ISSN 2310-3353

BU
BAITURSYNULY
UNIVERSITY

«АХМЕТ БАЙТҰРСЫНҰЛЫ АТЫНДАҒЫ ҚОСТАНАЙ ӨҢІРЛІК УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

ҚМПИ ЖАРШЫСЫ

КӨПСАЛАЛЫ ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ
МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

№ 1
2025

PUBLISHINGS KSPI | ҚМПИ ЖАРШЫСЫ | ВЕСТНИК КГПИ

BU BAITURSYNULY UNIVERSITY

2025 ж., қаңтар, №1 (77)
Журнал 2005 ж. қаңтардан бастап шығады
Жылына төрт рет шығады

Құрылтайшы: ***Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті***

Тіркеу туралы куәлік №5452-Ж
Қазақстан Республикасының ақпарат министрлігімен 17.09.2004 берілген.
Мерзімді баспа басылымын қайта есепке алу 07.11.2023 ж.
Жазылу бойынша индексі 74081

Редакцияның мекен-жайы:
110000, Қостанай қ., Байтұрсынов к., 47
(Редакциялық-баспа бөлімі)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

КӨПСАЛАЛЫ ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ | № 1 (77) 2025 | МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

№1 (77), январь 2025 г.
Издается с января 2005 года
Выходит 4 раза в год

Учредитель: ***Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы***

Свидетельство о регистрации № 5452-Ж
выдано Министерством информации Республики Казахстан 17.09.2004 г.
Переучёт периодического печатного издания 07.11.2023 г.
Подписной индекс 74081

Адрес редакции:
110000, г. Костанай, ул. Байтурсынова, 47
(Редакционно-издательский отдел)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

often encounter processes that cannot be accurately predicted in advance. This uncertainty (unpredictability) is caused by the influence of random factors affecting the course of the process. The theory of random processes is the basis of Monte Carlo methods, therefore this article provides information from the theory of random processes (Markov chains, random walks, homogeneous Markov processes, etc.) and the theory of martingales. We will further use the theory of martingales to prove the ε-bias of estimates. The solution to the original problem will be estimated at one point (Point estimation).

Key words: *random processes, Markov chains, Markovianity criterion, random walks, homogeneous Markov chains, transition probability, martingales.*

Сведения об авторах:

Тастанов Мейрамбек Габдуалиевич *– кандидат физико-математических наук, доцент, и.о профессора кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.*

Жарлыгасова Эльмира Закировна *– магистр естественных наук, старший преподаватель кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.*

Тастанов Мейрамбек Ғабдуалиұлы *– физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, математика және физика кафедрасы профессорының м.а., Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.*

Жарлыгасова Эльмира Закировна *– жаратылыстану ғылымдарының магистрі, математика және физика кафедрасының аға оқытушысы, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.*

Tastanov Meirambek Gabdualiyevich – *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, acting Professor of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.*

Zharlygassova Elmira Zakirovna *– Master of Natural Sciences, Senior Lecturer of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.*

УДК 519.245

Тастанов, М.Г.,
кандидат физико-математических наук,
и.о. профессора кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан
Нургельдина, А.Е.,
магистр естественных наук,
старший преподаватель
кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДОВ МОНТЕ-КАРЛО

Аннотация

Метод статистического моделирования основан на испытании модели множеством случайных сигналов, у которых плотность вероятности считается заданной. Целью в данном случае является определение выходных результатов. Статистичекое моделирование использует метод Монте-Карло в тех случаях, когда другие методы, кроме имитации применить невозможно. Основой методов Монте-Карло является теория вероятностей *и математическая статистика. Поэтому в данной статье мы будем приводить некоторые определения и факты из теории вероятностей и математической статистики, имеющие общий характер и некоторые другие факты, связанные с приложениями методов Монте-Карло.*

Ключевые слова: *статистичекое моделирование, σ-алгебра событий, борелевская σ-алгебра, распределение случайной величины, интеграл Лебега, закон больших чисел.*

1 Введение

Имитационное моделирование – численный метод проведения на ЭВМ вычислительных экспериментов с математическими моделями, которые имитируют поведение реальных объектов, процессов и систем во временном отрезке в течение определенного периода. Сами объекты и процессы разбиваются на подсистемы, модули и элементарные явления, а их работа описывается некоторым набором алгоритмов, имитирующих элементарные явления с сохранением их логической структуры и последовательности. В тех случаях исследования сложных систем, которые подвергаются случайным возмущениям, мы используем вероятностные имитационные модели, в которых влияние случайных факторов учитываются с помощью задания вероятностных характеристик случайных процессов (законы распределения вероятностей, спектральные плотности или корреляционные функции). Полученные при этом результаты, т. е. при воспроизведении на имитационной модели рассматриваемого процесса, являются случайными реализациями. А для нахождения объективных и устойчивых характеристик процесса требуется его многократное воспроизведение, с последующей статистической обработкой полученных данных. Вследствие чего, исследования сложных процессов и систем, подверженных случайным возмущениям с помощью имитационного моделирования, называется статистическим моделированием [1].

Статистическая модель случайного процесса – это алгоритм, с помощью которого имитируют работу сложной системы, которая подвергается случайным возмущениям; имитируют взаимодействие элементов системы, носящих вероятностный характер.

2 Материалы и методы

Основная идея метода состоит в использовании выборки случайных чисел для получения искомых оценок. Вместо того чтобы описывать процесс с помощью аналитического аппарата (дифференциальных или алгебраических уравнений), производится «розыгрыш» случайного явления с помощью специально организованной процедуры, включающей в себя случайность и дающий случайный результат. В сущности методом Монте-Карло может быть решена любая вероятностная задача, но оправданным он становится только тогда, когда процедура «розыгрыша» проще, а не сложнее аналитических расчетов [2].

