9. Чупахина Г.Н. Количественное определение аскорбиновой кислоты колориметрическим методом // Специальный практикум по биохимии и физиологии растений. Томск: Изд-во ТГУ. – 1974. – С.27-31.

10. Асамов Д.К., Рахимова С.Т. К методике определения активности аскорбатоксидазы, полифенолоксидазы и пероксидазы // Актуальные вопросы физиологии, биохимии и биотехнологии. Ташкент: Изд-во ТГУ, – 1991. – С. 122-126.

ПРИМЕРЫ МАТРИЧНЫХ КОЛЕЦ НАД КВАТЕРНИОНАМИ И ПОЛИНОМАМИ

Авторы: ***Киселевич Е.А.***, ***Довгодько В.А.***,
студентки 4-го курса специальности «Математика»
Научный руководитель: ***Демисенов Б.Н.***, *к.ф.-м.н., доцент*
Костанайский государственный педагогический университет

Аннотация

Матрицы в основном рассматриваются над числовыми полями или кольцами. В этой работе матрицы рассмотрены над нечисловыми алгебраическими структурами, – телом кватернионов и кольцом полиномов. Этот подход позволяет строить новые примеры колец, которые позволят получать интересные свойства.

Теория кватернионов берёт своё начало с эпохи Уильяма Роуана Гамильтона (1805-1865). Гамильтон был всесторонне развитым человеком.Уже в 14 лет он владел девятью языками. Гамильтон в течении длительных десяти лет без успехов пытался найти правило умножения триплетов. Если разбираться с самого начала, то дуплеты – это комплексные числа. Их записывают так: $(x + yi)$, где i – мнимая единица. Ее квадрат равен -1. Это позволяет извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. Но встает проблема превращения точек пространства в числа. Здесь снова введем систему координат и запишем точки в виде набора уже трех координат $(x; y; z)$. Триплеты можно будет считать числами, если научиться их умножать, обладая, вместе со свойствами сложения, обычными способами умножения этих операций. Это поначалу казалась несложной задачей. Складывать векторы следовало по формуле $(x; y; z) + (k; l; m) = (x + k; y + l; z + m)$. Оставалось найти формулу умножения, подобную формуле умножения дуплетов $(x; y)(k; l) = (xk - yl; xl + ky)$, но Гамильтон безуспешно пытался подбирать формулы для умножения триплетов.

На тот момент уже было известно правило векторного произведения. Если векторы заданы своими координатами $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\overline{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то векторное произведение можно записать следующим образом:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Не смотря на неудачи, Гамильтон пытался решить поставленную перед собой задачу. Но эта задача не могла быть решена. Но труд не пропал даром. В 1843 г. Гамильтон вдруг решил, что для определения умножения нужно рассматривать не триплеты (тройки чисел), а четверки, или кватернионы.

Случай на Брогемском мосту

В одном из писем к своему сыну Гамильтон писал: «Это был 16-й день октября, который случился в понедельник, в день заседания Совета Королевской Ирландской Академии, где я должен был председательствовать. Я направлялся туда с твоей матерью вдоль Королевского канала; и, хотя она говорила мне какие-то отдельные фразы, я их почти не воспринимал, так как в моем сознании подспудно что-то творилось. Неожиданно как будто бы замкнулся электрический контур; блеснула искра, предвещающая многие длительные годы определенно направленной мысли и труда, моего – если доведется, или труда других, если мне будет даровано достаточно сознательной жизни, чтобы сообщить о своем открытии. Я оказался не в состоянии удержаться от желания высечь ножом на мягком камне Брогемского моста фундаментальную формулу о символах i, j, k: вот сюда

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

содержащую решение проблемы, но, конечно, эта запись с тех пор стерлась. Однако более прочное упоминание осталось в Книге записей Совета Академии за этот день, где засвидетельствовано, что я попросил и получил разрешение на доклад о кватернионах на первом заседании сессии, который и был прочитан соответственно в Понедельник 13-го следующего месяца – ноября» [1].

