диаграмманы коммутатты диаграммаға айналдыратын φ гомоморфизмі екендігін көреміз. φ': $C\rightarrow G$үшін де $\varphi'\beta = \eta$ шарты орындалса, онда β-эпиморфизм және $\varphi' = \varphi$.

Лемма 3.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\gamma_3"'] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "\gamma_4"'] & A_5 \arrow[d, "\gamma_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

- дәл жолдары бар коммутатты диаграмма болсын. Онда:

(а) егер γ_1- эпиморфизм, ал γ_2, γ_4– мономорфизмдер болса, онда γ_3-мономорфизм;

(б) егер γ_5- мономорфизм, ал γ_2, γ_4– эпиморфизмдер болса, онда γ_3-эпиморфизм;

(в) егер γ_1- эпиморфизм, ал γ_5– мономорфизм, ал γ_2, γ_4– изоморфизмдер болса болса, онда γ_3- изоморфизм;

Дәлелдеуі. (а) шарты орындалады деп жорамал жасайық және $a_3 \in \mathrm{Ker}\ \gamma_3$болсын. Үшінші шаршыдағы коммутаттылыққа байланысты $\gamma_4\alpha_3a_3= \beta_4\gamma_3a_3= 0$, бұдан $\alpha_3a_3 = 0$, себебі γ_4- мономорфизм. Жоғарғы жол дәл боландықтан, $\alpha_2a_2= a_3$болатындай $a_2 \in A_2$ элементі табылады. Ал екінші шаршының коммутаттылығына сай $\beta_2\gamma_2a_2= \gamma_3\alpha_2a_2=\gamma_3a_3 = 0$. Асытыңғы жол дәл, себебі кейбір $b_1 \in B_1$ үшін $\beta_1b_1 = \gamma_2a_2$, γ_1- эпиморфизм. $\gamma_2\alpha_1a_1 = \beta_1\gamma_1a_1 = \beta_1b_1=\gamma_2a_2$, бұдан $\alpha_1a_1 =a_2$, себебі γ_2- мономорфизм.

Енді (б) шарты орындалсын және $b_3 \in B_3$. γ_4– эпиморфизм, сондықтан кейбір $a_4 \in A_4$ үшін $\beta_3b_3=\gamma_4a_4$. Бұдан $\gamma_5\alpha_4a_4 = \beta_4\gamma_4a_4= \beta_4\beta_3b_3= 0$, яғни $\alpha_4a_4 = 0$, себебі γ_3-мономорфизм. Диаграмманың жоғарғы жолы дәл, сондықтан кейбір $a_4 \in A_4$ үшін$\alpha_3a_3= a_4$, бұдан $\beta_3\gamma_3a_3= \gamma_4\alpha_3a_1= \gamma_4a_4= \beta_3b_3$. Төмеңгі жолдың дәлдігі және γ_2-нің эпиморфиздігі кейбір $b_2 \in B$ үшін $\beta_2b_2=\gamma_3a_3 - b_3$және кейбір $a_2 \in A_2$ үшін $\gamma_2a_2= b_2$. Бұдан $\gamma_3\alpha_2a_2 = \beta_2\gamma_2a_2=\gamma_3a_3 - b_3= \gamma_3(a_3– \alpha_2a_2) \in \mathrm{Im}\gamma_3$,яғни γ_3- эпиморфизм.

(а) және (б) пункттерін біріктірсек, (в) пунктін аламыз.

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М., 1974, с. 12-25, с. 211- 243.
2. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. — М., 1977, с. 13- 44.
3. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. — М.: Высш.школа, 1979. — с. 82, 94- 98.

Демисенов Б.Н. [1], Сманова А.Б. [2], Кадиева М.Р.[3]

1. Научный руководитель, кандидат физико-математических наук, доцент
2. Студент 4 курса, кафедра физико-математических и общетехнических дисциплин, специальность «Математика»
3. Студент 4 курса, кафедра физико-математических и общетехнических дисциплин, специальность «Математика»

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

В данной статье рассматриваются некоторые свойства линейных представлений групп, имеющие тесную связь с представлениями компактных групп и групп Ли. Рассмотренные свойства линейных представлений позволяют решить ряд вопросов построения неприводимых представлений и различных серий представлений групп Ли, в том числе, полных семейств неприводимых унитарных представлений. Всякое линейное представление есть гомоморфизм в полную линейную группу, что позволяет осуществить переход к матричному представлению групп, некоторые из которых описаны в данной работе. В статье представлены доказательства трех утверждений, для формулировки и доказательства которых,нам понадобились определения, понятия и методы линейной алгебры, подробнее с которыми можно ознакомиться в [2]. Более подробное изложение теории линейныхпредставлений компактных групп и групп Ли можно найти в следующей литературе [1], [4], [5]. Так же ознакомиться с общими свойствами линейных представлений можно в источниках [1], [3].