Статистическое моделирование определяется как способ изучения сложных процессов и систем, которые подвергаются случайным возмущениям, с помощью имитационных моделей. Методика статистического моделирования, который часто называют методом Монте-Карло, состоит из следующих этапов:

1. Моделирование на ЭВМ псевдо случайных последовательностей с заданной корреляцией и законом распределения вероятностей (метод Монте-Карло), имитирующих на ЭВМ случайные значения параметров при каждом испытании.
2. Использование полученных числовых последовательностей в имитационных математических моделях.
3. Статистическая обработка результатов моделирования.
4. Использование полученных числовых последовательностей в имитационных математических моделях [3].

3-4 Результаты и обсуждение

Определение вероятностного пространства. σ-алгебра событий.

В тех случайных экспериментах, в которых алгебра событий содержит бесконечное множество событий, приходится рассматривать и бесконечные последовательности событий, и операции над ними [4]. Простейшими среди этих операций являются объединение и пересечение бесконечной последовательности событий. Если алгебра событий такова, что вместе с каждой бесконечной последовательностью событий A_k она содержит и события $\bigcap_k A_k$, $\bigcup_k A_k$, то такая алгебра называется σ-алгеброй. Событие $\bigcap_k A_k$ состоит в том, что происходят все события A_k одновременно, а событие $\bigcup_k A_k$ – в том, что из последовательности событий A_k происходит по крайней мере одно.

Последовательность A_k называется монотонно убывающей, если $A_k \supset A_{k+1}$ и монотонно возрастающей, если $A_k \subset A_{k+1}$ для всех k. Событие $\bigcap_k A_k$ называется пределом убывающей последовательности, а событие $\bigcup_k A_k$ – пределом возрастающей последовательности событий. Предел монотонной последовательности A_k обозначим $lim\, A_k$.

Алгебра событий U будет σ-алгеброй, если вместе со всякой монотонной последовательностью она содержит и ее предел [4].

При построении σ-алгебр множеств широко используется операция σ-замыкания алгебры множеств. σ-замыканием алгебры U_0 называется наименьшая σ-алгебра U, содержащая U_0; она обозначается $\sigma(U_0)$. Ее еще называют σ-алгеброй, порожденной алгеброй U_0.

Класс множеств μ называется монотонным, если с каждой монотонной последовательностью множеств он содержит и ее предел.

Теорема 1. $\sigma(U_0)$ совпадает с наименьшим монотонным классом, содержащим U_0.

Если вероятность определена на σ-алгебре, то предполагается, что она удовлетворяет еще одной аксиоме – расширенной аксиоме сложения:

Если A_k – последовательность попарно несовместимых событий, то

$$P(\textstyle\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k).$$

Эта аксиома эквивалентна следующей аксиоме непрерывности.

Для всякой монотонной последовательности A_k

$$P(lim\, A_k) = lim\, P\,(A_k).$$

Вероятностным пространством (полем вероятностей) {Ω, U, P} называется совокупность трех объектов-пространства элементарных событий Ω, σ-алгебры U подмножеств пространства Ω (σ-алгебры событий), вероятностной меры P(A), определенной для $A \in U$, для которой $P(\Omega) = 1$.

Мерой на σ-алгебре подмножеств U называется неотрицательная счетно-аддитивная функция $P(A)$ множества, то есть такая функция, для которой

$$P\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k P(A_k)$$

для всякой последовательности попарно не пересекающихся множеств A_k из U.

Если $\mathrm{P}(\Omega) = 1$, то мера называется нормированной (или вероятностной). Измеримым пространством {Ω, U } называется пара объектов – некоторое множество Ω и некоторая σ-алгебра его подмножеств U. Таким образом, вероятностное пространство – это измеримое пространство с нормированной мерой на нем.

Если Ω содержит не более счетного числа элементов и U есть множество всех подмножеств Ω, то вероятность полностью определяется своими значениями на элементарных событиях. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, $P(\{\omega_k\}) = p_k$, $\{\omega_k\}$ – одноточечное множество, содержащее ω_k. Тогда

$$P(A) = \textstyle\sum_k p_k \chi_A(\omega_k),$$

где $\chi_A(\omega) = 1$ при $\omega \in A$, $\chi_A(\omega) = 0$ при $\omega \notin A$. Функция $\chi_A(\omega)$ называется индикатором события A. Вероятностные пространства описанного вида называются дискретными.

Рассмотрим вероятностное пространство, для которого Ω, совпадает с m-мерным евклидовым пространством R^m. Такое пространство исходов естественно рассматривать в тех экспериментах, в которых наблюдаются значения m вещественных величин. Будем обозначать координаты точки $x^m \in R^m$ через $(x^1, x^2, \dots, x^m)$. В качестве U возьмем σ-алгебру, содержащую множество точек вида

$$\{x^m: a_1 \le x^1 < b_1, \dots, a_m \le x^m < b_m\}, \qquad (1)$$

где $-\infty \le a_i < b_i \le +\infty$ – вещественные числа. Такие множества называются полуоткрытыми справа параллелепипедами. Конечные суммы полуоткрытых справа параллелепипедов образуют алгебру U_0 в R^m. Наименьшая σ-алгебра U, содержащая алгебру U_0, совпадает с наименьшей σ-алгеброй множеств, содержащих все открытые и замкнутые множества R^m. Эта σ-алгебра называется борелевской σ-алгеброй, а множество U – борелевскими.

Всякое множество из U получается с помощью операции предельного перехода, переменного не более счетного числа раз к множествам из U_0. Поэтому для задания вероятности на U (учитывая аксиому непрерывности) достаточно задать ее на U_0. Поскольку множества из U_0 представимы в виде суммы попарно непересекающихся полуоткрытых параллелепипедов, то достаточно определить меру на множествах вида (1).

