$$x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

$2.sin\frac{7x}{2} = 0$

Это частный случай простейшего уравнение вида $\sin x = a$.

Получим

$$\frac{7x}{2} = \pi m, m \in Z,$$

$$x = \frac{2\pi m}{7}, m \in Z.$$

$3.cosx = 0$

Это частный случай простейшего уравнение вида $\cos x = a$.

Получим

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ:$x = \pi + 2\pi n, n \in Z, x = \frac{2\pi m}{7}, m \in Z, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$

Мы рассмотрели некоторые виды тригонометрических уравнений и способы их решения. В математике, к нашему сожалению, не существует одного общего способа решения, следуя которому можно было решить любое уравнения с тригонометрическими функциями. Умение видеть способ решения уравнения приходит с опытом.

Список использованных источников.

1.Тригонометрические уравнения :Методическое пособие для обучающихся/ Т. В.Баскакова.

2. Бородуля И.Т. Тригонометрические уравнения и неравенства: Кн. для учителя.

Асканбаева Г.Б.[1], Ульданова К.В.[2]

1. *Научный руководитель, старший преподаватель*
2. *Студент 4 курса, кафедра физико-математических и общетехнических дисциплин, специальность «Математика»*

УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть дано n-мерное векторное пространство V_n над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

В заданном пространстве V_n будет введена операция скалярного произведения, если для любых двух векторов a и b из V_n сопоставимо комплексное число, обозначаемое (a, b) и называемое скалярным произведением векторов a и b, и если для любых векторов a, b, c из V_n и любого комплексного числа α выполняются следующие аксиомы:

1. $(a, b) = \overline{(b, a)}$,

2. $(a+b,c)=(a,c)+(b,c)$,

3. $(\alpha a,b)=\alpha\cdot(a,b)$,

4. $(a,a)>0$ при $a\neq 0$ и $(a,a)=0$ при $a=0$.

Здесь следует отметить, что если $z=x+iy$, то число $\bar{z}=x+iy$ называется комплексным сопряженным к числу z (по аксиоме 1, комплексные числа (a,b) и $\overline{(b,a)}$ сопряженные).

<u>Определение:</u> Комплексное n-мерное векторное пространство, в котором введена операция скалярного произведения векторов, называется *n-мерным унитарным (эрмитовым, комплексно евклидовым) векторным пространством* и обозначается через U_{n}.[1, стр.157]

Операция скалярного произведения на унитарном пространстве является положительно определенная эрмитова форма $(\cdot,\cdot):\ V\times V\to\mathbb{C}$.

Из первых трех аксиом скалярного произведения следует:

$$(a,\alpha b)=\overline{(\alpha b,a)}=\overline{\alpha(b,a)}=\bar{\alpha}\overline{(b,a)}=\bar{\alpha}(a,b); \tag{1}$$

$$(a,b+c)=\overline{(b+c,a)}=\overline{(b,a)+(c,a)}=\overline{(b,a)}+\overline{(c,a)}=(a,b)+(a,c); \tag{2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i a_i,\sum_{j=1}^{l}\beta_j b_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\left(a_i,\sum_{j=1}^{l}\beta_j b_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\overline{\left(\sum_{j=1}^{l}\beta_j b_j,a_i\right)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_i\overline{\beta_j(b_j,a_i)}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_i\bar{\beta}_j\overline{(b_j,a_i)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_i\bar{\beta}_j(a_i,b_j). \tag{3}$$

Если в n-мерном унитарном пространстве U_n фиксирован базис $e_1,e_2,\dots,e_n$, то всевозможные векторы a и b будут иметь в нем разложения

$$a=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\,,b=\sum_{j=1}^{n}b_je_j$$

следовательно, формула (3) для векторов a иb примет вид

$$(a,b)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\,,\sum_{j=1}^{n}b_je_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i\bar{b}_j(e_i,e_j). \tag{4}$$

Для матриц эта формула будет выглядеть следующим образом:

$$(a,b)=a^{\text{T}}\Gamma\bar{b}, \tag{4'}$$

где $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)^{\text{T}},b=(b_1,b_2,\dots,b_n)^{\text{T}}$,

$$\Gamma=\begin{pmatrix}(e_i,e_j) & (e_i,e_j) & \dots & (e_i,e_j)\\ (e_i,e_j) & (e_i,e_j) & \dots & (e_i,e_j)\\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\\ (e_i,e_j) & (e_i,e_j) & \dots & (e_i,e_j)\end{pmatrix}$$ – матрица Грама.

