни основан на определении зоны перекрытия между двумя ранжированны­ми рядами, т. е. чем меньше зона перекрытия, тем достовернее разли­чия между выборками. Для этого используется специальная процедура преобразования интервальных шкал в ранговые.

Рассмотрим алгоритм вычислений по *U*-критерию на примере предыдущей задачи.

Для более экономичной работы рекомендуется построение рабочей таблицы следующего вида (табл. 7.2).

Таблица 7.2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x, y* | *R*xy | *R*xy*\** | *R*x | *R*y |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *26*  28  *28*  30  *32*  *32*  *33*  34  34  *34*  35  *35*  36  37  *38*  39  *39*  40  *40*  41  *41*  42  42  *42*  43  *43*  *44*  44  45  46 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24  25  26  27  28  29  30 | 1  2,5  2,5  4  5,5  5,5  7  9  9  9  11,5  11,5  13  14  15  16,5  16,5  18,5  18,5  20,5  20,5  23  23  23  25,5  25,5  27,5  27,5  29  30 | 2,5  4  9  9  11,5  13  14  16,5  18,5  20,5  23  23  25,5  27,5  29  30 | *1*  *2,5*  *5,5*  *5,5*  *7*  *9*  *11,5*  *15*  *16,5*  *18,5*  *20,5*  *23*  *25,5*  *27,5* |
|  |  | Σ | 276,5 | 188,5 |

Рекомендуется следующий порядок заполнения таблицы и соот­ветствующих вычислений:

1. Из двух независимых выборок строим единый ранжированный ряд. В данном случае значения для обеих выборок идут «вперемешку», столбец 1 (*x*, *y*). В целях упрощения дальнейшей работы (в том чис­ле и в компьютерном варианте) следует значения для разных выбо­рок отмечать разным шрифтом (или разным цветом) с учетом того, что в дальнейшем мы будем их разносить по разным столбцам.
2. Преобразуем интервальную шкалу значений в порядковую (для этого переобозначаем все значения ранговыми числами от 1 до 30, столбец 2 (*R*xy)).
3. Вводим поправки на связанные ранги (одинаковые значения переменной обозначаются одним и тем же рангом при условии, что сумма рангов не изменяется, столбец 3 (*R*xy\*). На этом этапе рекомендуется подсчитать суммы рангов во 2-м и 3-м столбце (если все поправки введены верно, то эти суммы должны быть равны).
4. Разносим ранговые числа в соответствии с их принадлежностью к той или иной выборке (столбцы 4 и 5 (*R*x и *R*y)).
5. Проводим вычисления по формуле:

 (7.1)

где *Т*х – наибольшая из ранговых сумм**;** *n*x и *n*y, соответственно, объемы выборок. В данном случае следует иметь в виду, что если *T*x < *T*y, то обозначения *x* и *y* следует сменить на обратные.

1. Сравниваем полученное значение с табличным (см. Приложения, табл. IX).Вывод о достоверности различий между двумя выборками делается в случае, если *U*эксп. < *U*кр..

В примере  *U*эксп. = 83,5 > *Uкр.* = 71.

*Вывод*

Различия между двумя выборками по критерию Манна – Уитни не являются статистически достоверными.

**7. 4. Критерий Стьюдента**

В отличие от критериев Розенбаума и Манна-Уитни критерий *t* Стьюдента является параметрическим, т. е. основан на определении основных статистических показателей – средних значений в каждой выборке (и ) и их дисперсий (σ2x и σ2y), рассчитываемых по стандартным формулам (см. раздел 5).

Использование критерия Стьюдента предполагает соблюдение следующих условий:

1. Распределения значений для обеих выборок должны соответст­вовать закону нормального распределения (см. раздел 6).
2. Суммарный объем выборок должен быть не менее 30 (для β1 = 0,95) и не менее 100 (для β2 = 0,99).
3. Объемы двух выборок не должны существенно отличаться друг от друга (не более чем в 1,5 ÷ 2 раза).

Идея критерия Стьюдента достаточно проста. Предположим, что значения переменных в каждой из выборок распределяются по нормаль­ному закону, т. е. мы имеем дело с двумя нормальными распределе­ниями, отличающимися друг от друга по средним значениям и диспер­сии (соответственно  и ,  и , см. рис. 7.1).



σ*x*   σ*y*

Рис. 7.1. Оценка различий между двумя независимыми выборками:

и − средние значения выборок *x* и *y*; σxи σy− стандартные отклонения

Видно, что различия между двумя выборками будут тем больше, чем больше разность между средними значениями и чем меньше их дисперсии (или стандартные отклонения).

В случае независимых выборок коэффициент Стьюдента опреде­ляют по формуле:

 (7.2)

где *n*x и *n*y – соответственно численность выборок *x* и *y*.

После вычисления коэффициента Стьюдента в таблице стандартных (критических) значений *t* (см. Приложение, табл. Х) находят величину, соответствующую числу степеней свободы *ν = n*x + *n*y– 2, и сравнивают ее с рассчитанной по формуле. Если *t*эксп. ≤ *t*кр., то гипотезу о достоверности различий между выборками отвергают, если же *t*эксп. > *t*кр., то ее принимают.

Другими словами, выборки достоверно отличаются друг от друга, если вычисленный по формуле коэффициент Стьюдента больше табличного значения для соответствующего уровня значимости.

В рассмотренной нами ранее задаче вычисление средних значений и дисперсий дает следующие значения: *x*ср. = 38,5; σх2 = 28,40; *у*ср. = 36,2; σу2 = 31,72.

Можно видеть, что среднее значение тревожности в группе девушек выше, чем в группе юношей. Тем не менее эти различия настолько незначительны, что вряд ли они являются статистически значимыми. Разброс значений у юношей, напротив, несколько выше, чем у девушек, но различия между дисперсиями также невелики.

Подставляем значения в формулу: 

*Вывод*

*t*эксп. = 1,14 < *t*кр. = 2,05 (β1 = 0,95). Различия между двумя сравни­ваемыми выборками не являются статистически достоверными. Данный вывод вполне согласуется с таковым, полученным при использовании критериев Розенбаума и Манна-Уитни.

Другой способ определения различий между двумя выборками по критерию Стьюдента состоит в вычислении доверительного интервала стандартных отклонений. Доверительным интервалом называется среднеквадратичное (стандартное) отклонение, деленное на корень квадратный из объема выборки и умноженное на стандартное значение коэффициента Стьюдента для *n* – 1 степеней свободы (соответственно,  и ).

Примечание

Величина = *mx* называется среднеквадратичной ошибкой (см. раздел 5). Следовательно, доверительный интервал есть среднеквадра­тичная ошибка, умноженная на коэффициент Стьюдента для данного объема выборки, где число степеней свободы ν = *n* – 1, и заданного уровня значимости.

Две независимые друг от друга выборки считаются достоверно различающимися, если доверительные интервалы для этих выборок не перекрываются друг с другом. В нашем случае мы имеем для первой выборки 38,5 ± 2,84, для второй 36,2 ± 3,38.

Следовательно, случайные вариации *xi* лежат в диапазоне 35,66 ÷ 41,34, а вариации *yi* – в диапазоне 32,82 ÷ 39,58. На основании этого можно констатировать, что различия между выборками *x* и *y* статисти­чески недостоверны (диапазоны вариаций перекрываются друг с дру­гом). При этом следует иметь в виду, что ширина зоны перекрытия в данном случае не имеет значения (важен лишь сам факт перекрытия доверительных интервалов).

Метод Стьюдента для зависимых друг от друга выборок (например, для сравнения результатов, полученных при повторном тестировании на одной и той же выборке испытуемых) используют достаточно редко, поскольку для этих целей существуют другие, более информативные статистические приемы (см. раздел 10). Тем не менее, для данной цели в первом приближении можно использовать формулу Стьюдента следующего вида:

 (7.3)

Полученный результат сравнивают с табличным значением для *n* – 1 степеней свободы, где *n* – число пар значений *x* и *y*. Результаты сравнения интерпретируются точно так же, как и в случае вычисления различий между двумя независимыми выборками.

## 7.5. Критерий Фишера

Критерий Фишера (*F*) основан на том же принципе, что и критерий Стьюдента, т. е. предполагает вычисление средних значений и диспер­сий в сравниваемых выборках. Чаще всего используется при сравнении между собой неравноценных по объему (разных по численности) выбо­рок. Критерий Фишера является несколько более жестким, чем критерий Стьюдента, а потому более предпочтителен в тех случаях, когда возни­кают сомнения в достоверности различий (например, если по критерию Стьюдента различия достоверны при нулевом и недостоверны при первом уровне значимости).

Формула Фишера выглядит следующим образом:

 (7.4)

где  и  (7.5, 7.6)

В рассматриваемой нами задаче *d2* = 5,29; σz2 = 29,94.

Подставляем значения в формулу: 

В табл. ХI Приложений находим, что для уровня значимости β1 = 0,95 и ν = *n*x + *n*y – 2 = 28 критическое значение составляет 4,20.

*Вывод*

*F* = 1,32 < *Fкр.* = 4,20. Различия между выборками статистически недостоверны.

## 7. 6. Критерий ϕ\* − угловое преобразование Фишера

Критерий ϕ\*Фишера предназначен для сопоставления двух выбо­рок по частоте встречаемости интересующего исследователя эффекта. Он оценивает достоверность различий между процентными долями двух выборок, в которых зарегистрирован интересующий нас эффект. До­пускается также сравнение процентных соотношений и в пределах одной выборки.

Суть углового преобразования Фишера состоит в переводе процент­ных долей в величины центрального угла, который измеряется в радиа­нах. Большей процентной доле будет соответствовать больший угол *ϕ*, а меньшей доле – меньший угол, но отношения здесь нелинейные:

(7.7)



где *Р* – процентная доля, выраженная в долях единицы.

При увеличении расхождения между углами ϕ1 и ϕ2 и увеличении численности выборок значение критерия возрастает.

Критерий Фишера вычисляется по следующей формуле:



(7.8)

где ϕ1 – угол, соответствующий большей процентной доле; ϕ2 – угол, соответствующий меньшей процентной доле; *n*1 и *n*2 – соответственно, объем первой и второй выборок.

Вычисленное по формуле значение сравнивается со стандартным (ϕ\*ст = 1,64 для β1 = 0,95 и ϕ\*ст =2,31 для β2 = 0,99. Различия между двумя выборками считаются статистически достоверными, если ϕ\*> ϕ\*стдля данного уровня значимости.

Пример

Различаются ли между собой две группы студентов по успешности выполнения достаточно сложной задачи. В первой группе из 20 человек с ней справилось 12 студентов, во второй – 10 человек из 25.

*Решение*

1. Вводим обозначения: *n*1 = 20, *n*2 = 25.

2. Вычисляем процентные доли *Р*1 и *Р*2: *Р*1 = 12 / 20 = 0,6 (60%), *Р*2 = 10 / 25 = 0,4 (40%).

3. В табл. XII Приложений находим соответствующие процентным долям значения φ: ϕ1 = 1,772, ϕ2 = 1,369.

Отсюда:



*Вывод*

Различия между группами не являются статистически достоверны­ми, поскольку ϕ\* < ϕ\*стдля 1-го и тем более для 2-го уровня значимости.

