СЕКЦИЯ № 4. МАТЕМАТИКА

Доспулова У.К.[1], Амиржанова А.С.[2]
1. Ғылыми жетекші, аға оқытушы
2. Физика-математика және жалпы техникалық пәндер кафедрасы, «Математика» мамандығының 4 курс студенті

ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛДАРДЫ МОНТЕ – КАРЛО ӘДІСІМЕН ЖУЫҚТАП ЕСЕПТЕУ

Монте – Карло әдісінің мәні: кейбір оқытылатын шамалардың мәнін табуды талап етеді. Математикалық күтімі $M(X) = a$ тең болатын кездейсоқ X мәнін таңдайды. [1]

Монте – Карло әдісі үлкен сандар сынағын өткізуді талап ететіндіктен оны статистикалық сынақтар әдісі деп атайды. Бұл әдістің теориясы кездейсоқ X шамасын неғұрлым орынды тандауды және оның барлық мүмкін мәндерін табуды көрсетеді. [1]

а) $\iint_D f(x,y)dxdy$интегралын$D: a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$ аймағында есептеу қажет. $[a,b]$ кесіндісіндегі $\varphi_1(x)$ және $\varphi_2(x)$ үзіліссіз функциялары $\varphi_1(x) \ge c, \varphi_2(x) \le d$теңсіздіктерін қанағаттандырады деп ұйғарайық.

$x = a + (b-a)\xi, y = c + (d-c)\eta$ формулалары бойынша айнымалыны ауыстырамыз. Осындай түрлендіруден соң D аймағы $0 \le \xi \le 1, 0 \le \eta \le 1$бірлік шаршысының құрамына кіретін Δ аймағына ауысады. n - Δ аймағына кіретін кездейсоқ нүктелер $(\xi_i, \eta_i)(i = 1, 2, \dots, n)$ болсын, ал $N -$ бірлік шаршысына кіретін кездейсоқ нүктелер саны. (x_i, y_i), мұндағы $x_i = a + (b-a)\xi_i, y_i = c + (d-c)\eta_i (i = 1, 2, \dots, n) D$ аймағына кіретін n нүктелер екендігі белгілі. Орта мән туралы теорема бойынша

$$\iint_D f(x,y)dxdy \approx f(\bar{x},\bar{y}) \cdot S, \quad (1)$$

мұндағы: $(\bar{x},\bar{y}) \in D$, ал $S - D$ аймағының ауданы. $f(\bar{x},\bar{y})$ жуықтау мәні ретінде$f(x,y)$функциясының D аймағына кіретін n кездейсоқ нүктелеріндегі мәндерінің арифметикалық ортасын аламыз:

$$f(\bar{x},\bar{y}) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i). \qquad (2)$$

(1) және (2) формулардағы теңдікті пайдаланып:

$$\iint_D f\,(x,y)dxdy \approx \frac{S}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i). \qquad (3)$$

Анықталған интегралдарды Монте – Карло әдісімен жуықтап есептеу үшін қолданылатын формула:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{M(b-a)} \approx \frac{n}{N}$$

Ұқсастық бойынша еселі интеграл үшін

$$\frac{S}{(d-c)(b-a)} \approx \frac{n}{N},$$

ретінде жазуға болады. Мұндағы: $S - D$ аймағының ауданы. Осыдан

$$S \approx \frac{n(b-a)(d-c)}{N} \qquad (4)$$

(3)және(4) формулалар теңдігін ескере отырып қос интегралдарды жуықтап есептеу формуласын аламыз:

$$\iint_D f\,(x,y)dxdy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{N}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i). \qquad (5)$$

(5) формула көмегімен қос интегралдарды жуықтап есептеу үшін есептік кестені пайдаланған ынғайлы: [2]

i	ξ_i	η_i	$x_i = a + (b-a)\xi_i$	$y_i = c + (d-c)\eta_i$	$\underline{y_i} = \varphi_1(x_i)$	$\overline{y_i} = \varphi_2(x_i)$	$f(x_i, y_i)$
1	ξ_1	η_1	x_1	y_1	$\varphi_1(x_1)$	$\varphi_2(x_1)$	$f(x_1, y_1)$
2	ξ_2	η_2	x_2	y_2	$\varphi_1(x_2)$	$\varphi_2(x_2)$	$f(x_2, y_2)$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
N	ξ_N	η_N	x_N	y_N	$\varphi_1(x_N)$	$\varphi_2(x_N)$	$f(x_N, y_N)$

$\underline{y_i}(1 \le i \le N)$мәндерінен $\underline{y_i} \le y_i \le \overline{y_i}$шартын қанағаттандыратын мәндерді таңдаймыз. Олардың саны $n -$ ге тең. [3]