Поскольку $(e_i,e_j)=\overline{(e_j,e_i)}$ (по аксиоме 1), то матрица Грама будет удовлетворять условию:

$$\Gamma = \overline{\Gamma}^{\mathrm{T}} = \Gamma^*, \tag{5}$$

где $*$ - транспонирование матрицы с заменой в ней элементов на комплексно сопряженные.

МатрицаА*- *сопряженная матрица* к матрице А. ЕслиА $=$ А*, то А – *эрмитова матрица.* Следовательно, согласно условию (5) матрица Г, то есть матрица Грама - эрмитова. А$^* =$ А$^{\mathrm{T}}$если матрицаА действительная.[1, стр.158]

Для унитарных пространств *длина (норма, модуль) вектора* определяется аналогично евклидовому пространству, по формуле:

$$|a| = \sqrt{(a,a)}, \tag{6}$$

где величина под знаком корня неотрицательна, в силу аксиому 4 скалярного произведения.

В отличии от евклидового пространства, в унитарном пространстве не вводится понятие *угол между векторами*. При этом, остается аналогичным евклидовому пространству, определение ортогональности двух векторов.

Векторы a и b унитарного пространства называют *ортогональными,* если выполняется условие $(a,b) = 0$.

Вообще, вся теория евклидового пространства в частности процесс ортогонализации системы векторов, понятия ортонормированного и ортогонального базиса, ортогональной проекции векторов на подпространство, ортогональное дополнение и т.д. лежит в основе унитарного пространства с теми же определениями и общей схемой рассуждения. Все же не следует забывать, что скалярное произведение в унитарном пространстве значительно отличается от скалярного произведения в евклидовом пространстве и при применении скалярного произведения быть предельно внимательным.

В любом ортонормированном базисе e унитарного пространства U_n , для векторов, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^{\mathrm{T}}$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^{\mathrm{T}}$, заданных координатами в данном базисе, формула (4) обретает вид:

$$(a,b) = a^{\mathrm{T}}\overline{b} = b^*a = a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2} + \dots + a_n\overline{b_n}. \tag{7}$$

Для скалярного квадрата формула (4) обретает вид:

$$(a,a) = a^{\mathrm{T}}\overline{a} = a^*a = a_1\overline{a_1} + a_2\overline{a_2} + \dots + a_n\overline{a_n}$$
$$= |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2. \tag{8}$$

Данные формулы очень часто применяются при решении задач в унитарном пространстве.

Квадратная матрица $A = \|a_{ik}\|_1^n$над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, строки которой образуют ортонормированную систему, то есть:

$$a_{i1}\overline{a_{k1}} + \dots + a_{in}\overline{a_{kn}} = \begin{cases} 1 \text{ при} i = k \\ 0 \text{ при } i \neq k \end{cases}, i, k = 1, \dots, n$$

называется *унитарной матрицей.*

Квадратная матрица A с комплексными элементами унитарна тогда и только тогда, когда выполняется любое из условий: $A^*A = AA^* = E, A^* = A^{-1}$, столбцы матрицы A образуют ортонормированную систему. [2]

Определитель унитарной матрицы равен единице.

В унитарном пространстве переход от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису осуществляется с помощью унитарной матрицы. Также унитарные матрицы являются матрицами унитарных преобразований в ортонормированном базисе. [3]

Пример 1. Ортонормировать систему векторов:

$$a_1 = (1, i, i)^T, a_2 = (i, i, i)^T, a_3 = (i, 0, i)^T,$$

считая, что векторы заданы координатами в ортонормированном базисе.