## 7.7. Использование критерия χ2 Пирсона и критерия λ Колмогорова

## для оценки различий между двумя выборками

Использование критерия χ2 для оценки соответствия эксперимен­тальных распределений теоретическим (нормальному или равномерно­му) подробно обсуждалось в разделе 6. Тот же критерий может исполь­зоваться и для сравнения двух эмпирических распределений на предмет достоверности различий между ними.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу:

*Условие задачи*

В опытах с участием 100 испытуемых (50 мужчин и 50 женщин) реги­стрировалось время простой сенсомоторной реакции (ВСМР) в ответ на звуковой стимул. Получены следующие результаты (табл. 7.3):

Таблица 7.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ВСМР в секундах | | | | | | | |
| Классовый  Интервал | 0,10  ÷ 0,12 | 0,12  ÷ 0,14 | 0,14  ÷ 0,16 | 0,16  ÷ 0,18 | 0,18  ÷0,20 | 0,20  ÷0,22 | 0,22  ÷0,24 |
| Частоты встречаемости ВСМР | | | | | | | |
| Мужчины | 2 | 15 | 26 | 5 | 2 | 0 | 0 |
| Женщины | 0 | 12 | 20 | 8 | 7 | 2 | 1 |

*Задание*

Пользуясь критериемχ2 Пирсона, определить, достоверны ли раз­личия распределений ВСМР у мужчин и женщин.

*Решение*

1. Строим рабочую таблицу для предварительных расчетов (табл. 7.4):

Таблица 7.4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Обозна-чение интер-вала | Классовый интервал  в секундах | Эмпириче­ские частоты  (мужчины) | Эмпириче­ские  частоты  (женщины) | Сумма  эмпиричес­ких частот | Теорети­ческие частоты |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| *A*  *В*  *C*  *D*  *E*  *F*  *G* | 0,10 ÷ 0,12  0,12 ÷ 0,14  0,14 ÷ 0,16  0,16 ÷ 0,18  0,18 ÷ 0,20  0,20 ÷ 0,22  0,22 ÷ 0,24 | 2  15  26  5  2  0  0 | 0  12  20  8  7  2  1 | 2  27  46  13  9  2  1 | 1  13,5  23  6,5  4,5  1  0,5 |
| Сумма |  | 50 | 50 | 100 |  |

Столбец 1 служит исключительно для экономии: в дальнейшем не будут указываться границы классовых интервалов – достаточно того, что распределение включает в себя 7 количественных градаций (классов). В столбцах 2, 3 и 4 отражены данные из условия задачи. Столбец 5 служит для дальнейших вычислений.

Теоретические частоты (столбец 6) в данном случае вычисляются следующим образом:

1) в случае равноценных выборок теоретическая частота в каждом классе вычисляется как среднее арифметическое двух эмпирических частот;

2) если объемы выборок различны, то теоретическая частота вы­числяется как сумма эмпирических частот в данной строке, умноженная на сумму в каждом столбце (по вертикали) и отнесенная к общей сумме частот.

Для дальнейших вычислений вносим данные в табл. 7.5:

Таблица 7.5

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Мужчины | | | Женщины | | |
| Интервал | *f*эксп | *.f*теор. |  | *f*эксп | *.f*теор. |  |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| *A*  *В*  *C*  *D*  *E*  *F*  *G* | 2  15  26  5  2  0  0 | 1  13,5  23  6,5  4,5  1  0,5 | 1,00  0,17  0,39  0,35  1,39  1,00  0,50 | 0  12  20  8  7  2  1 | 1  13,5  23  6,5  4,5  1  0,5 | 1,00  0,17  0,39  0,35  1,39  1,00  0,50 |

Можно видеть, что это – типичная таблица для вычисления критерия χ2 (см. раздел 6). Значения в столбцах 3 и 6 для мужчин и женщин одинаковы; это естественно, так как теоретические частоты соответствуют средним значениям экспериментальных частот в каждой выборке. Тем не менее χ2 следует рассчитывать, суммируя все значения в столбцах 4 и 6 (т. е. по обеим выборкам).

В итоге получаем χ2 = 9,6. В табл. VI Приложений для уровня значимости 0,95 и ν = *N* – 1 = 6 находим значение χ2кр.,равное12,6.

*Вывод*

Различия между распределениями не являются статистически достоверными.

Для решения задачи можно использовать критерий Колмогорова в несколько иной модификации, нежели при сравнении эксперименталь­ного распределения с теоретическим. Для этого оформляем рабочую таблицу следующего вида (табл. 7.6):

Таблица 7.6

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Эксперимен­тальные  частоты | | Накопленные экспериментальные частоты | | Относительные накопленные частоты | | *d* |
| Интервал | *f*м | *f*ж | *F*м | *F*ж | *F*\*м | *F*\*ж |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| *A*  *В*  *C*  *D*  *E*  *F*  *G* | 2  15  26  5  2  0  0 | 0  12  20  8  7  2  1 | 2  17  43  48  50  50  50 | 0  12  32  40  47  49  50 | 0,04  0,34  0,86  0,96  1,00  1,00  1,00 | 0  0,24  0,64  0,80  0,94  0,98  1,00 | 0,04  0,10  *0,22*  0,16  0,06  0,02  0 |

Рекомендуется следующий порядок вычислений:

1. В столбце 1 – условные обозначения временных интервалов; в столбцах 2 и 3 – экспериментальные частоты мужчин (2) и женщин (3).

2. В столбцах 4 и 5 – накопленные частоты для мужчин (4) и женщин (5). Напомним, что накопленные частоты вычисляются путем простого суммирования частот от первого до последнего класса.

3. В столбцах 6 и 7 – относительные накопленные частоты (*F*\* = *F*/*n*). Другими словами, каждая накопленная частота в столбцах 4 и 5 делится на 50.

4. Вычисляем критерий λ по формуле Колмогорова в следующей модификации:

 (7.9)

В нашем случае:



*Вывод*

Распределения отличаются друг от друга с вероятностью 0,822 (см. Приложения, табл. VII). Другими словами, соответствие между рас­пределениями можно констатировать лишь с вероятностью 0,178.

## ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ

## Задача 7. 1

40 студентов (20 юношей и 20 девушек) обследованы на уровень нейротизма – эмоциональной стабильности по тесту Айзенка. Полу­чены следующие результаты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 10 | 20 |
| Юноши | 10 | 12 | 5 | 9 | 6 | 7 | 11 | 8 | 7 | 4 | 9 | 12 | 14 | 8 | 6 | 7 | 11 | 9 | 10 | 8 |
| Девушки | 5 | 9 | 9 | 13 | 8 | 8 | 10 | 7 | 13 | 11 | 10 | 11 | 10 | 13 | 8 | 10 | 9 | 16 | 13 | 11 |

*Задание*

Определить достоверность различий по уровню нейротизма у юношей и девушек, выбрав один или несколько критериев, адекватных условию задачи.

## Задача 7. 2

*Условие задачи*

В психофизиологическом эксперименте 29 юношей и 27 девушек были протестированы методике РДО (реакция на движущийся объект). В числе показателей использовался следующий критерий: величина средней ошибки *S* остановки движущейся точки на линии. Получены следующие значения *S* (в миллисекундах) для двух групп испытуемых:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Юноши | | | | | | Девушки | | | | | |
| №№ | *S* | №№ | *S* | №№ | *S* | №№ | *S* | №№ | *S* | №№ | *S* |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 | 37  31  32  26  37  24  18  46  59  19 | 11  12  13  14  15  16  17  18  19  20 | 41  44  26  29  40  40  30  39  32  21 | 21  22  23  24  25  26  27  28  29 | 32  24  32  24  23  33  29  38  24 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 | 87  41  17  46  59  17  33  23  30  40 | 11  12  13  14  15  16  17  18  19  20 | 41  21  37  27  37  44  38  41  22  40 | 21  22  23  24  25  26  27 | 24  21  21  51  52  23  52 |

*Задание*

Определить достоверность различий между показателями РДО для юношей и девушек, выбрав адекватный критерий обработки резуль­татов.

## Задача 7.3

*Условие задачи*

Первоклассники одной из средних школ (12 мальчиков и 10 девочек) были протестированы по детскому тесту Д. Векслера на уровень интеллекта. Результаты тестирования (индивидуальные значения *IQ*) представлены в таблице.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Испытуемый | пол | IQ | Испытуемый | Пол | IQ |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11 | м  м  м  м  м  м  м  м  м  м  м | 85  78  138  86  79  105  95  94  100  134  87 | 12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | м  д  д  д  д  д  д  д  д  д  д | 91  115  112  98  93  97  101  117  102  92  111 |

*Задание.* Проанализировать полученные результаты на предмет половых различий в уровне интеллекта детей.

## ГЛАВА 8

## МЕРЫ СВЯЗИ

## 8. 1. Постановка проблемы

Многие психологические черты, свойства, признаки не являются независимыми, а определенным образом взаимосвязаны между собой. Поэтому психологу часто приходится иметь дело с выявлением наличия и характера связи между этими признаками, свойствами, чертами. Это позволяет в известной степени минимизировать число изучаемых признаков, объединяя их в более крупные конгломераты, особенно в тех случаях, когда число таких признаков достаточно велико.

В математическом смысле задача состоит в нахождении связи между двумя рядами переменных (*x*i и *y*i), измеренных на одной и той же выборке испытуемых. О наличии связи (корреляции) между этими пере­менными можно говорить в тех случаях, когда изменение величины *х* ведет к закономерному изменению величины *у*,и если характер изменений является предсказуемым.

## 8. 2. Представление данных

Данные о связи двух переменных могут быть представлены либо графически (в виде диаграмм рассеивания), либо путем вычисления коэффициентов корреляции по соответствующим формулам.

В графическом изображении каждый испытуемый может быть пред­ставлен точкой в координатах *у* = *f* (*х*), причем величины *х*i и *у*iсоот­ветствуют значениям двух исследуемых признаков. Выборка испытуе­мых в этих координатах представляет собой «облако рассеивания» точек, которое может иметь различную форму (рис. 8.1).



Рис. 8.1. Графическое представление связи между переменными

(облако рассеивания точек имеет различную форму

в зависимости от характера связи), объяснение в тексте

При наличии прямой (положительной) связи между переменными облако рассеивания имеет более или менее уплощенную эллиптическую форму, длинная ось которого направлена вправо и вверх. Другими сло­вами, при возрастании значения одной переменной имеется тенденция к увеличению другой переменной.

В случае отрицательной связи между переменными длинная ось облака рассеивания направлена вправо вниз, т. е., увеличение значений одной переменной соответствует закономерному снижению значений другой.

Наконец, если облако рассеивания имеет округлую форму, то можно предположить, что корреляция между переменными отсутствует или, по крайней мере, она весьма незначительна.

В психологии используется несколько различных мер связи (коэф­фициентов корреляции), выбор которых определяется в первую очередь типом шкалы, который формирует исследуемая переменная величина. Чаще всего коэффициенты корреляции представляют собой величины, стандартизованные таким образом, что они могут принимать значения от –1 (строгая обратная связь) до +1 (строгая прямая связь). Вычисле­ние коэффициента корреляции предполагает также определение его статистической значимости (достоверности) по соответствующим фор­мулам или таблицам. Достоверность коэффициента корреляции может быть определена для определенного уровня значимости (0,95, 0,99 и т.д.).

## 8. 3. Коэффициент корреляции Фехнера

Коэффициент корреляции, предложенный во II–й половине XIX века Г. Т. Фехнером, является наиболее простой мерой связи между двумя переменными. Он основан на сопоставлении двух психологических признаков *xi* и *yi*, измеренных на одной и той же выборке, по сопо­ставлению знаков отклонений индивидуальных значений от среднего:  и . Вывод о корреляции между двумя переменными делается на основании подсчета числа совпадений и несовпадений этих знаков.

Пример

Пусть *xi* и *yi* – два признака, измеренные на одной и той же выборке испытуемых. Для вычисления коэффициента Фехнера необходимо вычислить средние значения для каждого признака, а также для каждого значения переменной – знак отклонения от среднего (табл. 8.1):

Таблица 8.1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *xi* | *yi* |  |  | Обозначение |
|  | 16  15  19  12  9  20  18  14  15  17 | 20  17  16  22  18  12  15  18  16  18 | +  -  +  -  -  +  +  -  -  + | +  -  -  +  +  -  -  +  -  + | *а*  *a*  *b*  *b*  *b*  *b*  *b*  *b*  *a*  *a* |
| Среднее | 15,5 | 17,2 |  |  |  |

В таблице: *а* – совпадения знаков, *b* – несовпадения знаков; *n*a – число совпадений, *n*b – число несовпадений (в данном случае *n*a = 4, *n*b = 6).