Функция распределения. Пусть

$$G(b_1, \dots, b_m) = P(\{x^n: -\infty < x^1 < b_1, \dots, -\infty < x^m < b_m\}). \qquad (2)$$

Обозначим через

$$\Delta^{(k)}_{[a,b)} G(x^1, \dots, x^m) = G(x^1, \dots, x^{k-1}, b, x^{k+1}, \dots, x^m) - G(x^1, \dots, x^{k-1}, a, x^{k+1}, \dots, x^m)$$

приращение функции $G(x^1, \dots, x^m)$ по k-му аргументу на полуинтервале $[a, b)$. Тогда справедлива формула

$$P(\{x^n: a_1 \le x^1 < b_1, \dots, a_m \le x^m < b_m\}) = \Delta^{(1)}_{[a_1,b_1)} \cdots \Delta^{(m)}_{[a_m,b_m)} G(x^1, \dots, x^m) \qquad (3)$$

Таким образом, всякая мера на измеримом пространстве $\{R^m, U\}$ однозначно определяется функцией $G(x^1, \dots, x^m)$ вида (2). Чтобы соответствующая мера была нормированной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

1) $\lim\limits_{x^1 \to \infty, \dots, x^m \to \infty} G(x^1, \dots, x^m) = 1.$

Укажем еще некоторые условия, которым необходимо удовлетворяет G. Из аксиомы непрерывности следует, что

2) $\lim\limits_{x^k \to -\infty} G(x^1, \dots, x^m) = 0$ для всяких $k = 1, \dots, m$

3) $\lim\limits_{x^1 \uparrow b_1, \dots, x^m \uparrow b_m} G(x^1, \dots, x^m) = G(b_1, \dots, b_m)$, каковы бы ни были $b_1, \dots, b_m$, т.е. функция $G(x^1, \dots, x^m)$ непрерывна (по совокупности аргументов) слева.

Из (3) следует

4) $\Delta^{(1)}_{[a_1,b_1)} \cdots \Delta^{(m)}_{[a_m,b_m)} G(x^1, \dots, x^m) \ge 0.$

Функция $G(x^1, \dots, x^m)$, удовлетворяющая условиям 1) – 4), называется m-мерной функцией распределения. Одномерной функцией распределения (m=1) называется неубывающая непрерывная слева функция $F(x)$, определенная на R и удовлетворяющая условиям

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Всякой m-мерной функции распределения отвечает единственная вероятностная мера на $\{R^m, U\}$.

Случайные величины. Определение случайной величины [4], [5].

Случайные величины – это величины, измеряемые в случайных экспериментах. Случайная величина полностью определена, если известен исход эксперимента ω. Таким образом, случайная величина ξ на вероятностном пространстве $\{\Omega, U, \mathrm{P}\}$, описывающем данный случайный эксперимент, есть некоторая функция элементарного события $\xi = \xi(\omega)$. Тот факт, что мы можем измерять эту величину в нашем эксперименте, означает, что возможно наблюдать событие: значение величины ξ принадлежит данному интервалу Δ, каков бы ни был этот интервал. Значит

$$\{\omega: \xi(\omega) \in \Delta\} \in U. \quad (4)$$

Функции $\xi(\omega)$, удовлетворяющие для всех интервалов Δ условию (4), называются измеримыми относительно σ-алгебры U или U-измеримыми. Для измеримой относительно U функции $\xi(\omega)$ соотношение (4) выполнено для всякого борелевского множества $\Delta \subset R$.

Случайной величиной на вероятностном пространстве $\{\Omega, U, \mathrm{P}\}$ называется всякая U – измеримая функция $\xi(\omega)$, определенная на Ω.

Случайные величины часто обозначают ξ вместо $\xi(\omega)$, не указывая на зависимость от элементарного события.

Простейшим примером случайной величины является величина $\chi_A(\omega)$ – индикатор события $A \in U$: $\chi_A(\omega) = 1$, если $\omega \in \mathrm{A}$; $\chi_A(\omega) = 0$, если $\omega \notin A$.

Другим примером случайной величины служит дискретная случайная величина, принимающая не более чем счетное число различных значений $\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots\}$. Очевидно, что события $\{\xi(\omega) = x_i\} = A_i$ попарно несовместимы и

$\bigcup_i A_i = \Omega$. Пусть $P(A_i) = P\{\xi(\omega) = x_i\} = P\{\xi = x_i\} = p_i$.

Набор вероятностей $\{\mathrm{p}_i\}$ и чисел $\{\mathrm{x}_i\}$ называется распределением дискретной величины ξ. Оно определяет вероятность попадания величины ξ в любое множество Λ на прямой:

$$\mathrm{P}\{\xi \in \Lambda\} = \sum_{x_i \in \Lambda} \mathrm{p}_i.$$

Распределение случайной величины.

Распределением произвольной (случайной) величины ξ называется мера

$$\mathrm{P}_\xi(\Lambda) = \mathrm{P}(\{\omega: \xi(\omega) \in \Lambda\}), \quad (5)$$

заданная на σ-алгебре борелевских множеств из R. Из (4) следует, что для всех борелевских множеств $\{\omega: \xi(\omega) \in \Lambda\} \in U$, и поэтому правая часть (5) определена. Для задания распределения величины ξ достаточно задать функцию $F_\xi(x) = \mathrm{P}_\xi\big((-\infty, x)\big) = P\{\xi < x\}$, которая называется функцией распределения случайной величины ξ и является одномерной функцией распределения.

Если ξ – дискретная величина, для которой $P\{\xi = x_i\} = p_i$, то

$$F_\xi(x) = \sum_{x_i < x} p_i = \sum_i p_i \varepsilon(x - x_i),$$

где $\varepsilon(\mathrm{x}) = 1$, если $x > 0$; $\varepsilon(\mathrm{x}) = 0$, если $x \le 0$. Обозначим через $F_\xi(x+0)$ предел справа $F_\xi(x)$ в точке x. Величина скачка функции распределения $F_\xi(x+0) - F_\xi(x)$ совпадает с вероятностью $\mathrm{P}\{\xi = \mathrm{x}\}$; если $\mathrm{P}\{\xi = \mathrm{x}\} > 0$, то x называют атомом распределения случайной величины ξ. Говорят, что ξ имеет непрерывное распределение, если $F_\xi(x)$ – непрерывная функция. В этом случае любое фиксированное значение ξ может принимать лишь с вероятностью 0. Величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует такая функция $f_\xi(x)$, что

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t) dt. \quad (6)$$

Функция $f_\xi(x)$ удовлетворяющая соотношению (6), называется плотностью распределения величины ξ. Если ξ имеет плотность распределения, то ее распределение выражается формулой

$$P_\xi(\Lambda) = \int_\Lambda f_\xi(t) dt \quad (7)$$

Интеграл (7) понимается как интеграл Лебега. В частности,

$$P_\xi\big((a, b)\big) = \int_a^b f_\xi(t) dt = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Плотность распределения удовлетворяет следующим двум условиям:

а) $f_\xi(t) \ge 0$ для почти всех t;

б) $\int f_\xi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t) dt = 1$.

