



BAITURSYNULY
UNIVERSITY

«АХМЕТ БАЙТҰРСЫНҰЛЫ
АТЫНДАҒЫ ҚОСТАНАЙ ӨңІРЛІК
УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ



ҚМПИ ЖАРШЫСЫ

КӨПСАЛАЛЫ
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ
МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

№ 1
2025

ISSN 2310-3353



2025 ж., қаңтар, №1 (77)
Журнал 2005 ж. қаңтардан бастап шығады
Жылына төрт рет шығады

Құрылтайшы: *Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті*

Бас редактор: *Қуанышбаев С. Б.*, география ғылымдарының докторы, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы ҚӨУ, Қазақстан.

Бас редактордың орынбасары: *Жарлығасов Ж.Б.*, ауыл шаруашылығы ғылымдарының кандидаты, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы ҚӨУ, Қазақстан.

РЕДАКЦИЯ АЛҚАСЫ

Әлімбаев А.Е., философия докторы (PhD), А.К. Құсайынов атындағы Еуразия гуманитарлық институты, Қазақстан.

Емин Атасой, PhD докторы, Улудаг университеті, Бурса қ., Түркия.

Зоя Микниене, докторы, (PhD) Литва денсаулық туралы ғылым университеті, Каунас қ., Литва Республикасы.

Качев Д.А., философия ғылымдарының кандидаты, тарих магистрі, «Челябі мемлекеттік университеті» ЖББ ФМБББМ Қостанай филиалы, Қазақстан.

Ксембаева С.К., педагогика ғылымдарының кандидаты, «Торайғыров университеті» КЕАҚ, Қазақстан.

Лина Анастасова, әлеуметтану ғылымдарының докторы, Бургас еркін университеті, Бургас қ., Болгария.

Медетов Н.А., физика-математика ғылымдарының докторы, «Ш. Уалиханов атындағы Көкшетау университеті» КЕАҚ, Қазақстан.

Мишулина О.В., экономика ғылымдарының докторы, «Челябі мемлекеттік университеті» ЖББ ФМБББМ Қостанай филиалы, Қазақстан.

Соловьев С.А., биология ғылымдарының докторы, Новосібір мемлекеттік экономика және басқару университеті, Ресей.

Скороходов Д.М., техника ғылымдарының кандидаты, «Ресей мемлекеттік аграрлық университеті – К.А. Тимирязев атындағы Мәскеу ауыл шаруашылық академиясы» ЖББ ФМБББМ, Ресей.

Сычева И.Н., ауыл шаруашылығы ғылымдарының кандидаты, «Ресей мемлекеттік аграрлық университеті – К.А. Тимирязев атындағы Мәскеу ауыл шаруашылық академиясы» ЖББ ФМБББМ, Ресей.

Ташев А.Н., экология бойынша биология ғылымдарының кандидаты, орман шаруашылығы университеті, София қ., Болгария.

Уразбоев Г.У., физика-математика ғылымдарының докторы, Ургенч мемлекеттік университеті, Өзбекстан.

Тіркеу туралы куәлік №5452-Ж
Қазақстан Республикасының ақпарат министрлігімен 17.09.2004 берілген.
Мерзімді баспа басылымын қайта есепке алу 07.11.2023 ж.
Жазылу бойынша индексі 74081

Редакцияның мекен-жайы:

110000, Қостанай қ., Байтұрсынұлы к., 47
(Редакциялық-баспа бөлімі)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

№1 (77), январь 2025 г.
Издается с января 2005 года
Выходит 4 раза в год

Учредитель: *Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы*

Главный редактор: *Куанышбаев С.Б.*, доктор географических наук, КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы, Казахстан.

Заместитель главного редактора: *Жарлыгасов Ж.Б.*, кандидат сельскохозяйственных наук, КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы, Казахстан.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Алимбаев А.Е., доктор философии (PhD), Евразийский гуманитарный институт имени А.К.Кусаинова, Казахстан.

Емин Атасой, доктор PhD, Университет Улудаг, г. Бурса, Турция.

Зоя Микниене, доктор (PhD), Литовский университет наук здоровья, г. Каунас, Республика Литва.