Коэффициент корреляции Фехнера вычисляется по формуле:

 (8.1)

В рассматриваемом случае:



*Вывод*

Между исследуемыми переменными существует слабая отри­цательная связь.

Необходимо отметить, что коэффициент корреляции Фехнера не является достаточно строгим критерием, поэтому его можно исполь­зовать лишь на начальном этапе обработки данных и для формулировки предварительных выводов.

## 8. 4. Коэффициент корреляции Пирсона

Исходный принцип коэффициента корреляции Пирсона – использо­вание произведения моментов (отклонений значения переменной от среднего значения):

 (8.2)

Если сумма произведений моментов велика и положительна, то *х* и *у* связаны прямой зависимостью; если сумма велика и отрицательна, то *х* и *у* сильно связаны обратной зависимостью; наконец, в случае отсут­ствия связи между *x* и *у* сумма произведений моментов близка к нулю.

Для того чтобы статистика не зависела от объема выборки, берется не сумма произведений моментов, а среднее значение. Однако деление производится не на объем выборки, а на число степеней свободы *n* - 1.

Величина  является мерой связи между *х* и *у* и называется ковариацией *х* и *у*.

Во многих задачах естественных и технических наук ковариация является вполне удовлетворительной мерой связи. Ее недостатком является то, что диапазон ее значений не фиксирован, т. е. она может варьировать в неопределенных пределах.

Для того чтобы стандартизировать меру связи, необходимо изба­вить ковариацию от влияния стандартных отклонений. Для этого надо разделить *Sxy* на *σ*x и *σ*y:

 (8.3)

где *rxy* - коэффициент корреляции, или произведение моментов Пирсона.

Общая формула для вычисления коэффициента корреляции выгля­дит следующим образом:



 (некоторые преобразования)



 (8.4)

Влияние преобразования данных на *r*xy:

1. Линейные преобразования *x* и *y* типа *bx* + *a* и *dy* + *c* не изменят величину корреляции между *x* и *y*.

2. Линейные преобразования *x* и *y* при *b* < 0, *d* > 0, а также при *b* > 0 и *d* < 0 изменяют знак коэффициента корреляции, не меняя его величины.

Достоверность (или, иначе, статистическая значимость) коэффи­циента корреляции Пирсона может быть определена разными спосо­бами:

По таблицам критических значений коэффициентов корреляции Пирсона и Спирмена (см. Приложение, табл. XIII). Если полученное в расчетах значение *r*xyпревышает критическое (табличное) значение для данной выборки, коэффициент Пирсона считается статистически значи-мым. Число степеней свободы в данном случае соответствует *n* – 2, где *n* – число пар сравниваемых значений (объем выборки).

По таблице XV Приложений, которая озаглавлена «Количество пар значений, необходимое для статистической значимости коэффициента корреляции». В данном случае необходимо ориентироваться на коэф­фициент корреляции, полученный в вычислениях. Он считается ста­тистически значимым, если объем выборки равен или превышает таб­личное число пар значений для данного коэффициента.

По коэффициенту Стьюдента, который вычисляется как отношение коэффициента корреляции к его ошибке:

 (8.5)

Ошибка коэффициента корреляции вычисляется по следующей формуле:



(8.6)

где *m*r - ошибка коэффициента корреляции, *r* - коэффициент корреляции; *n* - число сравниваемых пар.

Рассмотрим порядок вычислений и определение статистической значимости коэффициента корреляции Пирсона на примере решения следующей задачи.

*Условие задачи*

22 старшеклассника были протестированы по двум тестам: УСК (уровень субъективного контроля) и МкУ (мотивация к успеху). Получены следующие результаты (табл. 8.2):

Таблица 8.2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №№ | УСК (*xi*) | МкУ (*yi*) | №№ | УСК (*xi*) | МкУ (*yi*) |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11 | 27  24  27  30  25  18  28  31  31  30  18 | 18  19  16  13  17  13  19  19  10  24  13 | 12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 24  27  25  37  35  25  22  26  34  25  31 | 12  15  15  23  24  20  14  21  24  17  17 |

*Задание*

Проверить гипотезу о том, что для людей с высоким уровнем интернальности (балл УСК) характерен высокий уровень мотивации к успеху.

*Решение*

1. Используем коэффициент корреляции Пирсона в следующей модификации (см. формулу 8.4):



Для удобства обработки данных на микрокалькуляторе (в случае отсутствия необходимой компьютерной программы) рекомендуется оформление промежуточной рабочей таблицы следующего вида (табл. 8.3):

Таблица 8.3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x*i | *y*i | *x*i2 | *y*i2 | *x*i*y*i |
| *x*1  *x*2  *x*3  .  .  .  *x*n | *y*1  *y*2  *y*3  .  .  .  *y*n | *x*12  x22  *x*32  .  .  .  *x*n2 | *y*12  *y*22  *y*32  .  .  .  *y*n2 | *x*1*y*1  *x*2*y*2  *x*3*y*3  .  .  .  *x*n*y*n |
| Σ*x*i | Σ*y*i | Σ*x*i2 | Σ*y*i2 | Σ*x*i*y*i |

2. Проводим вычисления и подставляем значения в формулу:





3. Определяем статистическую значимость коэффициента корреля­ции Пирсона тремя способами:

1-й способ:

В табл. XIII Приложений находим критические значения коэффи­циента для 1-го и 2-го уровней значимости: *rкр.* = 0,42; 0,54 (ν = *n* – 2 = 20).

Делаем вывод о том, *r*xy > *r*кр*.*, т. е. корреляция является статисти­чески значимой для обоих уровней.

2-й способ:

Воспользуемся табл. XV, в которой определяем число пар значений (число испытуемых), достаточное для статистической значимости коэф­фициента корреляции Пирсона, равного 0,58: для 1-го, 2-го и 3-го уров­ней значимости оно составляет, соответственно, 12, 18 и 28.

Отсюда мы делаем вывод о том, что коэффициент корреляции является значимым для 1-го и 2-го уровня, но «не дотягивает» до 3-го уровня значимости.

3-й способ:

Вычисляем ошибку коэффициента корреляции и коэффициент Стьюдента как отношение коэффициента Пирсона к ошибке:



В табл. X находим стандартные значения коэффициента Стьюдента для 1-го, 2-го и 3-го уровней значимости при числе степеней свободы ν = *n* – 2 = 20: *tкр.* = 2,09; 2,85; 3,85.

*Общий вывод*

Корреляция между показателями тестов УСК и МкУ является статистически значимой для 1-го и 2-го уровней значимости.

## 8. 5. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена

Коэффициент корреляции Спирмена (*rs*) используется в тех случаях, когда оба ряда переменных представлены ранговыми (порядковыми) шкалами. Для вычисления коэффициента Спирмена можно пользовать­ся двумя разными формулами, которые дают, в принципе, один и тот же результат:

1) ; (8.7)

2). (8.8)

Коэффициенткорреляции Спирмена, так же как и *rxy*, может варьировать от –1 до +1. *rs* = 1 только в том случае, когда ранги обоих признаков в точности совпадают по *х* и *у*.

При расчете коэффициента Спирмена вручную (на микрокалькуля­торе) рекомендуется использовать рабочую таблицу для промежуточных вычислений, которая имеет следующий вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x*i | *y*i | *x*i – *y*i | (*x*i – *y*i)2 | *x*i*y*i |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *x*1  *x*2  .  .  .  *x*n | *y*1  *y*2  .  .  .  *y*n | *x*1 – *y*1  *x*2 – *y*2  .  .  .  *x*n – *y*n | (*x*1 – *y*1)2  (*x*2 – *y*2)2  .  .  .  (*x*n – *y*n)2 | *x*1*y*1  *x*2*y*2  .  .  .  *x*n*y*n |
| Σ*x*i | Σ*y*i | Σ(*x*i – *y*i) | Σ(*x*i – *y*i)2 | Σ*x*i*y*i |

В зависимости от выбора формулы можно использовать столбцы 1 ÷ 4 либо 1, 2, 5.

Если в рядах переменных (или хотя бы в одном из них) имеются связанные (повторяющиеся) ранги, то следует пользоваться формулой (8.7) с соответствующей поправкой на связанные ранги:

 (8.9)

где *T*x = (*N*x3 – *N*x):12 и *T*y = (*N*y3 – *N*y):12 (*N*x и *N*y, соответственно, число связанных рангов в ряду *x* и в ряду *y*).

Статистическая значимость коэффициента ранговой корреляции Спирмена определяется аналогично значимости коэффициента кор­реляции Пирсона (табл. XIII, XV и X Приложений).

Рассмотрим порядок расчета коэффициента Спирмена на примере следующей задачи.

*Условие задачи*

12 учащихся были проранжированы психологом по их открытой неприязни к преподавателю (*x*i) и к другим учащимся (*y*i). Результаты экспертной оценки приведены ниже (табл. 8.4):

Таблица 8.4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №№  Исп. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| *xi* | 2 | 8 | 12 | 3 | 1 | 6 | 7 | 10 | 4 | 9 | 11 | 5 |
| *yi* | 6 | 5 | 10 | 7 | 3 | 4 | 9 | 8 | 1 | 11 | 12 | 2 |

*Задание*

Определить, существует ли связь между открытой неприязнью уча­щихся к преподавателю и к другим учащимся.

*Решение*

Составляем рабочую таблицу для вычисления коэффициента кор­реляции Спирмена (табл. 8.5) и вносим полученные результаты в соот­ветствующие формулы:

Таблица 8.5

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x*i | *y*i | (*x*i *– y*i)2 | *x*i*y*i |
| 2  8  12  3  1  6  7  10  4  9  11  5 | 6  5  10  7  3  4  9  8  1  11  12  2 | 16  9  4  16  4  4  4  4  9  4  1  9 | 12  40  120  21  3  24  63  80  4  99  132  10 |
|  | Σ | 84 | 608 |

В таблице критических значений коэффициентов корреляции Пирсо­на и Спирмена находим: *rкр* = 0,58 (β1 = 0,95); 0,71 (β2 = 0,71).

*Вывод*

Корреляция является статистически значимой для 1-го уровня.

## 8.6. Коэффициент ранговой корреляции Кендалла

Коэффициент корреляции Кендалла используется в случае, когда переменные представлены двумя порядковыми шкалами при условии, что связанные ранги отсутствуют. Вычисление коэффициента Кендалла связано с подсчетом числа совпадений и инверсий. Рассмотрим эту процедуру на примере предыдущей задачи.

Алгоритм решения задачи следующий:



1. Табл. 8.5 переоформляется таким образом, чтобы один из рядов (в данном случае ряд *x*i) оказался ранжированным. Другими словами, переставляются пары *x* и *y* в нужном порядке ивносятся данные в столбцы 1 и 2 табл. 8.6.

Таблица 8.6

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *yi* | Совп. | Инв. |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12 | 3  6  7  1  2  4  9  5  11  8  12  10 | 9  6  5  8  7  6  3  4  1  2  0  0 | 2  4  4  0  0  0  2  0  2  0  1  0 |
|  | Σ | 51 | 15 |

2. Определяется «степень ранжированности» 2-го ряда (*y*i). Эта процедура проводится в следующей последовательности:

а) берем первое значение неранжированного ряда «3». Подсчиты­вается количество рангов *ниже* данного числа, которые *больше* сравни­ваемого значения. Таких значений 9 (числа 6, 7, 4, 9, 5, 11, 8, 12 и 10). Заносим число 9 в столбец «совпадения». Затем подсчитываем коли­чество значений, которые *меньше* трех. Таких значений 2 (ранги 1 и 2); вносим число 2 в графу «инверсии».