б) Анықталған интегралдарды жуықтап есептеу формуласын

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)nM}{N} \qquad (6)$$

$\iint_D f(x,y)dxdy, \qquad D: a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$интегралыүшінжалпылап жазайық.M келесі шартты қанағаттандыратындай белгілейміз$M \ge \max\limits_{\substack{a \le x \le b \\ c \le y \le d}} f(x,\ y)$

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ қосинтегралы$a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), 0 \leq z \leq f(x,y)$ теңсіздіктерімен анықталатын цилиндрлік дененің V көлемін білдіреді. Бұл цилиндрлік дене $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq M$теңсіздіктермен анықталатын параллелепипедтің ішінде орналасқан.

ξ, η, ζ айнымалыларын $x = a + (b-a)\xi, y = c + (d-c)\eta, z = M\zeta$ формулаларының көмегімен ауыстырамыз. Осындай түрлендіруден соң V аймағы $0 \leq \xi \leq 1, \frac{\varphi_1(x)-c}{d-c} \leq \eta \leq \frac{\varphi_2-c}{d-c}, 0 \leq \zeta \leq 1$ теңсіздіктермен анықталатын Ω аймағына ауысады. Ω аймағы $\xi = 0, \xi = 1, \eta = 0, \eta = 1, \zeta = 0, \zeta = 1$түзулерімен шектелетін бірлік шаршысының ішінде орналасқан. Яғни,

$$I = (b-a)(d-c) \cdot M \iint\limits_\Delta \varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

мұндағы: $\varphi(\xi,\eta) = \frac{1}{M} f[a + (b-c)\xi, c + (d-c)\eta]$, ал $\Delta -$ D аймағынан айнымалына ауыстыру көмегімен алынған аймақ. [3]

Бірлік шаршысында бірқалыпты үлестірілген кездейсоқ нүктелер $(\xi_1;\ \eta_1;\ \zeta_1), (\xi_2;\ \eta_2; \zeta_2), \ldots, (\xi_N;\ \eta_N;\ \zeta_N)$ жиынын қарастырайық. Δ аймағына кіретін нүктелер санын n арқылы белгілейік. Кездейсоқ нүктелер бірқалыпты үлестірілгендіктен

$$\frac{n}{N} \xrightarrow{\text{ықтималдылықб−ша}} \iint\limits_\Delta \varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta, \text{немесе} \iint\limits_\Delta \varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta \approx \frac{n}{N}.$$

x жәнеyайнымалыларына оралатын болсақ, қос интегралдарды Монте – Карло әдісімен жуықтап есептеу формуласын аламыз:

$$\iint\limits_D f\,(x,y)dxdy \approx \frac{(b-a)(d-c)nM}{N}. \quad (7)$$

(7) формула үшін есептік кесте мынадай болады: [2]

i	ξ_i	η_i	ζ_i	$x_i = a + (b-a)\xi_i$	$y_i = c + (d-c)\eta_i$	$z_i = M\zeta_i$	$\underline{y_i} = \varphi_1(x_i)$	$\overline{y_i} = \varphi_2(x_i)$	$Z_i = f(x_i, y_i)$
1	ξ_1	η_1	ζ_1	x_1	y_1	z_1	$\varphi_1(x_1)$	$\varphi_2(x_1)$	$f(x_1, y_1)$
2	ξ_2	η_2	ζ_2	x_2	y_2	z_2	$\varphi_1(x_2)$	$\varphi_2(x_2)$	$f(x_2, y_2)$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
N	ξ_N	η_N	ζ_N	x_N	y_N	z_N	$\varphi_1(x_N)$	$\varphi_2(x_N)$	$f(x_N, y_N)$

nсаны келесідей табылады:$y_i(i = 1, 2, \ldots, N)$ мәндерінің ішінен теңдікті қанағаттандыратын мәндерді алу қажет:

$$\underline{y_i} \leq y_i \leq \overline{y_i} \quad (8)$$

Тиісінше y_i мәнін қанағаттандыратын z_i мәндері арасынан шарт орындалатындай мәндерді аламыз:

$$z_i < Z_i \quad (9)$$

$Z_i = f(x_i, y_i)$функциясының барлық мүмкін мәндерді табу орынсыз, тек (8) формуланы қанағаттандыратын y_i мәндері тиісті екендігін ескереміз. [1]

в) $k-$ еселі интегралдар үшін ұқсас қатынас бойынша (5) және (6) формула мынадай түрде беріледі:

$$\iint_{v} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k \approx \frac{nM}{N} \prod_{i=1}^{k} (b_i - a_i), \qquad (10)$$