Качеев Д.А., кандидат философских наук, магистр истории, Костанайский филиал ФГБОУ ВО «ЧелГУ», Казахстан.

Ксембаева С.К., кандидат педагогических наук, НАО «Торайгыров университет», Казахстан.

Лина Анастасова, доктор социологии, Бургасский свободный университет, г. Бургас, Болгария.

Медетов Н.А., доктор физико-математических наук, НАО «Кокшетауский университет им. Ш.Уалиханова», Казахстан.

Мишулина О.В., доктор экономических наук, Костанайский филиал ФГБОУ ВО «ЧелГУ», Казахстан.

Соловьев С.А., доктор биологических наук, Новосибирский государственный университет экономики и управления, Россия.

Скорыходов Д.М., кандидат технических наук, ФГБОУ ВО РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, Россия.

Сычева И.Н., кандидат сельскохозяйственных наук, ФГБОУ ВО РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, Россия.

Ташев А.Н., кандидат биологических наук по экологии, Лесотехнический университет, г. София, Болгария.

Уразбоев Г.У., доктор физико-математических наук, Ургенчский государственный университет, Узбекистан.

Свидетельство о регистрации № 5452-Ж
выдано Министерством информации Республики Казахстан 17.09.2004 г.
Переучёт периодического печатного издания 07.11.2023 г.
Подписной индекс 74081

Адрес редакции:

110000, г. Костанай, ул. Байтұрсынұлы, 47
(Редакционно-издательский отдел)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

often encounter processes that cannot be accurately predicted in advance. This uncertainty (unpredictability) is caused by the influence of random factors affecting the course of the process. The theory of random processes is the basis of Monte Carlo methods, therefore this article provides information from the theory of random processes (Markov chains, random walks, homogeneous Markov processes, etc.) and the theory of martingales. We will further use the theory of martingales to prove the ε -bias of estimates. The solution to the original problem will be estimated at one point (Point estimation).

Key words: random processes, Markov chains, Markovianity criterion, random walks, homogeneous Markov chains, transition probability, martingales.

Сведения об авторах:

Тастанов Мейрамбек Габдуалиевич – кандидат физико-математических наук, доцент, и.о. профессора кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.

Жарлыгасова Эльмира Закировна – магистр естественных наук, старший преподаватель кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.

Тастанов Мейрамбек Габдуалиұлы – физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, математика және физика кафедрасы профессорының м.а., Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.

Жарлыгасова Эльмира Закировна – жаратылыстану ғылымдарының магистрі, математика және физика кафедрасының аға оқытушысы, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.

Tastanov Meirambek Gabdualiyevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, acting Professor of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.

Zharlygassova Elmira Zakirovna – Master of Natural Sciences, Senior Lecturer of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.

УДК 519.245

Тастанов, М.Г.,

кандидат физико-математических наук,
и.о. профессора кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан

Нургельдина, А.Е.,

магистр естественных наук,
старший преподаватель
кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДОВ МОНТЕ-КАРЛО

Аннотация

Метод статистического моделирования основан на испытании модели множеством случайных сигналов, у которых плотность вероятности считается заданной. Целью в данном случае является определение выходных результатов. Статистическое моделирование использует метод Монте-Карло в тех случаях, когда другие методы, кроме имитации применить невозможно. Основой методов Монте-Карло является теория вероятностей

и математическая статистика. Поэтому в данной статье мы будем приводить некоторые определения и факты из теории вероятностей и математической статистики, имеющие общий характер и некоторые другие факты, связанные с приложениями методов Монте-Карло.