Любая измеримая по Лебегу функция $f_\xi(t)$, удовлетворяющая этим двум условиям, может выступать в качестве плотности некоторой случайной величины.

Группа случайных величин. Совместное распределение случайных величин [4], [6]. Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, U, \mathrm{P}\}$ заданы m случайных величин $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_т(\omega)$. Тогда для всех $a_1 < b_1, \ldots, a_m < b_m$

$$\{\omega : a_1 \leq \xi_1(\omega) < b_1, \ldots, a_m \leq \xi_m(\omega) < b_m\} = \bigcap_{k=1}^{m} \{\omega : a_k \leq \xi_k(\omega) < b_k\} \in U \qquad (8)$$

Обозначим через $(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_т(\omega))$ точку в R^m, а через Λ полуоткрытый параллелепипед: $\Lambda = \{\vec{x} : a_1 \leq x^1 < b_1, \ldots, a_m \leq x^m < b_m\}$.

Соотношение (8) для произвольного борелевского множества Λ из R^m можно переписать так:

$$\{\omega : (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_т(\omega)) \in \Lambda\} \in U. \qquad (9)$$

Мера $\mu_{\xi_1,\ldots,\xi_m}$, определенная на борелевских множествах соотношением

$$\mu_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(B) = P(\{\omega : (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_m(\omega)) \in B\}), \qquad (10)$$

называется совместным распределением случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_т$ или распределением случайного вектора $\vec{\xi} = (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_т(\omega))$ в R^m. Для определения меры $\mu_{\xi_1,\ldots,\xi_m}$ достаточно задать функцию

$$F_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(x_1, \ldots, x_m) = P(\{\omega : \xi_1(\omega) < x_1, \ldots, \xi_m(\omega) < x_m\}) =$$
$$= P\{\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_m < x_m\}, \qquad (11)$$

которая называется совместной функцией распределения величин $\xi_1, \ldots, \xi_т$. Эта функция является m-мерной функцией распределения и, следовательно, удовлетворяет условиям 1) – 4). Зная совместную функцию распределения величин $\xi_1, \ldots, \xi_т$, можно определить и совместную функцию распределения величин $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k}$, где $0 < i_1 <\ldots< i_k \leq m$:

$$F_{\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_k}}\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right) = F_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(x_1, \ldots, x_m) \Big|_{\substack{x_j = +\infty \\ j \neq i_1,\ldots,i_k}} \qquad (12)$$

под $F(+\infty)$ понимается $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$. Соотношение (12) следует непосредственно из (11), если только $\{\xi_j < +\infty\}$ – достоверное событие. Совместные функции распределения подмножества случайных величин, получаемые из функции распределения всех величин, называются маргинальными (частными) функциями распределения (формула (12) определяет k-мерные маргинальные распределения). В частности, зная $F_{\xi_1,\ldots,\xi_т}$, определяем и функции распределения величин ξ_k:

$$F_{\xi_k}(x) = F_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(+\infty, \overset{k-1}{\ldots}, +\infty, x, +\infty, \overset{m-k}{\ldots}, +\infty).$$

Дискретные и непрерывные распределения.

Если каждая из величин ξ_k имеет дискретное распределение, то говорят, что случайный вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_т)$ также имеет дискретное распределение (или что совместное распределение величин $\xi_1, \ldots, \xi_т$ дискретно). Пусть ξ_k принимает значения $\{\mathrm{y}_1^k, \mathrm{y}_2^k, \ldots\}$. Тогда совместное распределение величин $\xi_1, \ldots, \xi_m$ определяется вероятностями

$$p_{i_1,\ldots,i_m} = P\left\{\xi_1 = y_{i_1}^1, \xi_2 = y_{i_2}^2 \ldots, \xi_m = y_{i_m}^m\right\}.$$

Мера, задающая совместное распределение $\xi_1, \ldots, \xi_m$, задается в этом случае равенством

$$\mu_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(B) = \sum p_{i_1,\ldots,i_m} \chi_B\left(y_{i_1}^1, \ldots, y_{i_m}^m\right),$$

где $\chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{y}^1, \ldots, \mathrm{y}^т) = 1$, если $(\mathrm{y}^1, \ldots, \mathrm{y}^т) \in \mathrm{B}$; $\chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{y}^1, \ldots, \mathrm{y}^т) = 0$, если $(\mathrm{y}^1, \ldots, \mathrm{y}^т) \notin \mathrm{B}$; $(\mathrm{y}^1, \ldots, \mathrm{y}^т)$ – точка в R^m. Совместная функция распределения задается формулой

$$F_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{y_{i_1}^1 < x_1, \ldots, y_{i_m}^m < x_m} p_{i_1,\ldots,i_m}.$$

Величины $\xi_1, \ldots, \xi_т$ имеют совместное абсолютно непрерывное распределение если существует такая измеримая по Лебегу функция $f_{\xi_1,\ldots,\xi_т}(x_1, \ldots, x_т)$, что совместное распределение величин $\xi_1, \ldots, \xi_m$ определяется формулой

$$\mu_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(B) = \int_B \ldots \int_B f_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(x_1,\ldots,x_m)dx_1\ldots dx_m$$

(справа записан m-кратный интеграл Лебега). Тогда функция $f_{\xi_1,\ldots,\xi_т}(x_1,\ldots,x_т)$ называется совместной плотностью распределения величин $\xi_1,\ldots,\xi_m$. Совместная функция распределения выражается через совместную плотность по формуле

$$F_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(x_1,\ldots,x_m) = \int_{-\infty}^{x_1}\ldots\int_{-\infty}^{x_m} f_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(y_1,\ldots,y_m)dy_1\ldots dy_m.$$