Для построения примеров, необходимо ввести понятие кватернионов, множество которых мы обозначим через H.

Кватернионами называется четвёрка действительных чисел (a, b, c, d), которые удобно записывать в виде $\alpha = a + i \cdot b + j \cdot c + k \cdot d$, где i, j, k – новые числа, являющиеся аналогами мнимой единицы в комплексных числах. Для чисел i, j, k выдвигаются следующие требования:

1) $i^2 = j^2 = k^2 = -1$;

2) $ij = k, ki = j, ji = -k,\ kj = -i, ik = -j$.

По определению операции сложения и умножения кватернионов производятся по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных членов с учетом требований 1 и 2.

Согласно этому определению, если q_1 и q_1 – два кватерниона, то:

$$q_1 + q_2 = (x_1 + y_1 i + z_1 j + h_1 k) + (x_2 + y_2 i + z_2 j + h_2 k) =$$
$$= x_1 + y_1 i + z_1 j + +h_1 k + x_2 + y_2 i + z_2 j + h_2 k =$$
$$= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i + (z_1 + z_2)j + (h_1 + h_2)k.$$

Это, разумеется, привычное нам «покоординатное» сложение. Далее, произведение кватернионов вычисляется так:

$$q_1q_2 = (x_1 + y_1i + z_1j + h_1k)(x_2 + y_2i + z_2j + h_2k) =$$
$$= x_1x_2 + x_1y_2i + x_1z_2j + x_1h_2k + y_1x_2i + y_1y_2i^2 + y_1z_2ij + y_1h_2ik +$$
$$+z_1x_2j + z_1y_2ji + z_1z_2j^2 + z_1h_2jk + h_1x_2k + h_1y_2ki + h_1z_2kj + h_1h_2k^2 =$$
$$=(x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2 - h_1h_2) + (x_1y_2 + y_1x_2 + z_1h_2 - h_1z_2)i +$$
$$+(x_1z_2 + +y_1h_2 + z_1x_2 - h_1y_2)j + (x_1h_2 + y_1z_2 - z_1y_2 + h_1x_2)k. \text{ (см. [4])}$$

Умножение кватернионов можно представить в виде таблицы (2):

$\cdot$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\mathbf{1}$	1	i	j	k
$\boldsymbol{i}$	i	-1	k	$-j$
$\boldsymbol{j}$	j	$-k$	-1	i
$\boldsymbol{k}$	k	j	$-i$	1

(2)

Оно некоммутативно. Умножение попарно различных мнимых единиц совершается по тем же правилам, что и векторное умножение $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ в векторной алгебре (1). Сопряженный с $\alpha = a + bi + cj + dk$ кватернион, по определению, равен $\bar{\alpha} = a - bi - cj - dk$.

Произведение $\alpha \cdot \bar{\alpha} -$ обозначается как $n(\alpha)$ и называется *нормой.*

Покажем, что произведение $\alpha \cdot \bar{\alpha}$ равно $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

$$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$
$$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) =$$
$$= aa - abi - acj - adk + bia - bibi - bicj - bidk + cja - cjbi - cjcj -$$
$$-cjdk + dka - dkbi - dkcj - dkdk=$$
$$= a^2e - abi - acj - adk + bai + b^2e - bck + bdj + caj + bck + c^2e -$$
$$-cdi + adk - bdj + dci + c^2e,$$

приведём подобные слагаемые и получим требуемое: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. (см. [2])

Легко показать, что множество H вместе с введёнными операциями образует тело.

Введём понятие матрицы кватернионов. Матрицы, элементами которой являются кватернионы из тела H, будем называть матрицами кватернионов.

Пусть $A, B, C -$ 2×2 матрицы кватернионов.

$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{pmatrix} \in M$, где M множество матриц кватернионов, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in H$, $i = \overline{1,4}$.