Утверждение 1. *Пусть М– матричное представление группы S_n,k - число неподвижных точек перестановки $\sigma \in S_n$, тогда $trM(\sigma)$ есть число неподвижных точек перестановки σ.*

Доказательство:Равенство $trM(\sigma) = k$ верно для любого n , так как известно, что каждой перестановке σ соответствует матрица $M(\sigma) = E_{\sigma(1),1} + \dots + E_{\sigma(n),n}$, где E_{ij}- матрица, у которой на месте (i,j) стоит единица поля K, а на остальных местах – нули [1, стр.6]. Тогда, если $\sigma(l) = m,\ \forall\ l,m \in \{1,2,\dots,n\}$, то это есть неподвижная точка в данной перестановке и ей соответствует матрица $E_{\sigma(l),m}$, у которой на главной диагонали стоит 1, так как $\sigma(l) = m$, а на остальных – нули. А это значит, что если в перестановке есть неподвижные точки, то каждой точке соответствует матрица вида E_{ij}, где $i = j$. Тогда в матрице $M(\sigma)$на главной диагонали будет столько же единиц, сколько неподвижных точек в данной перестановке, отсюда следует, что след матрицы $M(\sigma)$ будет равен числу неподвижных точек в данной перестановке.

Покажем на примере, что$trM(\sigma) = k$при$n = 4$

Пусть $\sigma_0 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$число неподвижных точек данной перестановки $k_0 = 4$.

Далее составим соответствующую ей матрицу: $M(\sigma_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, найдем след полученной матрицы $trM(\sigma_0) = 4$. В результате вычислений получаем, что $trM_0 = k_0$. Аналогично находим след соответствующих матриц для остальных перестановок.

$\sigma_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} k_1 = 2$ $\quad M(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} trM(\sigma_1) = 2$

$\sigma_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} k_2 = 2$ $\quad M(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} trM(\sigma_2) = 2$

$\sigma_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} k_3 = 2$ $\quad M(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} trM(\sigma_3) = 2$

$\sigma_4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} k_4 = 2$ $\quad M(\sigma_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} trM(\sigma_4) = 2$

$\sigma_5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} k_5 = 2$ $\quad M(\sigma_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} trM(\sigma_5) = 2$

$\sigma_6 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} k_6 = 2$ $\quad M(\sigma_6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} trM(\sigma_6) = 2$

$\sigma_7 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} k_7 = 1$ $\quad M(\sigma_7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} trM(\sigma_7) = 1$

$\sigma_8 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} k_8 = 1$ $\quad M(\sigma_8) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} trM(\sigma_8) = 1$

$\sigma_9 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} k_9 = 1$ $\quad M(\sigma_9) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} trM(\sigma_9) = 1$

$$\sigma_{10}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\ k_{10}=1\ \ M(\sigma_{10})=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ trM(\sigma_{10})=1$$

$$\sigma_{11}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}k_{11}=1\ \ M(\sigma_{11})=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}trM(\sigma_{11})=1$$

$$\sigma_{12}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}k_{12}=1\ \ M(\sigma_{12})=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\4&0&0&0\end{pmatrix}trM(\sigma_{12})=1$$

$$\sigma_{13}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}k_{13}=1\ \ M(\sigma_{13})=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}trM(\sigma_{13})=1$$

$$\sigma_{14}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}k_{14}=1\ \ M(\sigma_{14})=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}trM(\sigma_{14})=1$$

$$\sigma_{15}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}k_{15}=0\ \ M(\sigma_{15})=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}trM(\sigma_{15})=0$$

$$\sigma_{16}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}k_{16}=0M(\sigma_{16})=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}trM(\sigma_{16})=0$$

$$\sigma_{17}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}k_{17}=0\ \ M(\sigma_{17})=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}trM(\sigma_{17})=0$$

$$\sigma_{18}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}k_{18}=0\ \ M(\sigma_{18})=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}trM(\sigma_{18})=0$$

$$\sigma_{19}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}k_{19}=0\ \ M(\sigma_{19})=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\ trM(\sigma_{19})=0$$

$$\sigma_{20}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}k_{20}=0\ \ M(\sigma_{20})=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\ trM(\sigma_{20})=0$$

$$\sigma_{21}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix} k_{21}=0 \quad M(\sigma_{21})=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} trM(\sigma_{21})=0$$

$$\sigma_{22}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} k_{22}=0 \quad M(\sigma_{22})=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} trM(\sigma_{22})=0$$

$$\sigma_{23}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix} k_{23}=0 \quad M(\sigma_{23})=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} trM(\sigma_{23})=0$$

Из вычислений видно, что $trM(\sigma_i)=k_i,\ i=\overline{1{,}23}$

Утверждение 2. *Пусть* $\hat{R}=R\cup\{\infty\}$. *Для любой матрицы* $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in GL_2(R)$ *положим:*

$$s(A)x=\frac{ax+b}{cx+d}\left(x\in\hat{R}\right),$$

Считая, что

$$\frac{a\times\infty+b}{c\times\infty+d}=\frac{a}{c},\frac{u}{\infty}=0,u\neq 0$$

Тогдаs*- это действие группы* $GL_2(R)$*на*$\hat{R}$.