Отсюда следует формула для плотности:

$$f_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(x_1,\ldots,x_m) = \frac{\partial^m}{\partial x_1\ldots\partial x_m}F_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(x_1,\ldots,x_m).$$

Отметим, что существование производной, стоящей в правой части последнего равенства, для почти всех $x_1,\ldots,x_m$ еще не обеспечивает существования плотности. Чтобы последняя существовала, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^m}{\partial x_1\ldots\partial x_m}F_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(x_1,\ldots,x_m)dx_1\ldots dx_m = 1.$$

Свойства совместной плотности:

а) $f_{\xi_1,\ldots,\xi_т}(x_1,\ldots,x_т) \geq 0$ для почти всех $x_1,\ldots,x_m$;

б) $\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(x_1,\ldots,x_m)dx_1\ldots dx_m = 1$.

Всякая измеримая по Лебегу функция $g(x_1,\ldots,x_m)$, удовлетворяющая этим двум условиям, может выступать в качестве совместной плотности некоторых m случайных величин и называется m-мерной плотностью.

Проинтегрировав плотность по аргументам x_j, $j \neq i_1,\ldots,i_k$, от $-\infty$ до $+\infty$, получим совместную плотность распределения величин $\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_k}$. В частности,

$$f_{\xi_k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(x_1,\ldots,x_{k-1},x,x_{k+1},\ldots,x_m)dx_1\ldots dx_{k-1}dx_{k+1}\ldots dx_m.$$

Пример. Случайный вектор $(\xi_1,\ldots,\xi_т)$ равномерно распределен в ограниченном измеримом множестве $G \in R^m$, если совместная плотность величин $\xi_1,\ldots,\xi_m$ имеет вид

$$f_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(x_1,\ldots,x_m) = \begin{cases} \frac{1}{mesG}, & (x_1,\ldots,x_m) \in G; \\ 0, & (x_1,\ldots,x_m) \notin G, \end{cases}$$

где $mesG$ -лебегова мера Gв R^m.

Математическое ожидание дискретной величины.

Пусть в случайном эксперименте наблюдается некоторая случайная величина ξ, которая может принимать конечное число значений $a_1,\ldots,a_N$ с вероятностями $p_1,\ldots,p_N$. Если $x_1,\ldots,x_п$ – наблюдения нашей величины в n последовательных осуществлениях эксперимента, то среднее значение реализаций можно представить в виде

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \sum_{k=1}^{N} a_k v_n(A_k),$$

где A_k – события $\{\xi = a_k\}$, v_n- частота события. Заменяя частоты на вероятности, получим выражение

$$M\xi = \sum_{k=1}^{N} a_k p_k,$$

которое называется средним или математическим ожиданием случайной величины ξ.

Если ξ – произвольная дискретная случайная величина, принимающая значения $a_k(k = 1,2,\ldots)$ с вероятностями p_k, то $M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k$, если только ряд справа сходится абсолютно. Некоторые свойства математического ожидания дискретной величины.

1) $M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$; (если только сущ. мат. ожидание справа и слева);

2) $M(\lambda\xi) = \lambda M(\xi)$ для всех постоянных λ;

3) если $P(\xi_1 = \xi_2) = 1$, то $M\xi_1 = M\xi_2$;

4) если $\xi \geq 0$, то $M\xi \geq 0$;

5) если $P\{\xi = c\} = 1$, то $M\xi = c$.

Математическое ожидание произвольной случайной величины. Для определения математического ожидания произвольной случайной величины ξ введем последовательность дискретных случайных величин $\xi_п$, определяемых равенством $\xi_п = k/n$, если $k/n \le \xi < (k+1)/n$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; п = 1,2,…. Очевидно, что $|\xi_п - \xi| \le 1/n$. Если $M\xi_п$ существует при некотором п, то оно существует для всех n и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\to-\infty}^{\infty} \frac{k}{n} P\left\{\frac{k}{n} \le \xi < \frac{k+1}{n}\right\}.$$

Этот предел называется математическим ожиданием величины ξ и обозначается $M\xi$. Таким образом определенное математическое ожидание также удовлетворяет свойствам 1-5. Если ξ – неотрицательная случайная величина, то считаем $M\xi$ всегда определенным и равным $+\infty$ в том случае, когда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} P\left\{\frac{k}{n} \le \xi < \frac{k+1}{n}\right\}$ расходится.

Если $F_\xi(x)$ – функция распределения величины ξ, то

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x) \text{ при } \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_\xi(x) < \infty$$

интегралы справа являются интегралами Стилтьеса и вычисляются как пределы интегральных сумм. Если существует плотность $f_\xi(x)$ величины ξ, то

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx \text{ при } \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx < \infty.$$

Если величина $\xi = \xi(\omega)$ задана на вероятностном пространстве $\{\Omega,\ U,\ \mathrm{P}\}$, то ее математическое ожидание может быть вычислено с помощью интеграла Лебега по мере Р:

$$M\xi(\omega) = \int \xi(\omega) P(d\omega),$$

при условии, что интеграл справа существует.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_т$ – случайные величины, $F_{\xi_1,\ldots,\xi_т}(x_1, \ldots, x_т)$ – их совместная функция распределения, $g(x_1, \ldots, x_m)$- некоторая борелевская функция. Тогда

$$Mg(\xi_1, .., \xi_m) = \int \ldots \int g(x_1, \ldots, x_m) dF_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(x_1, \ldots, x_m),$$

если только интеграл справа абсолютно сходится (он понимается как m-кратный интеграл Лебега-Стилтьеса); если g – непрерывная функция, то его можно вычислить как интеграл Римана-Стилтьеса. В том случае, когда существует совместная плотность величин $\xi_1, \ldots, \xi_m$, предыдущая формула принимает вид

$$Mg(\xi_1, .., \xi_m) = \int \ldots \int g(x_1, \ldots, x_m) f_{\xi_1,\ldots,\xi_m}(x_1, \ldots, x_m) dx_1 \ldots dx_m,$$

если только m-кратный интеграл Лебега в правой части абсолютно сходится.