Определим на этом множестве следующие операции сложения и умножения:

Сумма матриц кватернионов A, B определяется обычным способом как покомпонентное *сложение:*

$$A+B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 & \alpha_2+\beta_2\\ \alpha_3+\beta_3 & \alpha_4+\beta_4\end{pmatrix}.$$

Умножение двух матриц кватернионов A, B так же следует обычному правилу умножения матриц:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_3 & \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_4\\ \alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_3 & \alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_4\end{pmatrix}.$$

Покажем, что множество M относительно введённых операций, образует кольцо.

Определение. *Кольцом* называется непустое множество с двумя бинарными операциями: сложением «+» и умножением «·», если K образует абелеву группу по сложению и умножение двусторонне дистрибутивно относительно сложения [3].

Проверим, что множеств M с определёнными на нём операциями образует абелеву группу:

Ассоциативность по сложению:

для любых $A, B, C \in M$, $(A+B)+\ C=A+(B+C)$.

$$(A+B)+\ C=$$
$$=\left(\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\\ \gamma_3 & \gamma_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha_1+\beta_1)+\gamma_1 & (\alpha_2+\beta_2)+\gamma_2\\ (\alpha_3+\beta_3)+\gamma_3 & (\alpha_4+\beta_4)+\gamma_4\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha_1+(\beta_1+\gamma_1) & \alpha_2+(\beta_2+\gamma_2)\\ \alpha_3+(\beta_3+\gamma_3) & \alpha_4+(\beta_4+\gamma_4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\\ \gamma_3 & \gamma_4\end{pmatrix}\right)=$$
$$=A+(B+C).$$

Существование нейтрального элемента по сложению:

существует такая матрица $N=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in M$, что для любой матрицы $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Существование противоположного элемента:

для любой матрицы $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}\in M$, существует такая матрица $(-A)=-\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha_1 & -\alpha_2\\ -\alpha_3 & -\alpha_4\end{pmatrix}$,

что:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\alpha_1 & -\alpha_2\\ -\alpha_3 & -\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha_1 & -\alpha_2\\ -\alpha_3 & -\alpha_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}.$$

Коммутативность по сложению:

для любого $A, B \in M$, что $A + B = B + A$:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 & \alpha_2+\beta_2\\ \alpha_3+\beta_3 & \alpha_4+\beta_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1+\alpha_1 & \beta_2+\alpha_2\\ \beta_3+\alpha_3 & \beta_4+\alpha_4\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}.$$

Проверим *ассоциативность по умножению:*
для любых $A, B, C \in M (AB)C = A(BC)$

$$(AB)C = \left(\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\\ \gamma_3 & \gamma_4\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}(\alpha_1\beta_1)+(\alpha_2\beta_3) & (\alpha_1\beta_2)+(\alpha_2\beta_4)\\ (\alpha_3\beta_1)+(\alpha_4\beta_3) & (\alpha_3\beta_2)+(\alpha_4\beta_4)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\\ \gamma_3 & \gamma_4\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_3)\gamma_1+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_4)\gamma_3 & (\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_3)\gamma_2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_4)\gamma_4\\ (\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_3)\gamma_1+(\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_4)\gamma_3 & (\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_3)\gamma_2+(\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_4)\gamma_4\end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\\ \gamma_3 & \gamma_4\end{pmatrix}\right)=$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_3 & \beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_4\\ \beta_3\gamma_1+\beta_4\gamma_3 & \beta_3\gamma_2+\beta_4\gamma_4\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha_1(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_3)+\alpha_2(\beta_3\gamma_1+\beta_4\gamma_3) & \alpha_1(\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_4)+\alpha_2(\beta_3\gamma_2+\beta_4\gamma_4)\\ \alpha_3(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_3)+\alpha_4(\beta_3\gamma_1+\beta_4\gamma_3) & \alpha_3(\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_4)+\alpha_4(\beta_3\gamma_2+\beta_4\gamma_4)\end{pmatrix}$$

При раскрытии скобок и приведении подобных слагаемых внутри матрицы и в первом и во втором случае, мы увидим, что ассоциативность выполняется.