Доказательство: Так как действие s, по определению это есть всякий гомоморфизм, значит необходимо проверить условие гомоморфности, а именно:$s(AB)=s(A)s(B)$

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}k&l\\m&n\end{pmatrix}\in GL_2(R),AB=\begin{pmatrix}ak+bm&al+bn\\ck+dm&cl+dn\end{pmatrix}$$

$$s(AB)x=\frac{(ak+bm)x+al+bn}{(ck+dm)x+cl+dn}\left(x\in\hat{R}\right)$$

$$\big(s(A)s(B)\big)x=s(A)\times\left(\frac{kx+l}{mx+n}\right)=\frac{a\left(\frac{kx+l}{mx+n}\right)+b}{c\left(\frac{kx+l}{mx+n}\right)+d}=\frac{(ak+bm)x+al+bn}{(ck+dm)x+cl+dn}$$

$s(AB)x=\big(s(A)s(B)\big)x\Rightarrow s-$ гомоморфизм, отсюда следует по определению понятия действия,$s-$ это действие группы $GL_2(R)$на $\hat{R}$.

Утверждение 3. *Если*$F\colon R\to L_2(R)$ *является матричным представлением группы* R*,где* $F(t)=\begin{Vmatrix}cht&sht\\sht&cht\end{Vmatrix}$, *то существует такая матрица* A, *такая что* $F(t)=e^{tA}$

Доказательство:По определению, матричное представление это есть всякий гомоморфизмгруппы в группу невырожденных матриц [4, стр. 25]. Проверим, чтоFдействительно является гомоморфизмом:

Условие гомоморфизма:$F(t+u)=F(t)\cdot F(u)$

$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t+u)\mathrm{sh}\,(t+u) \\ \mathrm{sh}(t+u)\mathrm{ch}\,(t+u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}t \cdot \mathrm{ch}u + \quad \mathrm{sh}t \cdot \mathrm{sh}u & \mathrm{sh}t \cdot \mathrm{ch}t + \mathrm{sh}u \cdot \mathrm{ch}t \\ \mathrm{sh}t \cdot \mathrm{ch}t + \mathrm{sh}u \cdot \mathrm{ch}t & \mathrm{ch}t \cdot \mathrm{ch}u + \quad \mathrm{sh}t \cdot \mathrm{sh}u \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}t & \mathrm{sh}t \\ \mathrm{sh}t & \mathrm{ch}t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{ch}u & \mathrm{sh}u \\ \mathrm{sh}u & \mathrm{ch}u \end{pmatrix} \Rightarrow$
$F -$ является гомоморфизмом.
Теперь найдем матрицу Aв явном виде. Для этого продифференцируем $F(t+u) = F(t) \cdot F(u)$поиu подставляя$u = 0$, получим, что
$F'(t)$= $F(t) \cdot A$
Где $A = F'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$A = \dfrac{F'(t)}{F(t)}, \int A dt = \int \dfrac{F'(t)}{F(t)} dt \qquad A \cdot t = \ln F(t) \rightarrow \; F(t) = e^{tA}$

Список использованной литературы:

1.Винберг Э.Б. Линейные представления групп. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985

2.Кострикин А. И. Введение в алгебру. -М.: Наука, 1977.

3.Кириллов А.А. Элементы теории представлений. -М.: Наука, 1978.

4.Желобенко Д.П., Штерн А.И. Представление групп Ли. - М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983

5.Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления. - М.: Наука, 1970.

Мнайдарова Ж. С. [1],Тюрина А.С. [2]

1. Научный руководитель, магистр экономики, старший преподаватель

2. Студент 4курса, кафедра физико-математических и общетехнических дисциплин, специальность «Математика»

НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СПОСОБЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Слово «тригонометрия» составлено из двух греческих слов: «тригонон» — треугольник и «метрео» — измеряю. Основной задачей тригонометрии является нахождение неизвестных параметров треугольника по данным значениям других его параметров. Например, по данным сторонам треугольника можно вычислить его углы, по известным значениям площади и двух углов вычислить его стороны и т. д.

За несколько веков до нашей эры Древней Грецией были найдены первые методы нахождения неизвестных параметров данного треугольника.

Однако греческие астрономы еще незнали синусов, косинусов и тангенсов. Вместо таблиц этих величин они употребляли таблицы, позволявшие отыскивать хорду окружности по стягиваемой ею дуге. Дуги измерялись в градусах и минутах.