Моменты случайных величин.

Величина $M\xi^k = \int x^k dF_\xi(x)$, $k = 1,2, \ldots$, называется k-м моментом величины ξ (если указанное математическое ожидание существует); k-й момент величины $(\xi - M\xi)$ называется k-м центральным моментом. Он вычисляется по формуле

$$M(\xi - M\xi)^k = \int (x - M\xi)^k dF_\xi(x).$$

k-й момент случайной величины $|\xi|$ называется абсолютным k -м моментом величины ξ.

Особую роль играет второй центральный момент, который называется дисперсией величины и обозначается $D\xi$:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int (x - M\xi)^2 dF_\xi(x) =$$

$$= \int x^2 dF_\xi(x) - \left(\int x dF_\xi(x)\right)^2.$$

Для абсолютно непрерывных величин дисперсия вычисляется по формуле

$$D\xi = \int (x - M\xi)^2 f_\xi(x) dx = \int x^2 f_\xi(x) dx - \left(\int x f_\xi(x) dx\right)^2.$$

Для дискретной величины ξ, принимающей значения a_k с вероятностями p_k,

$$D\xi = \sum_k a_k^2 p_k - \left(\sum_k a_k p_k\right)^2 = \sum_k \left(a_k - \sum_k a_k p_k\right)^2 p_k.$$

Заметим, что $D\xi$ всегда определена, если определено $M\xi$, но может принимать значения $+\infty$.

Величина $\sigma=\sqrt{D\xi}$ называется среднеквадратическим отклонением величины ξ. Отметим одно важное свойство величины $D\xi$: если $D\xi=0$, то $\mathrm{P}\{\xi=\mathrm{M}\xi\}=1$, т.е. в этом случае величина ξ с вероятностью 1 постоянна.

Пусть $\xi_1,\dots,\xi_т$ – случайные величины с совместной функцией распределения $F_{\xi_1,\dots,\xi_m}(x_1,\dots,x_m)$. Величины

$$m_{\xi_1,\dots,\xi_m}(k_1,\dots,k_m)=\int\dots\int x_1^{k_1}\dots x_m^{k_m}\,dF_{\xi_1,\dots,\xi_m}(x_1,\dots,x_m)=M\xi_1^{k_1}\dots\xi_m^{k_m},$$

где $k_1,\dots,k_т\geq 0$, $k_1+\dots+k_т=k$, называются смешанными моментами величин $\xi_1,\dots,\xi_т$ порядка k.

Условное распределение случайной величины. Рассмотрим некоторую величину ξ. Выражение

$$F_\xi(x|A)=\frac{P(\{\xi<x\}\cap A)}{P(A)}$$

называется условной функцией распределения величины ξ относительно события A. Она определена, если $P(A)>0$. Если $F_\xi(x|A)$ абсолютно непрерывна и

$$F_\xi(x|A)=\int_{-\infty}^{x}f_\xi(t|A)dt,$$

то $f_\xi(\mathrm{x}|A)$ называется условной плотностью распределения величины ξ относительно события A. Как условная функция распределения, так и условная плотность распределения обладают свойствами функции распределения и плотности распределения соответственно. Моменты, вычисленные по условной функции распределения, называются условными моментами величины. В частности, выражение

$$M(\xi|A)=\int xdF_\xi(x|A),$$

если интеграл справа сходится абсолютно, называется условным математическим ожиданием величины ξ относительно события A. Если ξ задана на вероятностном пространстве $\{\Omega,U,\mathrm{P}\}$, то для условного математического ожидания можно привести другое выражение:

$$M(\xi|A)=\frac{1}{P(A)}\int_A\xi(\omega)P(d\omega).$$

Пусть $\mathrm{E}_1,\dots,\mathrm{E}_п$ – полная группа событий, т.е. $\sum P(E_I)=1$ и $P\left(E_I\right)>0$ $(i=1,\dots,n)$. Справедлива следующая формула полного математического ожидания:

$$M\xi=\sum_{k=1}^{n}M(\xi|E_k)P\,(E_k).$$

Можно привести и некоторое обобщение этой формулы. Если C имеет вид $C=\bigcup E_{i_k}$, то

$$\int_C\xi(\omega)P(d\omega)=\sum_{E_k\subset C}M(\xi|E_k)P(E_k). \tag{13}$$

Предположим, что событие A заключается в том, что $\{a\leq\xi<b\}$.

Тогда условная функция распределения

$$F_\xi(x|a\leq\xi<b)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{F_\xi(x)-F_\xi(a)}{F_\xi(b)-F_\xi(a)}, & a\leq x<b,\\ 1, & x>b,\end{cases}$$

есть распределение урезанной величины ξ или урезанное распределение. Запишем математическое ожидание и дисперсию для урезанного распределения:

$$M(\xi|a\leq\xi<b)=\frac{1}{F_\xi(b)-F_\xi(a)}\int_a^b xdF_\xi(x),$$

$$D(\xi|\{a\leq\xi<b\})=\frac{1}{F_\xi(b)-F_\xi(a)}\int_a^b x^2dF_\xi(x)-\left(\frac{1}{F_\xi(b)-F_\xi(a)}\int_a^b xdF_\xi(x)\right)^2.$$

Закон больших чисел.