б) отбрасываем число 3 (мы с ним уже поработали) и повторяем процедуру для следующего значения «6»: число совпадений равно 6 (ранги 7, 9, 11, 8, 12 и 10), число инверсий – 4 (ранги 1, 2, 4 и 5). Вносим число 6 в графу «совпадения», а число 4 – в графу «инверсии».

в) аналогичным образом процедура повторяется до конца ряда; при этом следует помнить, что каждое «отработанное» значение исключает­ся из дальнейшего рассмотрения (подсчитываются только ранги, которые лежат ниже данного числа).

3. Подсчитывается сумма совпадений *(Р)* и сумма инверсий *(Q)*; данные вносятся в одну и трех взаимозаменяемых формул коэффициен­та Кендалла (8.10). Проводятся соответствующие вычисления.

*τ * (8.10)

В нашем случае:



В табл. XIV Приложений находятся критические значения коэффи­циента для данной выборки: τкр. = 0,45; 0,59. Эмпирически полученное значение сравнивается с табличным.

*Вывод*

τ = 0,55 > τкр. = 0,45. Корреляция статистически значима для 1-го уровня.

## 8.7. Дихотомический коэффициент корреляции (ϕ)

Коэффициент ϕ используется в качестве меры связи в тех случаях, когда признаки *х* и *у* измеряются в дихотомической шкале наименований и могут принимать значения 0 или 1. Рассмотрим способы вычислений коэффициента на пример задачи.

*Условие*

Проведен социологический опрос, касающийся отношения населе­ния к религии. Было опрошено 250 респондентов (100 мужчин и 150 женщин). По результатам опроса оказалось, что среди мужчин 40 верующих и 60 атеистов, а среди женщин 85 оказались верующими и 65 – атеистами.

*Задание*

Определить, существует ли связь между полом и отношением к религии. Определить знак и статистическую значимость коэффициента корреляции.

*Решение*

Введем необходимые обозначения:

- шкала *х* – пол (1 – мужчины, 0 – женщины);

- шкала *у* – отношение к религии (1 – верующий, 0 – атеист).

Задачу можно решить двумя различными способами:

1-й способ:

* 1. Составляем матрицу сопряженности признаков следующего вида:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | Признак *х* | | |
| 1 | 0 | Σ |
| Признак*у* | 1 | *a* | *b* | *a + b* |
| 0 | *с* | *d* | *c + d* |
| Σ | *a + c* | *b + d* |  |

1. Подставляем в матрицу полученные экспериментальные значе­ния. В данном случае в качестве измеряемого признака служит число испытуемых, принимающее разные значения при сочетании шкал *х* и *у*. Так, в клетку *а* матрицы вносится число испытуемых, имеющих единицу по обеим шкалам, т. е число верующих мужчин; в клетку *b* – испытуе­мые, имеющие 0 по шкале *х* и 1 по шкале *у* (число верующих женщин) и т. д.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | Признак *х* | | |
| 1 | 0 | Σ |
| Признак  *у* | 1 | 40 | 85 | 125 |
| 0 | 60 | 65 | 125 |
| Σ | 100 | 150 |  |

1. Используем формулу дихотомического коэффициента корреля­ции:

 (8.12)

1. Проводим вычисления:



Интерпретация знака коэффициента корреляции состоит в том, что если он положителен, то 1 по *х* коррелирует с 1 по *у*, 0 по *х* коррелирует с 0 по *у*. Отрицательный коэффициент (как в нашем случае) свидетель­ствует о том, что 1 по *х* коррелирует с 0 по *у*, 0 по *х* коррелирует с 1 по *у*. Другими словами, женщины являются более верующими, а мужчины – более атеистичными.

По таблице критических значений дихотомического коэффициента корреляции (см. Приложение, табл. XVI) находим, что коэффициент является статистически значимым для 1-го уровня (φкр. = 0,13).

При отсутствии соответствующей таблицы можно воспользоваться следующим соотношением (для 1-го уровня значимости):  и 

В нашем случае: *z* = 2,58 и χ2 = 6,64, т. е. вывод подтверждается.

Кроме того, в табл. VI Приложения можно определить статисти­ческую значимость χ2 и для более высоких уровней (ν =1).

*Вывод*

Корреляция между полом и отношением к религии является ста­тистически значимой, что можно констатировать с вероятностью 0,95.

2-й способ:

Обозначим: *p*x – относительная доля испытуемых, имеющих единицу по *х*, *qx* = 1 – *px* – имеющих нуль по *х*; аналогично: *p*y – доля испытуемых, имеющих единицу по *у*, *qy* = 1 – *py* – имеющих нуль по *у*; наконец, *p*xy - доля людей, имеющих единиц по *x* и по *y*.

Коэффициент ϕ вычисляется по формуле:

 (8.13)

В нашем примере: *p*x = 100:250 = 0,40; *q*x = 1 – 0,40 = 0,60; *p*y = 120:250 = 0,50; *qy* = 1 – 0,50 = 0,50; *p*xy = 40:250 = 0,16. Подставляя значения в формулу, получаем: φ = –0,163. Вывод подтверждается.

## 8. 8. Точечный бисериальный коэффициент корреляции (*r*pb)

Точечный бисериальный коэффициент корреляции используется тогда, когда одна переменная формирует дихотомическую шкалу наиме­нований, другая – шкалу интервалов или шкалу отношений. Порядок вычислений коэффициента рассмотрим на примере следующей задачи.

*Условие задачи*

В группе испытуемых, протестированных по тесту Айзенка, обнару­жено 15 экстравертов, из них 8 с высоким уровнем нейротизма (холе­рики) и 7 – с низким нейротизмом (сангвиники). Тест Спилбергера обна­ружил у тех и других следующий уровень личностной тревожности (УЛТ):

Таблица 8.7

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Тип темперамента | Уровень личностной тревожности | | | | | | | |
| Холерики | 42 | 44 | 40 | 38 | 43 | 37 | 41 | 42 |
| Сангвиники | 34 | 36 | 38 | 40 | 35 | 38 | 39 |  |

*Задание*

Определить уровень связи и ее статистическую значимость между типом темперамента и уровнем личностной тревожности.

*Решение*

1. Учитывая, что шкала типов темперамента дихотомическая, а шкала УЛТ – интервальная, используем формулу для вычисления точечно-бисериальный коэффициент корреляции:

 (8.14)

где  и , соответственно, средние значения переменных для двух интервальных шкал, т. е. средние значения УЛТ для холериков ()и сангвиников (); σу – стандартное отклонение для всей выборки; *n*1 и *n*0 – численность каждой из сравниваемых выборок и *n = n*1 *+ n*0 – общее число испытуемых.

1. Определяем промежуточные значения:



1. Проводим вычисления: 
2. Определяем число степеней свободы: ν = (*n*1 – 1) + (*n*0 – 1) = 13.
3. В табл. XIII Приложений находим критические значения коэффициента корреляции (специальной таблицы для *r*pbне существует): *r*кр*.* = 0,51 (*β1* = 0,95) и 0,64 (*β2* = 0,99). *r*pb > *r*кр*.*. В данном случае можно воспользоваться и табл. XV: как можно видеть, для статистической значимости коэффициента, равного 0,67, достаточно 9 испытуемых для 1-го и 13 – для 2-го уровня (в нашем примере *n =*15).

*Вывод.* Корреляция между типом темперамента и уровнем личност­ной тревожности статистически значима для 1-го и 2-го уровней.

## 8. 9. Рангово-бисериальный коэффициент корреляции (*r*rb)

Рангово-бисериальный коэффициент корреляции используется в том случае, когда одна переменная измеряется в дихотомической шкале наименований, другая представлена порядковой шкалой. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

*Условие задачи*

10 подростков (из них 6 мальчиков и 4 девочки) были проранжи­рованы на предмет внешних проявлений агрессивности по отношению к своим сверстникам. Ранги распределились следующим образом (табл. 8.8):

Таблица 8.8

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пол | Ранг агрессивности | | | | | |
| Мальчики | 1 | 2 | 4 | 6 | 7 | 8 |
| Девочки | 3 | 5 | 9 | 10 |  |  |

*Задание*

Определить, существует ли связь между полом и агрессивностью в группе исследуемых подростков.

*Решение*

1. Учитывая, что мы имеем дело с дихотомической и ранговой шка­лами, используем рангово-бисериальный коэффициент корреляции:

 (8.15)

где  и - средние ранговые значения, n – численность выборки.

1. Проводим вычисления:



ν = (*n1* – 1) + (*n0* – 1) = 8; *r*кр*.* = 0,63 (*β1* = 0,95) и 0,77 (*β2* = 0,99). *r*pb > *r*кр*.*

*Вывод*

Корреляция между полом и агрессивностью для данной выборки испытуемых не является статистически значимой.

## 8. 10. Выбор меры связи

##### Для того, чтобы сделать адекватный выбор коэффициента корреля­ции для решения той или иной задачи, необходимо правильно опреде­лить тип шкалы, которым представлена та или иная переменная. Воз­можные сочетания различных типов шкал и соответствующие им коэф­фициенты корреляции представлены в табл. 8.9.

Таблица 8.9

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Типы сравниваемых шкал | | Коэффициент корреляции |
| 1 | 2 |
| Дихотомическая | Дихотомическая | Дихотомический (*φ*) |
| Дихотомическая | Порядковая (ранговая) | Рангово-бисериальный (*rrb*) |
| Дихотомическая | Интервальная | Точечно-бисериальный (*rpb*) |
| Ранговая | Ранговая | Коэффициент Пирсона (*rxy*)  Коэффициент Спирмена (*rs*)  Коэффициент Кендалла (*τ*) |
| Ранговая | Интервальная | Коэффициент Пирсона (*rxy*) |
| Интервальная | Интервальная | Коэффициент Пирсона (*rxy*) |

В некоторых случаях (как, правило, для упрощения обработки ре­зультатов) используют преобразования одной шкалы в другую. Тем не ме­нее, эти преобразования могут быть сделаны только в одном направ­лении: интервальная → ранговая → дихотомическая шкала (но не наоборот). Порядок преобразования интервальной шкалы в ранговую был рассмотрен нами ранее (критерий Манна-Уитни, подраздел 7.3). В то же время напомним, что такое преобразование существенно обед­няет информацию о поведении переменной и может использоваться лишь в случае необходимости.

## 8. 11. Матрицы корреляций

Матрицы корреляций (иначе, корреляционные матрицы) использу­ются в тех случаях, когда нам необходимо определить попарные связи между большим количеством переменных. Так, если мы имеем дело только с двумя переменными *x* и *y*, для определения связи между ними достаточно одного коэффициента связи (*r*xy). При наличии трех переменных (*x*, *y*, *z*) необходимо использовать уже 3 коэффициента: *r*xy, *r*xz и *r*yz. Определение связи между 4 переменными предполагает вычисление 6-и, между 5 переменными – 10-и коэффициентов корреля­ции и т. д. Корреляционные матрицы служат для упорядочивания и наглядного представления этих значений. Общий вид корреляционной матрицы при использовании 6 измеряемых признаков (обозначим их латинскими буквами от *A* до *F*) представлен в табл. 8.10.

Таблица 8.10

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Переменные | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* |
| *A* | 1 |  |  |  |  |  |
| *B* |  | 1 |  |  |  |  |
| *C* |  |  | 1 |  |  |  |
| *D* |  |  |  | 1 |  |  |
| *E* |  |  |  |  | 1 |  |
| *F* |  |  |  |  |  | 1 |

Надо ли заполнять всю площадь матрицы? Скорее всего, это необязательно. В данном случае необходимо руководствоваться двумя правилами:

1. *r*xx = 1. Другими словами, корреляция переменной сама с собой равна единице. Таким образом, главная диагональ матрицы автома­тически будет представлена единицами и вычислений не требует.

2. *r*xy = *r*yx, т. е. левая нижняя и правая верхняя половины матрицы будут зеркально отражать друг друга (так, *r*AD = *r*DA и т. д.). Поэтому заполняется лишь одна (как правило, правая верхняя) половина матрицы.