V аймағы $k-$ өлшемді параллелепипедке тиисті. Нүктелер координаталары k теңсіздіктерін $a_i \leq x_i \leq b_i (i = 1, 2, \dots, k)$ қанағаттандырады, ал $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ функциясы $0 \leq f(x_1, x_2, \dots, x_k) \leq M$ шартын қанағаттандырады және V аймағында үзіліссіз. [1]

Монте – Карло әдісіне келетін болсақ, келтірілген мысалдар иллюстрациялық сипатта.[2]

Есеп:

$\iiint_{v} (x + y + 2z) dxdydz$ интегралын $D: 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x,$ $x + y \leq z \leq x + 2y$ аймағында Монте –Карло әдісімен жуықтап есептеңіз.[2]

Шешуі: $D: 1 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq x,\ x + y \leq z \leq x + 2y$

Монте – Карло әдісінің еселі интегралдары жуықтап есеутеп формуласы:

$$I \approx \iint_{v} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k \approx \frac{nM}{N} \prod_{i=1}^{k} (b_i - a_i), \qquad k = 3$$

Үш еселі интегралға келтіретін болсақ: $I \approx \frac{(b-a)(d-c)(h-g)Mn}{N}$.

мұндағы:$a = 1, b = 3, c = 0, d = 3, g = 1, h = 9, M = \max\limits_{\substack{1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ 1 \leq z \leq 9}} (x + y + 2z) = 24$

$x_i = a + (b - a)\xi_i, \qquad y_i = c + (d - c)\eta_i, z_i = g + (h - g)\zeta_i, u_i = 24\sigma_i$
формулалары бойынша айнымалыларды ауыстырамыз.

$\xi_i \eta_i \zeta_i \sigma_i$ - кездейсоқ сандар, еркін түрде арнайы кестеден алынады.

Кездейсоқ сандар кестесінен 80 мән (*N*=20) алынады. Формула бойынша кестені есептейміз:

i	ξ_i	η_i	ζ_i	σ_i	x_i	y_i	z_i	u_i	$y_i = 0$	$\overline{y_i} = x_i$	$\underline{z_i} = x_i + y_i$	$\overline{z_i} = x_i + 2y_i$	$2z_i$	$U_i = x_i + y_i + 2z_i$

1	0,165	0,617	0,369	0,069	1,330	1,851	3,952	1,656	0	1,330				
2	0,248	0,960	0,652	0,367	1,496	2,880	6,216	8,080	0	1,496				
3	0,168	0,261	0,189	0,703	1,336	$\underline{0.783}$	$\underline{2.512}$	16,872	0	1,336	2,119	2,902	5,024	7,143
4	0,142	0,486	0,233	0,424	1,284	1,458	2,864	10,176	0	1,284				
5	0,291	0,473	0,645	0,514	1,582	$\underline{1.419}$	6,160	12,336	0	1,582	3,001	4,420		
6	0,819	0,064	0,870	0,256	2,638	$\underline{0.192}$	7,960	6,144	0	2,638	2,830	3,022		
7	0,347	0,151	0,912	0,191	1,694	$\underline{0.453}$	8,296	4,5584	0	1,694	2,147	2,600		
8	0,259	0,096	0,019	0,854	1,518	$\underline{0.288}$	$\underline{1.152}$	20,496	0	1,518	1,806	2,094	2,304	4,110
9	0,193	0,732	0,253	0,352	1,386	2,196	3,024	8,448	0	1,386				
10	0,729	0,102	0,222	0,188	2,458	$\underline{0.306}$	$\underline{2.776}$	$\underline{4.512}$	0	2,458	2,764	3,070	5,552	8,316
11	0,205	0,562	0,851	0,647	1,410	1,686	7,808	15,528	0	1,410				
12	0,568	0,020	0,051	0,649	2,136	$\underline{0.060}$	1,408	15,576	0	2,136	2,196	2,256		
13	0,176	0,896	0,453	0,546	1,358	2,688	4,624	13,104	0	1,358				
14	0,919	0,691	0,155	0,181	2,838	$\underline{2.073}$	2,240	4,344	0	2,838	4,911	6,984		
15	0,273	0,876	0,690	0,494	1,546	2,628	6,520	11,856	0	1,546				
16	0,339	0,910	0,789	0,908	1,678	2,730	7,312	21,792	0	1,678				
17	0,263	0,131	0,389	0,438	1,526	$\underline{0.393}$	4,112	10,512	0	1,526	1,919	2,312		
18	0,161	0,485	0,535	0,090	1,322	1,455	5,280	2,160	0	1,322				
19	0,142	0,321	0,969	0,091	1,284	$\underline{0.963}$	8,752	2,184	0	1,284	2,247	3,210		
20	0,463	0,251	0,596	0,784	1,926	$\underline{0.753}$	5,768	18,816	0	1,926	2,679	3,432		