Обозначим через $\nu_п$ число появлений события A в серии из п независимых испытаний. Пусть p – вероятность появления события A в одном испытании. Тогда при любом $\varepsilon>0$

$$\frac{lim}{n\to\infty\left\{\left|\frac{\nu_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right\}}. \tag{14}$$

Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_п, п \geq 1\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ, если для каждого $\varepsilon > 0$

$$\frac{lim}{n\to\infty\{|\xi_n-\xi|>\varepsilon\}}.$$

Таким образом, предыдущее утверждение означает, что частота $\frac{\nu_n}{n}$ появления события A в серии из n испытаний сходится по вероятности к вероятности p появления события A в одном испытании. Вообще, законом больших чисел называют теоремы, дающие условия, при которых

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k \to 0$$

по вероятности. В приведенной схеме Бернулли $\nu_п = \sum_{i=1}^{n}\xi_i$, где ξ_i – случайная величина, равная 1, если в i-м испытании событие A произошло, и равная 0 в противном случае. Тогда

$$\frac{\nu_п}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k, p = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k.$$

Мы ниже приведем более общее задачу [4], [7]. Пусть заданы последовательность независимых случайных величин $\{\xi_п, п = 1,2,\dots\}$ и числовая последовательность $\{\beta_п, п = 1,2,\dots\}$ такая, что $\beta_п \to \infty$ при $п \to \infty$. При каких условиях существует такая числовая последовательность $\{\alpha_п, 1,2,\dots\}$, что при $n \longrightarrow \infty \frac{1}{\beta_n}\sum_{k=1}^{n}\xi_n - \alpha_n \to 0$ по вероятности? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\{\xi_п, п \geq 1\}$ – последовательность независимых случайных величин $F_n(x) = P\{\xi_п < x\}$. Обозначим через $т_n$ медиану случайной величины $\xi_п$, то есть любое из чисел, удовлетворяющих неравенствам $P\{\xi_п \geq т_п\} \geq 1/2$ и $P\{\xi_п \leq т_п\} \geq 1/2$. Для того чтобы существовала последовательность постоянных $\{\alpha_п, п \geq 1\}$ такая, что при $n \to \infty$

$$\frac{1}{\beta_n}\sum_{k=1}^{n}\xi_n - \alpha_n \to 0$$

по вероятности, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-m_k)^2}{\beta_k^2+(x-m_k)^2}dF_k(x) \to 0. \tag{15}$$

Если это условие выполнено, то

$$\alpha_n = \frac{1}{\beta_n}\sum_{k=1}^{n}\left(m_k + \int_{|x-m_k|<\tau\beta_n}(x-m_k)dF_k(x)\right) + o(1),$$

где τ – произвольная положительная постоянная.

Простое условие применимости закона больших чисел содержится в следующих теоремах.

Теорема 3. Если последовательность случайных величин $\{\xi_п, п \geq 1\}$ такова, что $D\xi_п$ существует и $\frac{D\xi_п}{п} \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k \to 0$$

по вероятности.

Если величины $\xi_п$ $(п = 1,2,\dots)$ имеет одну и ту же функцию распределения $F(x) = P\{\xi_n < x\}$, то они называются одинаково распределенными.

Теорема 4. Если $\{\xi_п, п \geq 1\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин и если существует математическое ожидание $M\xi_п = a$, то при то при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \to a$$

по вероятности.

Неравенство Чебышева.

Пусть ξ – произвольная случайная величина и $g(x)$ – неотрицательная четная и неубывающая на $[0;\infty)$ функция. Тогда для всех $a \geq 0$

$$\frac{Mg(\xi)-g(a)}{п.н.sup\, g(\xi)} \leq P\{|\xi| \geq a\} \leq \frac{Mg(\xi)}{g(a)}. \quad (16)$$

Величина, стоящая в знаменателе левой части неравенства, называется почти наверное верхней гранью случайной величины $g(\xi)$ и определяется так:

$$п.н.\,sup\, g\,(\xi) = inf\{C: C \geq 0 \quad и \quad P\{g(\xi) > C\} = 0\}.$$

Полагая в неравенстве (16) $g(x) = |x|^r$ $(r > 0)$, получаем

$$\frac{M|\xi|^r - a^r}{п.н.\sup|\xi|^r} \leq P\{|\xi| \geq a\} \leq \frac{M|\xi|^r}{a^r}. \quad (17)$$

Применив это неравенство к величине $\xi - M\xi$, получим

$$\frac{M|\xi - M\xi|^r - a^r}{п.н.\sup|\xi - M\xi|^r} \leq P\{|\xi - M\xi| \geq a\} \leq \frac{M|\xi - M\xi|^r}{a^r}. \quad (18)$$

При $r = 2$ отсюда следует неравенство Чебышева:

$$P\{|\xi - M\xi| \geq a\} \leq \frac{D\xi}{a^2}. \quad (19)$$

Центральная предельная теорема.

Термин центральная предельная теорема в теории вероятностей означает любое утверждение о том, что при выполнении определенных условий функция распределения суммы индивидуально малых случайных величин с ростом числа слагаемых сходится к нормальной функции распределения. Исключительная важность центральной предельной теоремы объясняется тем, что она дает теоретическое объяснение следующему, многократно подтвержденному практикой наблюдению: если исход случайного эксперимента определяется большим числом случайных факторов, влияние каждого из которых пренебрежимо мало, то такой эксперимент хорошо аппроксимируется нормальным распределением с соответствующим образом подобранными математическим ожиданием и дисперсией [4], [8].

Центральная предельная теорема для последовательностей независимых случайных величин. Центральная предельная теорема при наличии конечных дисперсий.

Пусть $\{\xi_k, k \geq 1\}$ – последовательность взаимно независимых случайных величин с функциями распределения $G_k(x) = P\{\xi_k < x\}$, имеющих конечные математические ожидания $M\xi_k = a_k$ и дисперсии $D\xi_k = \sigma_k^2$, причем

$$В_п^2 = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 > 0 \text{ для } n \geq 1.$$

Нормированной суммой случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называется случайная величина

$$\eta_n = B_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k),$$

которая характеризуется тем, что $M\eta_n = 0$, $D\eta_n = 1$ для любого $n \geq 1$.

Пусть $F_n(x)$ функция распределения нормированной суммы η_n и $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}dz$ – нормальная (0,1) функция распределения. При наличии конечных дисперсий центральная предельная теорема устанавливает условия, при которых имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x) \quad (20)$$

равномерно относительно $x \in (-\infty, \infty)$.

Одна из наиболее простых и, в то же время, наиболее часто применяемых форм центральной предельной теоремы связана с последовательностью одинаково распределенных случайных величин.

Теорема Леви-Линдберга.