Руководствуясь этими правилами, легко вычислить общее число коэффициентов корреляции для упорядочения переменных. Рассуж­даем следующим образом: для *N* переменных общая площадь матрицы будет составлять *N*2; вычитая число значений главной диагонали матри­цы *N* и деля оставшееся значение пополам, получаем (*N*2 – *N*)/2 = *N*(*N* – 1)/2. Так, если мы имеем 15 переменных, то число возможных связей между ними будет составлять 15·(15 – 1)/2 = 105.

При большом числе переменных также такие упорядоченные матри­цы корреляций могут оказаться довольно громоздкими. Для наглядности представления рекомендуется пользоваться «редуцированными» матри­цами, т. е. удалять из них все коэффициенты корреляции, не достигаю­щие критического значения. Работа с такими матрицами более удобна и экономична.

## Задача 8.1

*Условие задачи*

Согласно концепции Г.Айзенка экстра-интроверсия и нейротизм являются независимыми переменными, не связанными между собой.

*Задание*

Проверить исходную предпосылку Г.Айзенка, используя данные, по­лученные на 50 испытуемых, протестированных по тесту Айзенка (ЭИ – показатели экстра-интроверсии, Н – показатели нейротизма).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | ЭИ | Н | № | ЭИ | Н | № | ЭИ | Н | № | ЭИ | Н | № | ЭИ | Н |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 | 7  13  12  15  14  16  11  8  9  18 | 18  15  20  9  20  15  15  20  15  9 | 11  12  13  14  15  16  17  18  19  20 | 7  9  10  9  6  17  12  9  17  8 | 18  10  12  15  20  12  8  13  8  12 | 21  22  23  24  25  26  27  28  29  30 | 13  18  5  16  13  15  7  16  16  14 | 10  17  11  23  16  18  7  20  9  11 | 31  32  33  34  35  36  37  38  39  40 | 13  19  5  7  6  11  17  11  7  14 | 18  8  11  14  8  10  11  12  15  10 | 41  42  43  44  45  46  47  48  49  50 | 9  11  18  18  15  10  8  13  17  12 | 6  4  18  9  21  11  5  15  16  15 |

## Задача 8. 2

*Условие задачи*

У 50 испытуемых, протестированных по тесту Шмишека, определял­ся уровень гипертимности и дистимности (черты, связанные с преобла­дающим настроением, доминирующим эмоциональным «фоном»). Теоретически эти черты являются противоположными: гипертимность характеризует повышенное настроение, преобладание положительных эмоций, дистимность – наоборот. В то же время определение этих ка­честв основывается на ответах испытуемых на разные, по существу, вопросы.

Экспериментальные данные:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Гип | Дис | № | Гип | Дис | № | Гип | Дис | № | Гип | Дис | № | Гип | Дис |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 | 4  3  2  1  5  3  3  2  3  5 | 2  0  5  3  5  3  3  1  4  0 | 11  12  13  14  15  16  17  18  19  20 | 0  2  1  2  1  1  3  6  1  4 | 5  1  7  2  5  1  3  1  3  1 | 21  22  23  24  25  26  27  28  29  30 | 4  5  5  1  6  3  2  3  2  5 | 1  0  1  5  4  4  3  5  3  0 | 31  32  33  34  35  36  37  38  39  40 | 4  2  2  2  1  0  5  2  1  1 | 4  1  1  4  3  3  0  3  2  4 | 41  42  43  44  45  46  47  48  49  50 | 2  5  3  5  4  3  5  4  4  4 | 2  2  2  0  5  3  0  2  2  3 |

*Задание*

Подтвердить или опровергнуть версию о противоположности двух психологических черт – гипертимности и дистимности.

## Задача 8. 3

*Условие задачи*

У 10 испытуемых измерялся уровень нейротизма по тесту Айзенка и импульсивность по тесту Шмишека. Получены следующие результаты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Испытуемый | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Нейротизм | 12 | 19 | 11 | 13 | 20 | 17 | 8 | 15 | 18 | 16 |
| Импульсивность | 3 | 5 | 4 | 3 | 7 | 4 | 2 | 5 | 7 | 3 |

*Задание*

Определить наличие или отсутствие связи между нейротизмом и импульсивностью.

**ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ**

4.1. Квартили: *Q*1 = 88, *Q*2 = 100,5, *Q*3 = 108.

Бимодальное распределение: *Mo*1 = 88, *Mo*2 = 103.

*Md* = 100,5; *IQ*ср = 99,1.

4.2. Средний балл успеваемости у девочек 3,75, у мальчиков - 3,58 (для усреднения данных необходимо воспользоваться средневзвешен­ным арифметическим значением).

4.3. *х*g = 2,818.

5.1. *Т*max – *Т*min = 55 мс; *Q* = 21 мс; *Q*1/2= 10,5 мс; *MD* = 11,84; σх2 = 219,918; σх = 14,830; *V*х = 10,17%. Процентные соотношения частот в 8-классовом распределении 0, 0, 17, 43, 22, 14, 4, 0. Размах распределения составляет 3,71 стандартного отклонения.

5.2. Средние значения: *х*1 = 35,2; *х*2 = 37,5.

Стандартные отклонения: σ1 = 6,877; σ2 = 7,169.

Коэффициенты вариаций: *V*1 = 0,195 (19,5%); *V*2 = 0,191 (19,1%).

Средние значения и стандартные отклонения для первой группы испытуемых несколько ниже, чем для второй. Для коэффициентов вариации соотношения обратные.

6.1. *As* = 0,687 *> As*кр = 0,53*.*; *Ex* = –0,496 *< Ex*кр. = 0,85. Для уровня значимости 0,95 распределение статистически достоверно отличается от нормального по коэффициенту асимметрии (*As > As*кр ).

6.2. χ2 = 54,17 > χ2кр. = 22,4; 27,7; 34,5. λ = 1,66. По критерию хи-квадрат и критерию Колмогорова экспериментальное распределение статистически достоверно отличается от нормального.

6.3. *Т*ср = 130 мс; σT = 15,275; *As* = 0,631; *Ex* = 0,558. По коэффициенту асимметрии распределение статистически достоверно отличается от нормального (*As* > *As*кр = 0,39), по показателю эксцесса – не отличается от такового (*Ex* < *Ex*кр = 0,83).

7.1. *U* =133 < *U*кр. = 138; *t* = 1,92 < *t*кр. = 2,03; *F* = 3,68 < *F*кр. = 4,10. По критерию Стьюдента и по критерию Фишера различия показателей нейротизма у юношей и девушек статистически недостоверны, по критерию Манна-Уитни – достоверны для 1-го уровня значимости. Оче­видно, что в данном случае следует отдать приоритет параметри­ческим критериям и сделать общий вывод о недостоверности различий между двумя группами.

7.2. *t* = 1,28 < *t*кр. = 2,00; *F* = 1,76 < *F*кр. = 4,01. Различия между показателями РДО у юношей и девушек статистически недостоверны.

7.3. *U* = *U*кр.. По критерию Манна-Уитни различия между мальчиками и девочками по коэффициенту интеллекта лежат на границе достоверности.

8.1. Коэффициент корреляции между экстра-интроверсией и нейротизмом близок к нулю, что свидетельствует об отсутствии связи между этими характеристиками и подтверждает концепцию Г. Айзенка.

8.2. *r*xy = –0,43 > *r*кр. = 0,28. Вывод: гипертимность и дистимность, по Шмишеку, связаны между собой достоверной отрицательной связью.

8.3. Связь между импульсивностью и нейротизмом для данной выборки статистически достоверна для 2-го уровня значимости: *r*xy = 0,786 > *r*кр. = 0,77*.*).

**СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

***Основная***

1. *Гласс Дж., Стэнли Дж*. Статистические методы в педагогике и психологии. – М.: Прогресс, 1976.

2. *Суходольский Г. В.* Основы математической статистики для психологов. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.

3. *Артемьева Е. Ю., Мартынов Е. М.* Вероятностные методы в психологии. – М.: Изд-во МГУ, 1975.

4. *Сидоренко Е. В.* Методы математической обработки в психологии. – СПб.: Соц. психол. центр, 1996.

5. *Сидоренко Е. В.* Методы математической обработки в психологии. – СПб: Речь, 2001. – 350 с.

6. *Лупандин В. И.* Математические методы в психологии. Уч. пособие. – Екатеринбург: УрГУ – УрГИ, 1996 (1-е изд.); Екатеринбург: гуманитарный университет, 1997 (2-е изд.); Екатеринбург: изд-во Урал. ун-та, 2002. – 208 с.

7. *Лупандин В.И., Зайцев А.В.* Сборник задач по курсу «Математические методы в психологии». Уч.-метод. пособие. – Екатеринбург, 2000.

##### Дополнительная

1. *Плохинский Н.А.* Математические методы в биологии. Уч.-метод. пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1978.
2. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. – М., 1969.
3. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятности. – М.: Наука, 1974.
4. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1976.

5. *Боровков А.А.* Математическая статистика. – М.: Наука, 1984.

6. *Феллер Э*. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1967. - Т. 1, 2.

***Справочные пособия и таблицы***

1. *Оуэн Д.Б.* Сборник статистических таблиц. – М.: ВЦ АН СССР, 1973.

2. *Большев А.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1965.

3. *Янко Я.* Математико-статистические таблицы. – М.: Госстатиздат, 1961.

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ**

*Таблица I*

Критические значения коэффициента асимметрии (As),

используемого для проверки гипотезы

о нормальности распределения

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Объём  выборки | Уровни  Значимости | | Объём  выборки | Уровни  значимости | | | | Объём  выборки | | Уровни  Значимости | | |
| 0,95 | 0,99 | 0,95 | | 0,99 | | 0,95 | 0,99 | |
| 25  30  35  40  45  50  60  70  80  90 | 0,71  0,66  0,62  0,59  0,56  0,53  0,49  0,46  0,43  0,41 | 1,06  0,98  0,92  0,87  0,82  0,79  0,72  0,67  0,63  0,60 | 100  125  150  175  200  250  300  350  400  450 | 0,39  0,35  0,32  0,30  0,28  0,25  0,23  0,21  0,20  0,19 | 0,57  0,51  0,46  0,43  0,40  0,36  0,33  0,30  0,28  0,27 | | 500  550  600  650  700  750  800  850  900  1000 | | 0,18  0,17  0,16  0,16  0,15  0,15  0,14  0,14  0,13  0,13 | | | 0,26  0,24  0,23  0,22  0,22  0,21  0,20  0,20  0,19  0,18 |

*Таблица II*

**Критические значения показателя эксцесса (Ex),**

используемого для проверки нормальности распределения

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Объем  выборки | Уровни значимости | | | Объем выборки | Уровни значимости | | |
| 0,90 | 0,95 | 0,99 | 0,90 | 0,95 | 0,99 |
| 10  15  20  25  30  35  40  45  50 | 0,89  0,87  0,86  0,86  0,85  0,85  0,84  0,84  0,84 | 0,91  0,89  0,88  0,87  0,86  0,86  0,85  0,85  0,85 | 0,94  0,91  0,90  0,89  0,88  0,88  0,87  0,87  0,86 | 60  70  80  90  100  200  300  400  500 | 0,84  0,83  0,83  0,83  0,83  0,82  0,81  0,81  0,81 | 0,84  0,84  0,84  0,84  0,83  0,82  0,82  0,82  0,81 | 0,86  0,86  0,85  0,85  0,85  0,83  0,83  0,82  0,82 |

*Таблица III*

Теоретические частоты 8-классового нормального распределения ("шаг" 1 σ)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Классовый интервал  в единицах стандартного  отклонения | Среднее  значение  интервала | Частоты | Накопленные  частоты |
| –4 ÷ –3 σ  –3 ÷ –2 σ  –2 ÷ –1 σ  –σ ÷ 0  0 ÷ 1 σ  1 ÷ 2 σ  2 ÷ 3 σ  3 ÷ 4 σ | –3,5  –2,5  –1,5  –0,5  0,5  1,5  2,5  3,5 | 0,13  2,15  13,59  34,13  34,13  13,59  2,15  0,13 | 0,13  2,28  15,87  50,00  84,13  97,72  99,87  100,00 |