Проверим *левую дистрибутивность*:
для любых $A, B, C \in M$, $A(B + C) = AB + AC$

$$A(B+C) = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\\ \gamma_3 & \gamma_4\end{pmatrix}\right)=$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1+\gamma_1 & \beta_2+\gamma_2\\ \beta_3+\gamma_3 & \beta_4+\gamma_4\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha_1(\beta_1+\gamma_1)+\alpha_2(\beta_3+\gamma_3) & \alpha_1(\beta_2+\gamma_2)+\alpha_2(\beta_4+\gamma_4)\\ \alpha_3(\beta_1+\gamma_1)+\alpha_4(\beta_3+\gamma_3) & \alpha_3(\beta_2+\gamma_2)+\alpha_4(\beta_4+\gamma_4)\end{pmatrix},$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\\ \gamma_3 & \gamma_4\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_3 & \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_4\\ \alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_3 & \alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_3 & \alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_4\\ \alpha_3\gamma_1+\alpha_4\gamma_3 & \alpha_3\gamma_2+\alpha_4\gamma_4\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_3+\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_3 & \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_4+\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_4\\ \alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_3+\alpha_3\gamma_1+\alpha_4\gamma_3 & \alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_4+\alpha_3\gamma_2+\alpha_4\gamma_4\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha_1(\beta_1+\gamma_1)+\alpha_2(\beta_3+\gamma_3) & \alpha_1(\beta_2+\gamma_2)+\alpha_2(\beta_4+\gamma_4)\\ \alpha_3(\beta_1+\gamma_1)+\alpha_4(\beta_3+\gamma_3) & \alpha_3(\beta_2+\gamma_2)+\alpha_4(\beta_4+\gamma_4)\end{pmatrix}.$$

Сравнивая правые части двух выражений, видим, что они равны.

Аналогично, показывается выполнение правой дистрибутивности.

Матрицу кватернионов, можно рассматривать как матрицу над кольцом полиномов от кватернионов. В этом случае кватернион можно определить как многочлен вида $x + yi + zj + hk$ от переменных i, j, k, где $x, y, z, h \in R$. Сумму и произведение кватернионов мы указали выше. Определение суммы и произведения полиномов вводятся так же, как и для кватернионов. Например, пусть даны два многочлена степени 2:

$a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ и $b(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$,

то их сумма и произведение вычисляются так:

$$a(t) + b(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) + (b_0 + b_1 t + b_2 t^2) =$$
$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2,$$
$$a(t) \cdot b(t) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)t^2 +$$
$$+(a_1 b_2 + a_2 b_1)t^3 + a_2 b_2 t^4,$$

где $t -$ это кватернионы. Очевидно, что приведение подобных членов полинома основано на попарной перестановочности всех элементов a_i, b_j, t^k. (см.[4])

Здесь уже аналог основной теоремы алгебры не верен. Так уравнение $t^2 + 1 = 0$ имеет не менее шести решений: $\pm i, \pm j, \pm k$.

Таким образом, построенное в работе множество матриц над телом кватернионов образует кольцо, которое можно рассматривать, как уже отмечалось, как матрицу над кольцом полиномов от кватернионов.

Список использованной литературы

1. http://mirznanii.com/a/312547-2/kvaterniony-2

2. HersteinI.N., Abstract algebra (3ed.,Wiley,1995) (KA)(T)(266s)_MAt_

3. Вавилов Н.А., Конкретная теория колец.- СПб.:СПбГУ, 2006.-129 с.

4. А.Н. Земляков, Б.М. Ивлев, 17 задач по анализу. / Журнал «Квант». Изд. «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. – Москва, 1977 (№1).

ПРИМЕРЫ ГРУПП БЛОЧНЫХ МАТРИЦ, ИХ ПОДГРУППЫ И НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ

Авторы: ***Козловский С.А., Байтлеуова С.Т.,***
студенты 4 курса специальности «Математика»
Научный руководитель: ***Демисенов Б.Н.,*** *к.ф-м. н., доцент*
Костанайский государственный педагогический университет