Ең алдымен, $\underline{y_i} \le y_i \le \overline{y_i}$ шартын қанағаттандыратын $\underline{y_i}(1 \le i \le 20)$ мәнін табамыз. Олардың саны 11 – ге тең. Содан соң 11 сәйкес санның ішінен $\underline{z_i} \le z_i \le \overline{z_i}$шартын қанағаттандыратын z_i мәнін табамыз. 3 мән табылды. Сонында, сәйкес 3 мәннің ішінен $u_i \le U_i$ шартын қанағаттандыратын мәнді таңдаймыз. Осыдан, $n = 1$.

Содан,$I \approx \frac{(b-a)(d-c)(h-g)Mn}{N} = \frac{(3-1)(3-0)(9-1)\cdot 1\cdot 24}{20} = 57{,}6$

Интегралдың дәл мәнін есептейміз:

$D\colon 1 \le x \le 3, \qquad 0 \le y \le x, \qquad x+y \le z \le x+2y$

$$I = \iiint\limits_V (x+y+2z)dxdydz = \int_1^3 dx \int_0^x dy \int_{x+y}^{x+2y} (x+y+2z)dz = \int_1^3 dx$$

$$\int_0^x (xz+yx+z^2)\Big|_{x+y}^{x+2y} dy = \int_1^3 dx \int_0^x [x(x+2y)+y(x+2y)+(x+2y)^2-$$

$$-x(x+y)-y(x+y)-(x+y)^2]dy = \int_1^3 dx \int_0^x [x^2+2xy+xy+2y^2+x^2+$$

$$+4xy+4y^2-x^2-xy-xy-y^2-x^2-2xy-y^2]dy = \int_1^3 dx \int_0^x (3xy+$$

$$+4y^2)dy = \int_1^3 \left(\frac{3xy^2}{2}+\frac{4y^3}{3}\right)\Bigg|_0^x dx = \int_1^3 \left(\frac{3}{2}x^3+\frac{4}{3}x^3\right)dx = \frac{17}{6}\int_1^3 x^3dx =$$

$$= \frac{17}{4} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{17}{6}\left(\frac{81}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{17}{6} \cdot \frac{80}{4} = \frac{17}{6} \cdot 20 = \frac{340}{6} \approx 56{,}667$$

Есептеу қателігін есептейік:

$$\delta = \frac{57{,}6 - 56{,}667}{56{,}667} \cdot 100\% = \frac{0.933}{56{,}667} \cdot 100\% \approx 1{,}6\%$$

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб.пособие для студентов вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1979г.400стр.
2. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов вузов. –часть 2,4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1986г. 353стр.
3. Ермаков С. М. Методы Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975г.472 стр.

Қасымқанұлы Б.[1],Әбдірахманова Ә.Е.[2]
1. Ғылыми жетекші, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент
2. Физика-математика және жалпы техникалық пәндер кафедрасы, «Математика» мамандығының 4 курс студенті

АЛЬТЕРНАТИВТІ ДЕНЕЛЕР

$\mathcal{A}$ сақинасының *a* элементі қайтымды деп аталады, егер $\mathcal{A}$ сақинасында *a элементі* үшін кері a^{-1} элементі бар болса,

$$a^{-1}(ax) = (xa)a^{-1} = x$$

$\mathcal{A}$ *−ның* кез келген *x* элементі үшін.

Теорема 1. Егер $\mathcal{A}$ туынды сақинасының нөл емес элементтері *e* бірлігімен қайтымды болса, онда $\mathcal{A}$ сақинасы *альтернативті дене* болады.

Расында да, егер $ab = 0, a \neq 0\ (a, b \in \mathcal{A})$ болса,онда $a^{-1}(ab) = b = 0$ болады. Осыған ұқсас болады, егер $ab = 0, b \neq 0$, онда $b^{-1}(ab) = a = 0$. Осылайша,$\mathcal{A}$-да нөлдің бөлгіштері жоқ және бөлгіші мен бірлігі бар сақина бола тұра дене болып табылады.

Еркін нөлдік емес *a,b* элементтері үшін $\mathcal{A}$ $x = (ab)^{-1}$ сақинасынан$x^{-1} = ab$, $x^{-1}b^{-1} = a$ аламыз, осыдан $xa = x(x^{-1}b^{-1}) = b^{-1}$, яғни $\mathcal{A}$ сақинасында қарапайым көбейтіндінің айналу орны бар: $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Осы заңдылықты пайдалана отырып, альтернативті заңдылықты дәлелдейміз