*Таблица IV*

**Теоретические частоты 16-классового нормального распределения ("шаг" 0,5 σ)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Классовый интервал  в единицах стандартного  отклонения | Среднее  значение  интервала | Частоты | Накопленные  частоты |
| –4,0 ÷ –3,5 σ  –3,5 ÷ –3,0 σ  –3,0 ÷ –2,5 σ  –2,5 ÷ –2,0 σ  –2,0 ÷ –1,5 σ  –1,5 ÷ –1,0 σ  –1,0 ÷ –0,5 σ  –0,5 σ ÷ 0  0 ÷ 0,5 σ  0,5 ÷ 1,0 σ  1,0 ÷ 1,5 σ  1,5 ÷ 2,0 σ  2,0 ÷ 2,5 σ  2,5 ÷ 3,0 σ  3,0 ÷ 3,5 σ  3,5 ÷ 4,0 σ | -3,75  -3,25  -2,75  -2,25  -1,75  -1,25  -0,75  -0,25  0,25  0,75  1,25  1,75  2,25  2,75  3,25  3,75 | 0,02  0,11  0,50  1,65  4,41  9,18  14,99  19,14  19,14  14,99  9,18  4,41  1,65  0,50  0,11  0,02 | 0,02  0,13  0,63  2,28  6,69  15,87  30,86  50,00  69,14  84,13  93,31  97,72  99,37  99,87  99,98  100 |

*Таблица V*

**Значения z Пирсона и соответствующие им**

**теоретические накопленные частоты**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Мера  Пирсона (*z*) | Накоплен-ная частота (*F*) | Мера  Пирсона (*z*) | Накоплен-ная частота (*F*) | Мера  Пирсона (*z*) | Накоплен-ная частота (*F*) |
| – 4,0  – 3,9  – 3,8  – 3,7  – 3,6  – 3,5  – 3,4  – 3,3  – 3,2  – 3,1  – 3,0  – 2,9  – 2,8  – 2,7  – 2,6  – 2,5  – 2,4  – 2,3  – 2,2  – 2,1  – 2,0  – 1,9  – 1,8  – 1,7  – 1,6  – 1,5  – 1,4 | 0  0  0  0,01  0,01  0,02  0,03  0,05  0,07  0,09  0,13  0,18  0,25  0,34  0,47  0,63  0,82  1,08  1,40  1,79  2,28  2,88  3,60  4,46  5,49  6,69  8,08 | – 1,3  – 1,2  – 1,1  – 1,0  – 0,9  – 0,8  – 0,7  – 0,6  – 0,5  – 0,4  – 0,3  – 0,2  – 0,1  0  0,1  0,2  0,3  0,4  0,5  0,6  0,7  0,8  0,9  1,0  1,1  1,2  1,3 | 9,69  11,51  13,57  15,87  18,41  21,19  24,20  27,43  30,86  34,46  38,21  42,08  46,02  50,00  53,98  57,92  61,79  65,54  69,14  72,57  75,80  78,81  81,59  84,13  86,14  88,49  90,31 | 1,4  1,5  1,6  1,7  1,8  1,9  2,0  2,1  2,2  2,3  2,4  2,5  2,6  2,7  2,8  2,9  3,0  3,1  3,2  3,3  3,4  3,5  3,6  3,7  3,8  3,9  4,0 | 91,92  93,31  94,51  95,54  96,40  97,12  97,72  98,21  98,60  98,92  99,18  99,37  99,53  99,66  99,75  99,82  99,87  99,91  99,93  99,95  99,97  99,98  99,99  99,99  100,00  100,00  100,00 |

*Таблица VI*

Стандартные значения хи-квадрат

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Число степеней свободы | Уровни значимости | | Число степеней свободы | Уровни значимости | |
| 0,95 | 0,99 | 0,95 | 0,99 |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24  25  26  27  28  29 | 3,841  5,991  7,815  9,488  11,070  12,592  14,067  15,507  16,919  18,307  19,675  21,026  22,362  23,685  24,996  26,296  27,587  28,869  30,144  31,410  32,671  33,924  35,172  36,415  37,652  38,885  40,113  41,337  42,557 | 6,635  9,210  11,345  13,277  15,086  16,812  18,475  20,090  21,666  23,209  24,725  26,217  27,688  29,141  30,578  32,000  33,409  34,805  36,191  37,566  38,932  40,289  41,638  42,980  44,314  45,642  46,963  48,278  49,588 | 30  31  32  33  34  35  36  37  38  39  40  42  44  46  48  50  52  54  56  58  60  65  70  75  80  85  90  95  100 | 43,773  44,985  46,194  47,400  48,602  49,802  50,998  52,192  53,384  54,572  55,758  58,124  60,481  62,830  65,2171  67,505  69,832  72,153  74,468  76,778  79,082  84,821  90,631  96,217  101,879  107,522  113,145  118,752  124,342 | 50,892  52,191  53,486  54,776  56,061  57,342  58,619  59,892  61,162  62,428  63,691  66,206  68,709  71,201  73,683  76,154  78,6163  81,069  85,513  85,950  88,379  94,422  100,425  106,393  112,329  118,236  124,116  129,973  135,807 |

*Таблица VII*

**Уровень значимости различий**

**между экспериментальным и теоретическим распределениями**

**по критерию λ Колмогорова – Смирнова**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| λ | β | Λ | β | λ | β | λ | β |
| 0,37  0,38  0,39  0,40  0,41  0,42  0,43  0,44  0,45  0,46  0,47  0,48  0,49  0,50  0,51  0,52  0,53  0,54  0,55  0,56  0,57  0,58  0,59  0,60  0,61  0,62  0,63  0,64  0,65  0,66  0,67  0,68  0,69  0,70  0,71  0,72  0,73  0,74  0,75 | 0,001  0,001  0,002  0,003  0,004  0,005  0,007  0,009  0,013  0,016  0,020  0,025  0,030  0,036  0,043  0,050  0,059  0,068  0,077  0,088  0,099  0,110  0,123  0,136  0,149  0,163  0,178  0,193  0,208  0,224  0,240  0,256  0,272  0,289  0,305  0,322  0,339  0,356  0,373 | 0,76  0,77  0,78  0,79  0,80  0,81  0,82  0,83  0,84  0,85  0,86  0,87  0,88  0,89  0,90  0,91  0,92  0,93  0,94  0,95  0,96  0,97  0,98  0,99  1,00  1,01  1,02  1,03  1,04  1,05  1,06  1,07  1,08  1,09  1,10  1,11  1,12  1,13  1,14 | 0,390  0,406  0,423  0,440  0,456  0,472  0,488  0,504  0,519  0,535  0,550  0,565  0,579  0,593  0,607  0,621  0,634  0,647  0,660  0,673  0,685  0,696  0,708  0,719  0,730  0,741  0,751  0,761  0,770  0,780  0,789  0,798  0,806  0,814  0,822  0,829  0,837  0,844  0,851 | 1,15  1,16  1,17  1,18  1,19  1,20  1,21  1,22  1,23  1,24  1,25  1,26  1,27  1,28  1,29  1,30  1,31  1,32  1,33  1,34  1,35  1,36  1,37  1,38  1,39  1,40  1,41  1,42  1,43  1,44  1,45  1,46  1,47  1,48  1,49  1,50  1,51  1,52  1,53 | 0,858  0,864  0,871  0,877  0,882  0,888  0,893  0,898  0,903  0,908  0,912  0,916  0,921  0,924  0,928  0,932  0,935  0,939  0,942  0,945  0,948  0,951  0,953  0,956  0,958  0,960  0,962  0,964  0,967  0,968  0,970  0,972  0,973  0,975  0,976  0,978  0,979  0,980  0,981 | 1,54  1,55  1,56  1,57  1,58  1,59  1,60  1,61  1,62  1,63  1,64  1,65  1,66  1,67  1,68  1,69  1,70  1,71  1,72  1,73  1,74  1,75  1,76  1,77  1,78  1,79  1,80  1,81  1,82  1,83  1,84  1,85  1,86  1,87  1,88  1,89  1,90  1,91  1,92 | 0,983  0,984  0,985  0,986  0,986  0,987  0,988  0,989  0,989  0,990  0,991  0,991  0,992  0,992  0,993  0,993  0,994  0,994  0,995  0,995  0,995  0,996  0,996  0,996  0,996  0,997  0,997  0,997  0,997  0,998  0,998  0,998  0,998  0,998  0,998  0,998  0,999  0,999  0,999 |

*Таблица VIII*

Критические значения критерия *Q* Розенбаума

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень значимости 0,95 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| *n* | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24  25  26 | 6  6  6  7  7  7  7  7  7  7  8  8  8  8  8  8 | 6  6  7  7  7  7  7  7  7  7  7  8  8  8  8 | 6  6  6  7  7  7  7  7  7  7  7  8  8  8 | 6  6  7  7  7  7  7  7  7  7  8  8  8 | 6  6  7  7  7  7  7  7  7  8  8  8 | 6  7  7  7  7  7  7  7  8  8  8 | 7  7  7  7  7  7  7  8  8  8 | 7  7  7  7  7  7  8  8  8 | 7  7  7  7  7  8  8  8 | 7  7  7  7  7  8  8 | 7  7  7  7  7  7 | 7  7  7  7  7 | 7  7  7  7 | 7  7  7 | 7  7 | 7 |
| Уровень значимости 0,99 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| *n* | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24  25  26 | 9  9  9  9  9  9  10  10  10  10  11  11  11  12  12  12 | 9  9  9  9  9  9  10  10  10  10  11  11  11  11  12 | 9  9  9  9  9  9  10  10  10  10  10  11  11  11 | 9  9  9  9  9  9  10  10  10  10  10  10  11 | 9  9  9  9  9  9  9  10  10  10  10  10 | 9  9  9  9  9  9  9  10  10  10  10 | 9  9  9  9  9  9  9  10  10  10 | 9  9  9  9  9  9  9  10  10 | 9  9  9  9  9  9  9  10 | 9  9  9  9  9  9  9 | 9  9  9  9  9  9 | 9  9  9  9  9 | 9  9  9  9 | 9  9  9 | 9  9 | 9 |