Решение. Сначала проведем процесс ортогонализации данной системы векторов. Положим $b_1 = a_1,\ b_2 = \alpha_1 b_1 + a_2$ и найдем α_1из условия$(b_2, b_1) = 0$. Так как:

$$(b_2, b_1) = (\alpha_1, b_1 + a_2, b_1) = \alpha_1(b_1, b_1) + (\alpha_2, b_2),$$

то из условия $(b_2\ , b_1) = 0$ находим, что:

$$\alpha_1 = -\frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{i\cdot\bar{i}+i\cdot\bar{i}+i\cdot\bar{i}}{|1|^2+|i|^2+|i|^2} = \frac{-2-i}{3}.$$

Следовательно:

$$b^2 = \frac{-2-i}{3}\begin{pmatrix}1\\ i\\ i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}i\\ i\\ i\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2+2i\\ 1+i\\ 1+i\end{pmatrix}.$$

Аналогично находим:

$$b_3 = a_3 - \beta_1 b_1 - \beta_2 b_2\,,$$

где:

$$\beta_1 = -\frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{i\cdot\bar{1}+0\cdot\bar{i}+i\cdot\bar{i}}{|1|^2+|i|^2+|i|^2} = \frac{-1-i}{3},$$

$$\beta_2 = -\frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{i\cdot\frac{-2-2i}{3}+i\cdot\frac{1-i}{3}}{\left|\frac{-2+2i}{3}\right|^2+\left|\frac{1+i}{3}\right|^2+\left|\frac{1+i}{3}\right|^2} = \frac{-3+i}{4}.$$

Поэтому:

$$b_3 = \frac{-1-i}{3}\begin{pmatrix}1\\ i\\ j\end{pmatrix} + \frac{-3+i}{12}\begin{pmatrix}-2+2i\\ 1+i\\ 1+i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}i\\ 0\\ i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ -i\\ i\end{pmatrix}.$$

Система векторов ортогональная. Чтобы получить ортонормированную систему, нормируем каждый вектор этой системы:

$$b_1^0 = \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{b_1}{\sqrt{(b_1, b_1)}} = \frac{b_1}{\sqrt{|1|^2+|i|^2+|i|^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, i, i)^T,$$

$$b_3^0 = \frac{b_3}{|b_3|} = \frac{b_3}{\sqrt{b_3, b_3}} = \frac{b_3}{\sqrt{\left|\frac{-i}{2}\right|^2+\left|\frac{i}{2}\right|^2}} = \sqrt{2}b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -i, i)^T.$$

Пример 2. Убедиться, что система векторов:

$$a_1 = (4+3i, 4+3i, 2)^T, \quad a_2 = (4-3i, -4+3i, 0)^T$$

– ортогональная и дополнить ее до ортогонального базиса пространства *U*3, считая, что векторыa_1,a_2 заданы координатами в ортонормированном базисе.

*Решение.*Векторы a_1,a_2, ортогональны, так как:

$$(\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_2) = (4+3i)(4+3i) + (4+3i)(4-3i) + 2\cdot 0 = 0.$$

К системе векторов$\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_2$ добавим вектор $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, удовлетворяющий условиям:

$$(x, \mathrm{a}_1) = x_1(4 - 3i) + x_2(4 - 3i) + 2 \cdot x_3 = 0.$$
$$(x, \mathrm{a}_2) = x_1(4 + 3i) - x_2(4 + 3i) = 0.$$

Первое уравнение этой системы умножим на 4 + $3i$, второе – на 4 – $3i$. Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 25x_1 + 25x_2 + 2(4 + 3i)x_3 = 0, \\ 25x_1 - 25x_2 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем $x_1 = x_2$. Если сложить первое уравнение со вторым, то придем к уравнению:

$$50x_1 + 2(4 + 3i)x_3 = 0,$$

из которого находим:

$$x_1 = -\frac{4 + 3i}{25}x_3$$

Выберем x_3 = 25. В результате получим: Одним из ортогональных базисов пространства U_3, содержащим векторы a_1, a_2, является базис, состоящий из векторов a_1, a_2 и x.

Список использованных источников:

1. Шевцов Г.С. Линейная алгебра..- М.: Гардарики, 1999.-359с.
2. http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/5732/%D0%A3%D0%9D%D0%98%D0%A2%D0%90%D0%A0%D0%9D%D0%90%D0%AF
3. http://slovari.belnovosti.by/content_matenc/unitarnaja-matrica-42883.html