Если $\{\xi_k, k \geq 1\}$ – последовательность взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин, то для функции распределения $F_n(x)$ нормированной суммы $\eta_п = \frac{1}{\sigma\sqrt{п}}(\sum \xi_k - na)$ имеет место соотношение (20), а $= M\xi_k, \sigma^2 = D\xi_k$.

5 Выводы

Нами были изложены основные сведения и факты из теории вероятностей и математической статистики, необходимые для введения в курс теории оценивания параметров и описания общих схем методов Монте-Карло. При использовании методов Монте-Карло моделируются случайные величины с известными законами распределения, и из этих величин по известным правилам конструируются более сложные, распределение которых уже не может быть найдено аналитически. Эти результирующие распределения могут быть известны с точностью до параметров – в этом случае используется аппарат математической статистики для оценивания этих параметров. В случае, когда вид результирующего распределения неизвестен, используются непараметрические методы [9].

Список литературы

1 Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – М.: Наука.2015. – 492 с.

2 Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. – М.: Наука. 1982. – 247 с.

3 Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир. 1975.

4 Гмурман В.Е. Теория вероятности и математическая статистика. – М.: Высшая школа, изд. Четвертое доп. 2011. – 217 с.

5 Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука. 1973.

6 Бусленко Н.П., Голенко Д.И., Соболь И.М., Срагович В.Г., Шрейдер Ю.А. Метод стохастических испытаний (метод Монте-Карло). – М.: ГИФЛ, 1962. – 226 с.

7 Раменская А.В. Метод Монте-Карло и инструментальные средства его реализации: методические указания / А.В. Раменская, К.В. Пивоварова. Оренбургский гос. Университет – Оренбург: ОГУ, 2018. – 58 с.

8 Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод стохастических испытаний Монте-Карло и его реализация в цифровых машинах. – Физматгиз, изд. Третье доп. 2012. – 301 с.

9 Михайлов Г.А. Оптимизация взвешенных методов Монте-Карло. – М. Наука,1987. – 239 с.

ТАСТАНОВ, М.Г., НУРГЕЛЬДИНА, А.Е.

МОНТЕ-КАРЛО ӘДІСТЕРІНІҢ ЖАЛПЫ СХЕМАСЫ

Статистикалық модельдеу әдісі ықтималдық тығыздығы берілген деп саналатын көптеген кездейсоқ сигналдар арқылы модельді сынауға негізделген. Бұл жағдайдағы мақсат – шығу нәтижелерін анықтау. Статистикалық модельдеу Монте-Карло әдісін имитациядан басқа әдістерді қолдану мүмкін болмаған жағдайларда қолданады. Монте-Карло әдістерінің негізі ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика болып табылады. Сондықтан, осы мақалада біз ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистикадан жалпы сипаттағы кейбір анықтамалар мен фактілерді және Монте-Карло әдістерін қолдануға қатысты басқа да фактілерді келтіреміз.

Түйінді сөздер: *статистикалық модельдеу, σ-оқиғалар алгебрасы, борел σ-алгебрасы, кездейсоқ шаманың таралуы, Лебег интегралы, Үлкен сандар заңы.*

TASTANOV, M.G., NURGELDINA, A.Y.

MONTE CARLO METHODS DESIGN SCHEME

The statistical modeling method is based on testing a model with a large number of random signals whose probability density function is assumed to be given. The objective in this case is to determine the output results. Statistical modeling employs the Monte Carlo method in situations where other methods, apart from simulation, cannot be applied. The foundation of Monte Carlo methods lies in probability theory and mathematical statistics. Therefore, in this article, we will present certain definitions and general facts from *probability theory and mathematical statistics, along with other relevant facts related to the applications of Monte Carlo methods.*

Key words: *statistical modeling, σ-algebra of events, Borel σ-algebra, random variable distribution, Lebesgue integral, law of large numbers.*

Сведения об авторах:

Тастанов Мейрамбек Габдуалиевич *– кандидат физико-математических наук, доцент, и.о профессора кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.*

Нургельдина Асель Ермековна *– магистр естественных наук, старший преподаватель кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.*

Тастанов Мейрамбек Ғабдуалиұлы *– физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, математика және физика кафедрасы профессорының м.а., Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.*

Нургельдина Асель Ермековна *– жаратылыстану ғылымдарының магистрі, математика және физика кафедрасының аға оқытушысы, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.*

Tastanov Meirambek Gabdualiyevich *– Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, acting Professor of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.*

Nurgeldina Assel Yermekovna *– Master of Natural Sciences, Senior Lecturer of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.*

МАЗМҰНЫ

ӘЛЕУМЕТТІК ҒЫЛЫМДАР

СОДЕРЖАНИЕ

ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ И ИСКУССТВО

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ИНЖИНИРИНГ И ТЕХНОЛОГИИ

СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ, ВЕТЕРИНАРНЫЕ НАУКИ

СОЦИАЛЬНЫЕ НАУКИ

CONTENT

HUMANITIES AND ARTS

NATURAL SCIENCES

ENGINEERING AND TECHNOLOGY

AGRICULTURAL, VETERINARY SCIENCES

SOCIAL SCIENCES

Редактор, корректор: *А. Симонова*
Корректорлар: *Б. Сыздыкова, Т. Цай*
Компьютерлік беттеу: *С. Красикова*

Редактор, корректор: *А. Симонова*
Корректоры: *Б. Сыздыкова, Т. Цай*
Компьютерная верстка: *С. Красикова*

Басуға 15.01.2025 ж. берілді.
Пішімі 60х84/8. Көлемі 14,1 б.т.
Тапсырыс № 003

Ахмте Байтұрсынұлы атындағы
Қостанай өңірлік университетіндегі
редакциялық-баспа бөлімінде басылған
Қостанай қ., Байтұрсынов к., 47

Подписано в печать 15.01.2025 г.
Формат 60х84/8. Объем 14,1 п.л.
Заказ № 003

Отпечатано в редакционно-издательском отделе
Костанайского регионального университета
имени Ахмет Байтұрсынұлы
г. Костанай, ул. Байтурсынова, 47