*Таблица IX*

**Критические значения критерия *U* Манна-Уитни**

**для уровня значимости 0,95**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***n*** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 5 | 0 | 1 | 2 | 4 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 6 | 0 | 2 | 3 | 5 | 7 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 7 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 | 1 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 15 |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 | 1 | 4 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 |  |  |  |  |  |  |
| 10 | 1 | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 | 20 | 24 | 27 |  |  |  |  |  |
| 11 | 1 | 5 | 8 | 12 | 16 | 19 | 23 | 27 | 31 | 34 |  |  |  |  |
| 12 | 2 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 |  |  |  |
| 13 | 2 | 6 | 10 | 15 | 19 | 24 | 28 | 33 | 37 | 42 | 47 | 51 |  |  |
| 14 | 3 | 7 | 11 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 |  |
| 15 | 3 | 7 | 12 | 18 | 23 | 28 | 33 | 39 | 44 | 50 | 55 | 61 | 66 | 72 |
| 16 | 3 | 8 | 14 | 19 | 25 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 65 | 71 | 77 |
| 17 | 3 | 9 | 15 | 20 | 26 | 33 | 39 | 45 | 51 | 57 | 64 | 70 | 77 | 83 |
| 18 | 4 | 9 | 16 | 22 | 28 | 35 | 41 | 48 | 55 | 61 | 68 | 75 | 82 | 88 |
| 19 | 4 | 10 | 17 | 23 | 30 | 37 | 44 | 51 | 58 | 65 | 72 | 80 | 87 | 94 |
| 20 | 4 | 11 | 18 | 25 | 32 | 39 | 47 | 54 | 62 | 69 | 77 | 84 | 92 | 100 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ***n*** | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 4 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 5 | 19 | 20 | 22 | 23 | 25 | 26 | 28 | 29 | 31 | 32 | 33 | 35 | 36 | 38 |
| 6 | 25 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 48 |
| 7 | 30 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 44 | 46 | 48 | 50 | 53 | 55 | 57 | 59 |
| 8 | 36 | 39 | 41 | 44 | 47 | 49 | 52 | 55 | 57 | 60 | 62 | 65 | 68 | 70 |
| 9 | 42 | 45 | 48 | 51 | 54 | 57 | 60 | 63 | 66 | 69 | 72 | 75 | 79 | 82 |
| 10 | 48 | 51 | 55 | 58 | 62 | 65 | 69 | 72 | 75 | 79 | 82 | 86 | 89 | 93 |
| 11 | 54 | 57 | 61 | 65 | 69 | 73 | 77 | 81 | 85 | 89 | 93 | 96 | 100 | 104 |
| 12 | 60 | 64 | 68 | 72 | 77 | 81 | 85 | 90 | 94 | 98 | 103 | 107 | 111 | 116 |
| 13 | 65 | 70 | 75 | 80 | 84 | 89 | 94 | 99 | 103 | 108 | 113 | 118 | 122 | 127 |
| 14 | 71 | 77 | 82 | 87 | 92 | 97 | 102 | 107 | 113 | 118 | 123 | 128 | 133 | 139 |
| 15 | 77 | 83 | 88 | 94 | 100 | 105 | 111 | 116 | 122 | 128 | 133 | 139 | 144 | 150 |
| 16 | 83 | 89 | 95 | 101 | 107 | 113 | 119 | 125 | 131 | 137 | 143 | 150 | 156 | 162 |
| 17 | 89 | 96 | 102 | 109 | 115 | 121 | 128 | 134 | 141 | 147 | 154 | 160 | 167 | 173 |
| 18 | 95 | 102 | 109 | 116 | 123 | 130 | 136 | 143 | 150 | 157 | 164 | 171 | 178 | 185 |
| 19 | 101 | 109 | 116 | 123 | 130 | 138 | 145 | 152 | 160 | 167 | 174 | 182 | 189 | 196 |
| 20 | 107 | 115 | 123 | 130 | 138 | 146 | 154 | 161 | 169 | 177 | 185 | 193 | 200 | 208 |
| 21 | 113 | 121 | 130 | 138 | 146 | 154 | 162 | 170 | 179 | 187 | 195 | 203 | 212 | 220 |
| 22 | 119 | 128 | 136 | 145 | 154 | 162 | 171 | 180 | 188 | 197 | 206 | 214 | 223 | 232 |

*Таблица X*

Стандартные значения критерия Стьюдента

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Число степеней свободы | Уровни значимости | | | | Число степеней свободы | Уровни значимости | | | |
| 0,95 | 0,99 | 0,999 | | 0,95 | 0,99 | | 0,999 |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18 | 12,71  4,30  3,18  2,78  2,57  2,45  2,36  2,31  2,26  2,23  2,20  2,18  2,16  2,14  2,13  2,12  2,11  2,10 | 63,66  9,92  5,84  4,60  4,03  3,71  3,50  3,36  3,25  3,17  3,11  3,05  3,01  2,98  2,95  2,92  2,90  2,88 | | 636,62  31,60  12,94  8,61  6,86  5,96  5,40  5,04  4,78  4,59  4,49  4,32  4,22  4,14  4,07  4,01  3,96  3,92 | 19  20  21  22  23  24  25  26  27  28  29  30  35  40  60  120  ∞ | 2,09  2,09  2,08  2,07  2,07  2,06  2,06  2,06  2,05  2,05  2,05  2,05  2,04  2,02  2,00  1,98  1,96 | 2,86  2,85  2,83  2,82  2,81  2,80  2,79  2,78  2,77  2,76  2,76  2,76  2,75  2,70  2,66  2,62  2,58 | 3,88  3,85  3,82  3,79  3,77  3,74  3,72  3,71  3,69  3,66  3,66  3,66  3,65  3,55  3,46  3,37  3,29 | |

*Таблица* *XI*

**Стандартные значения критерия Фишера, используемые**

**для оценки достоверности различий между двумя выборками**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Степени свободы  (ν) | Уровень значимости | | | Степени свободы  (ν) | Уровень значимости | | |
| 0,95 | 0,99 | 0,999 | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
| 3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24  25  26  27 | 10,13  7,71  6,61  5,99  5,59  5,32  5,12  4,96  4,84  4,75  4,67  4,60  4,54  4,49  4,45  4,41  4,38  4,35  4,32  4,30  4,28  4,26  4,24  4,22  4,21 | 34,12  21,20  16,26  13,74  12,25  11,26  10,56  10,04  9,65  9,33  9,07  8,86  8,68  8,53  8,40  8,28  8,18  8,10  8,02  7,94  7,88  7,82  7,77  7,72  7,68 | 167,5  74,1  47,0  35,5  29,2  25,4  22,9  21,0  19,7  18,6  17,8  17,1  16,6  16,1  15,7  15,4  15,1  14,8  14,6  14,4  14,2  14,0  13,9  13,7  13,6 | 28  29  30  32  34  36  38  40  42  44  46  48  50  55  60  65  70  80  100  125  150  200  400  1000  ∞ | 4,20  4,18  4,17  4,15  4,13  4,11  4,10  4,08  4,07  4,06  4,05  4,04  4,03  4,02  4,00  3,99  3,98  3,96  3,94  3,92  3,91  3,89  3,86  3,85  3,84 | 7,64  7,60  7,56  7,50  7,44  7,39  7,35  7,31  7,27  7,24  7,21  7,19  7,17  7,12  7,08  7,04  7,01  6,96  6,90  6,84  6,81  6,76  6,70  6,66  6,64 | 13,5  13,4  13,3  13,2  13,1  13,0  12,9  12,8  12,7  12,5  12,4  12,3  12,2  12,1  12,0  11,9  11,6  11,6  11,5  11,4  11,3  11,2  11,0  10,9  10,8 |

*Таблица XII*

**Величины угла *ϕ* в радианах для разных процентных долей**

**(угловое преобразование Фишера)**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| % доля  (*P*) | ϕ,  рад. | % доля  (*P*) | ϕ,  рад. | % доля  (*P*) | ϕ,  рад. | % доля  (*P*) | ϕ,  рад. |
| 0,1  0,2  0,3  0,4  0,5  0,6  0,7  0,8  0,9  1,0  1,5  2,0  2,5  3,0  3,5  4,0  4,5  5,0  5,5  6,0  6,5  7,0  7,5  8,0  8,5  9,0  9,5  10  11  12  13  14  15  16 | 0,063  0,090  0,110  0,127  0,142  0,155  0,168  0,179  0,190  0,200  0,246  0,284  0,318  0,348  0,376  0,403  0,428  0,451  0,474  0,495  0,516  0,536  0,555  0,574  0,592  0,609  0,627  0,644  0,676  0,708  0,738  0,767  0,795  0,823 | 17  18  19  20  21  22  23  24  25  26  27  28  29  30  31  32  33  34  35  36  37  38  39  40  41  42  43  44  45  46  47  48  49  50 | 0,850  0,876  0,902  0,927  0,952  0,976  1,000  1,024  1,047  1,070  1,093  1,115  1,137  1,159  1,181  1,202  1,224  1,245  1,266  1,287  1,308  1,328  1,349  1,369  1,390  1,410  1,430  1,450  1,471  1,491  1,511  1,531  1,551  1,571 | 51  52  53  54  55  56  57  58  59  60  61  62  63  64  65  66  67  68  69  70  71  72  73  74  75  76  77  78  79  80  81  82  83  84 | 1,591  1,611  1,631  1,651  1,671  1,691  1,711  1,732  1,752  1,772  1,793  1,813  1,834  1,855  1,876  1,896  1,918  1,939  1,961  1,982  2,004  2,026  2,049  2,072  2,094  2,118  2,141  2,165  2,190  2,214  2,240  2,265  2,292  2,319 | 85  86  87  88  89  90  90,5  91,0  91,5  92,0  92,5  93,0  93,5  94,0  94,5  95,0  95,5  96,0  96,5  97,0  97,5  98,0  99,0  99,1  99,2  99,3  99,4  99,5  99,6  99,7  99,8  99,9  100 | 2,346  2,375  2,404  2,434  2,466  2,498  2,515  2,532  2,550  2,568  2,587  2,606  2,626  2,647  2,668  2,691  2,714  2,739  2,765  2,793  2,824  2,896  2,941  2,952  2,962  2,974  2,987  3,000  3,015  3,032  3,052  3,078  3,142 |

*Таблица XIII*

**Критические значения коэффициентов корреляции**

**Пирсона и Спирмена**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Степени  свободы  *n* – 2 | Уровень  значимости | | Степени  свободы  *n* – 2 | Уровень  значимости | | Степени  свободы  *n* – 2 | Уровень  значимости | |
| 0,95 | 0,99 | 0,95 | 0,99 | 0,95 | 0,99 |
| 5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19 | 0,75  0,71  0,67  0,63  0,60  0,58  0,55  0,53  0,51  0,50  0,48  0,47  0,46  0,44  0,43 | 0,87  0,83  0,80  0,77  0,74  0,71  0,68  0,66  0,64  0,62  0,61  0,59  0,58  0,56  0,55 | 20  21  22  23  24  25  26  27  28  29  30  35  40  45  50 | 0,42  0,41  0,40  0,40  0,39  0,38  0,37  0,37  0,36  0,36  0,35  0,33  0,30  0,29  0,27 | 0,54  0,53  0,52  0,51  0,50  0,49  0,48  0,47  0,46  0,46  0,45  0,42  0,39  0,37  0,35 | 60  70  80  90  100  125  150  200  300  400  500  700  900  1000 | 0,25  0,23  0,22  0,21  0,20  0,17  0,16  0,14  0,11  0,10  0,09  0,07  0,06  0,06 | 0,33  0,30  0,28  0,27  0,25  0,23  0,21  0,18  0,15  0,13  0,12  0,10  0,09  0,09 |

*Таблица XIV*

Критические значения коэффициента *τ* Кендалла

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Объем  выборки | Уровни значимости | | | Объем  выборки | Уровни значимости | | |
| 0,95 | 0,99 | 0,999 | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
| 5  6  7  8  9  10  11  12 | 0,91  0,77  0,71  0,61  0,56  0,51  0,48  0,45 | 0,98  0,87  0,79  0,72  0,67  0,63  0,59 | 0,99  0,91  0,84  0,79  0,75 | 13  14  15  16  17  18  19  20 | 0,43  0,41  0,39  0,38  0,36  0,35  0,34  0,33 | 0,56  0,54  0,51  0,49  0,47  0,46  0,44  0,43 | 0,71  0,68  0,65  0,62  0,60  0,58  0,56  0,54 |

*Таблица XV*

Число пар значений, достаточное для статистической значимости

коэффицентов корреляции Пирсона и Спирмена

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *r* | Уровни значимости | | | *r* | Уровни значимости | | |
| 0,95 | 0,99 | 0,999 | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
| 0,01  0,02  0,03  0,04  0,05  0,06  0,07  0,08  0,09  0,10  0,11  0,12  0,13  0,14  0,15  0,16  0,17  0,18  0,19  0,20  0,21  0,22  0,23  0,24  0,25  0,26  0,27  0,28  0,29  0,30  0,31  0,32  0,33  0,34  0,35  0,36  0,37  0,38  0,39  0,40  0,41  0,42  0,43  0,44  0,45 | 38407  9603  4269  2403  1539  1069  787  604  477  383  317  267  228  196  171  151  133  119  107  97  87  80  73  68  62  57  53  49  46  43  40  38  36  34  32  30  28  27  26  24  23  22  21  20  19 | 66503  16628  7392  4159  2263  1850  1360  1042  824  661  548  462  392  337  295  259  228  204  183  165  149  136  124  114  105  97  90  83  78  73  68  63  60  56  53  50  47  44  42  40  38  36  34  33  31 | 108903  27228  12103  6809  4359  3028  2225  1704  1347  1081  896  754  640  550  481  422  373  332  297  270  242  211  202  185  170  157  145  135  125  117  109  102  96  90  85  80  75  71  67  64  60  57  55  52  49 | 0,46  0,47  0,48  0,49  0,50  0,51  0,52  0,53  0,54  0,55  0,56  0,57  0,58  0,59  0,60  0,61  0,62  0,63  0,64  0,65  0,66  0,67  0,68  0,69  0,70  0,71  0,72  0,73  0,74  0,75  0,76  0,77  0,78  0,79  0,80  0,81  0,82  0,83  0,84  0,85  0,86  0,87  0,88  0,89  0,90 | 19  18  17  16  16  15  15  14  14  13  13  12  12  11  11  11  10  10  10  9  9  9  9  8  8  8  8  7  7  7  7  7  7  6  6  6  6  6  6  5  5  5  5  5  5 | 30  29  27  26  25  24  23  22  21  20  20  19  18  18  17  16  16  15  15  14  14  13  13  12  12  11  11  11  10  10  10  9  9  9  9  8  8  8  7  7  7  7  7  6  6 | 47  45  43  41  39  37  36  34  33  32  30  29  28  27  26  25  24  23  22  21  20  20  19  18  18  17  16  16  15  15  14  14  13  13  12  12  11  11  10  10  10  9  9  8  8 |

*Таблица XVI*

Критические значения дихотомического коэффициента корреляции ϕ

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Объем выборки | Уровни значимости | | | Объем выборки | Уровни значимости | | |
| 0,95 | 0,99 | 0,999 | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
| 5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  22  24 | 0,88  0,81  0,75  0,70  0,66  0,62  0,60  0,57  0,55  0,53  0,51  0,49  0,48  0,47  0,45  0,44  0,42  0,41 | 0,98  0,92  0,86  0,82  0,78  0,75  0,72  0,69  0,67  0,65  0,63  0,61  0,60  0,58  0,56  0,53 | 1,00  0,95  0,92  0,88  0,85  0,83  0,80  0,78  0,76  0,74  0,71  0,68 | 26  28  30  35  40  45  50  60  70  80  90  100  125  150  175  200  250  500 | 0,39  0,38  0,36  0,34  0,31  0,30  0,28  0,26  0,24  0,22  0,21  0,20  0,18  0,17  0,15  0,14  0,13  0,09 | 0,51  0,49  0,48  0,44  0,41  0,39  0,37  0,34  0,31  0,29  0,28  0,26  0,24  0,22  0,20  0,19  0,17  0,12 | 0,65  0,63  0,61  0,56  0,53  0,50  0,47  0,43  0,40  0,37  0,35  0,33  0,30  0,27  0,25  0,24  0,21  0,15 |

*Таблица XVII*

Границы критической области для критерия знаков

| *n* | Уровни значимости | | | | *n* | Уровни значимости | | | | *n* | Уровни значимости | | | | *n* | Уровни значимости | | | | |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0,95 | | 0,99 | | 0,95 | | 0,99 | | 0,95 | | 0,99 | | 0,95 | | 0,99 | | |
| 5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24  25  26  27  28 | 0  1  1  1  2  2  2  3  3  3  4  4  5  5  5  6  6  6  7  7  8  8  8  9 | 5  5  6  7  7  8  9  9  10  11  11  12  12  13  14  14  15  16  16  17  17  18  19  19 | 0  0  0  1  1  1  1  2  2  2  3  3  3  4  4  4  5  5  5  6  6  7  7  7 | 5  6  7  7  8  9  10  10  11  12  12  13  14  14  15  16  16  17  18  18  19  19  20  21 | 29  30  31  32  33  34  35  36  37  38  39  40  41  42  43  44  45  46  47  48  49  50  51  52 | 9  10  10  10  11  11  12  12  13  13  13  14  14  15  15  16  16  16  17  17  18  18  19  19 | 20  20  21  22  22  23  23  24  24  25  26  26  27  27  28  28  29  30  30  31  31  32  32  33 | 8  8  8  9  9  10  10  10  11  11  12  12  12  13  13  14  14  14  15  15  16  16  16  17 | 21  22  23  23  24  24  25  26  26  27  27  28  29  29  30  30  31  32  32  33  33  34  35  35 | 53  54  55  56  57  58  59  60  61  62  63  64  65  66  67  68  69  70  71  72  73  74  75  76 | 19  20  20  21  21  22  22  22  23  23  24  24  25  25  26  26  26  27  27  28  28  29  29  29 | 34  34  35  35  36  36  37  38  38  39  39  40  40  41  41  42  43  43  44  44  45  45  46  47 | 17  18  18  18  19  19  20  20  21  21  21  22  22  23  23  23  24  24  25  25  26  26  26  27 | 36  36  37  38  38  39  39  40  40  41  42  42  43  43  44  45  45  46  46  47  47  48  49  49 | 77  78  79  80  81  82  83  84  85  86  87  88  89  90  91  92  93  94  95  96  97  98  99  100 | 30  30  31  31  32  32  33  33  33  34  34  35  35  36  36  37  37  38  38  38  39  39  40  40 | 47  48  48  49  49  50  50  51  52  52  53  53  54  54  55  55  56  56  57  58  58  59  59  60 | | 27  28  28  29  29  29  30  30  31  31  32  32  32  33  33  34  34  35  35  35  36  36  37  37 | 50  50  51  51  52  53  53  54  54  55  55  56  57  57  58  58  59  59  60  61  61  62  62  63 |

### *Таблица XVIII*

**Критические значения критерия Т Вилкоксона**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Объем  выборки |  |  | Объем  выборки |  |  |
| 0,95 | 0,99 | 0,95 | 0,99 |
| 5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24  25  26  27 | 0  2  3  5  8  10  13  17  21  25  30  35  41  47  53  60  67  75  83  91  100  110  119 | -  -  0  1  3  5  7  9  12  15  19  23  27  32  37  43  49  55  62  69  76  84  92 | 28  29  30  31  32  33  34  35  36  37  38  39  40  41  42  43  44  45  46  47  48  49  50 | 130  140  151  163  175  187  200  213  227  241  256  271  286  302  319  336  353  371  389  407  426  446  466 | 101  110  120  130  140  151  162  173  185  198  211  224  238  252  266  281  296  312  328  345  362  379  397 |

*Таблица XIX*

**Таблицы Фишера, используемые для одно- и двухфакторного**

**дисперсионного анализа (β1 = 0,95)**

| ν2 | ν1 | | | | | | | | | |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24  25  26  27  28  29  30  32  34  36  38  40  42  44  46  48  50  55  60  65  70  80  100  125  150  200  400  1000  ∞ | 10,13  7,71  6,61  5,99  5,59  5,32  5,12  4,96  4,84  4,75  4,67  4,60  4,54  4,49  4,45  4,41  4,38  4,35  4,32  4,30  4,28  4,26  4,24  4,22  4,21  4,20  4,18  4,17  4,15  4,13  4,11  4,10  4,08  4,07  4,06  4,05  4,04  4,03  4,02  4,00  3,99  3,98  3,96  3,94  3,92  3,91  3,89  3,86  3,85  3,84 | 9,55  6,94  5,79  5,14  4,74  4,46  4,26  4,10  3,98  3,88  3,80  3,74  3,68  3,63  3,59  3,55  3,52  3,49  3,47  3,44  3,42  3,40  3,38  3,37  3,35  3,34  3,33  3,32  3,30  3,28  3,26  3,25  3,23  3,22  3,21  3,20  3,19  3,18  3,17  3,15  3,14  3,13  3,11  3,09  3,07  3,06  3,04  3,02  3,00  2,99 | 9,28  6,59  5,41  4,76  4,35  4,07  3,86  3,71  3,59  3,49  3,41  3,34  3,29  3,24  3,20  3,16  3,13  3,10  3,07  3,05  3,03  3,01  2,99  2,98  2,96  2,95  2,93  2,92  2,90  2,88  2,86  2,85  2,84  2,83  2,82  2,81  2,80  2,79  2,78  2,76  2,75  2,74  2,72  2,70  2,68  2,67  2,65  2,62  2,61  2,60 | 9,12  6,39  5,19  4,53  4,12  3,84  3,63  3,48  3,36  3,26  3,18  3,11  3,06  3,01  2,96  2,93  2,90  287  2,84  2,82  2,80  2,78  2,76  2,74  2,73  2,71  2,70  2,69  2,67  2,65  2,63  2,62  2,61  2,59  2,58  2,57  2,56  2,56  2,54  2,52  2,51  2,50  2,48  2,46  2,44  2,43  2,41  2,39  2,38  2,37 | 9,01  6,26  5,05  4,39  3,97  3,69  3,48  3,33  3,20  3,11  3,02  2,96  2,90  2,85  2,81  2,77  2,74  2,71  2,68  2,66  2,64  2,62  2,60  2,59  2,57  2,56  2,54  2,53  2,51  2,49  2,48  2,46  2,45  2,44  2,43  2,42  2,41  2,40  2,38  2,37  2,36  2,35  2,33  2,30  2,29  2,27  2,26  2,23  2,22  2,21 | 8,94  6,16  4,95  4,28  3,87  3,58  3,37  3,22  3,09  3,00  2,92  2,85  2,79  2,74  2,70  2,66  2,63  2,60  2,57  2,55  2,53  2,51  2,49  2,47  2,46  2,44  2,43  2,42  2,40  2,38  2,36  2,35  2,34  2,32  2,31  2,30  2,30  2,29  2,27  2,25  2,24  2,23  2,21  2,19  2,17  2,16  2,14  2,12  2,10  2,09 | 8,88  6,09  4,88  4,21  3,79  3,50  3,29  3,14  3,01  2,92  2,84  2,77  2,70  2,66  2,62  2,58  2,55  2,52  2,49  2,47  2,45  2,43  2,41  2,39  2,37  2,36  2,35  2,34  2,32  2,30  2,28  2,26  2,25  2,24  2,23  2,22  2,21  2,20  2,18  2,17  2,15  2,14  2,12  2,10  2,08  2,07  2,05  2,03  2,02  2,01 | 8,84  6,04  4,82  4,15  3,73  3,44  3,23  3,07  2,95  2,85  2,77  2,70  2,64  2,59  2,55  2,51  2,48  2,45  2,42  2,40  2,38  2,36  2,34  2,32  2,30  2,29  2,28  2,27  2,25  2,23  2,21  2,19  2,18  2,17  2,16  2,14  2,14  2,13  2,11  2,10  2,08  2,07  2,05  2,03  2,01  2,00  1,98  1,96  1,95  1,94 | 8,81  6,00  4,78  4,10  3,68  3,39  3,18  3,02  2,90  2,80  2,72  2,65  2,59  2,54  2,50  2,46  2,43  2,40  2,37  2,35  2,32  2,30  2,28  2,27  2,25  2,24  2,22  2,21  2,19  2,17  2,15  2,14  2,12  2,11  2,10  2,09  2,08  2,07  2,05  2,04  2,02  2,01  1,99  1,97  1,95  1,94  1,92  1,90  1,89  1,88 | 8,78  5,96  4,74  4,06  3,63  3,34  3,13  2,97  2,86  2,76  2,67  2,60  2,55  2,49  2,45  2,41  2,38  2,35  2,32  2,30  2,28  2,26  2,24  2,22  2,20  2,19  2,18  2,16  2,14  2,12  2,10  2,09  2,07  2,06  2,05  2,04  2,03  2,02  2,00  1,99  1,98  1,97  1,95  1,92  1,90  1,89  1,87  1,85  1,84  1,83 |