***Ключевые слова:** статистическое моделирование, σ -алгебра событий, борелевская σ -алгебра, распределение случайной величины, интеграл Лебега, закон больших чисел.*

1 Введение

Имитационное моделирование – численный метод проведения на ЭВМ вычислительных экспериментов с математическими моделями, которые имитируют поведение реальных объектов, процессов и систем во временном отрезке в течение определенного периода. Сами объекты и процессы разбиваются на подсистемы, модули и элементарные явления, а их работа описывается некоторым набором алгоритмов, имитирующих элементарные явления с сохранением их логической структуры и последовательности. В тех случаях исследования сложных систем, которые подвергаются случайным возмущениям, мы используем вероятностные имитационные модели, в которых влияние случайных факторов учитываются с помощью задания вероятностных характеристик случайных процессов (законы распределения вероятностей, спектральные плотности или корреляционные функции). Полученные при этом результаты, т. е. при воспроизведении на имитационной модели рассматриваемого процесса, являются случайными реализациями. А для нахождения объективных и устойчивых характеристик процесса требуется его многократное воспроизведение, с последующей статистической обработкой полученных данных. Вследствие чего, исследования сложных процессов и систем, подверженных случайным возмущениям с помощью имитационного моделирования, называется статистическим моделированием [1].

Статистическая модель случайного процесса – это алгоритм, с помощью которого имитируют работу сложной системы, которая подвергается случайным возмущениям; имитируют взаимодействие элементов системы, носящих вероятностный характер.

2 Материалы и методы

Основная идея метода состоит в использовании выборки случайных чисел для получения искомых оценок. Вместо того чтобы описывать процесс с помощью аналитического аппарата (дифференциальных или алгебраических уравнений), производится «розыгрыш» случайного явления с помощью специально организованной процедуры, включающей в себя случайность и дающий случайный результат. В сущности методом Монте-Карло может быть решена любая вероятностная задача, но оправданным он становится только тогда, когда процедура «розыгрыша» проще, а не сложнее аналитических расчетов [2].

Статистическое моделирование определяется как способ изучения сложных процессов и систем, которые подвергаются случайным возмущениям, с помощью имитационных моделей. Методика статистического моделирования, который часто называют методом Монте-Карло, состоит из следующих этапов:

1. Моделирование на ЭВМ псевдо случайных последовательностей с заданной корреляцией и законом распределения вероятностей (метод Монте-Карло), имитирующих на ЭВМ случайные значения параметров при каждом испытании.

2. Использование полученных числовых последовательностей в имитационных математических моделях.

3. Статистическая обработка результатов моделирования.

4. Использование полученных числовых последовательностей в имитационных математических моделях [3].

3-4 Результаты и обсуждение

Определение вероятностного пространства. σ -алгебра событий.

В тех случайных экспериментах, в которых алгебра событий содержит бесконечное множество событий, приходится рассматривать и бесконечные последовательности событий, и операции над ними [4]. Простейшими среди этих операций являются объединение и пересечение бесконечной последовательности событий. Если алгебра событий такова, что вместе с каждой бесконечной последовательностью событий A_k она содержит и события $\bigcap_k A_k$, $\bigcup_k A_k$, то такая алгебра называется σ -алгеброй. Событие $\bigcap_k A_k$ состоит в том, что происходят все события A_k одновременно, а событие $\bigcup_k A_k$ – в том, что из последовательности событий A_k происходит по крайней мере одно.

Последовательность A_k называется монотонно убывающей, если $A_k \supset A_{k+1}$ и монотонно возрастающей, если $A_k \subset A_{k+1}$ для всех k . Событие $\bigcap_k A_k$ называется пределом убывающей последовательности, а событие $\bigcup_k A_k$ – пределом возрастающей последовательности событий. Предел монотонной последовательности A_k обозначим $\lim A_k$.

Алгебра событий U будет σ -алгеброй, если вместе со всякой монотонной последовательностью она содержит и ее предел [4].

При построении σ -алгебр множеств широко используется операция σ -замыкания алгебры множеств. σ -замыканием алгебры U_0 называется наименьшая σ -алгебра U , содержащая U_0 ; она обозначается $\sigma(U_0)$. Ее еще называют σ -алгеброй, порожденной алгеброй U_0 .

Класс множеств μ называется монотонным, если с каждой монотонной последовательностью множеств он содержит и ее предел.

Теорема 1. $\sigma(U_0)$ совпадает с наименьшим монотонным классом, содержащим U_0 .

Если вероятность определена на σ -алгебре, то предполагается, что она удовлетворяет еще одной аксиоме – расширенной аксиоме сложения:

Если A_k – последовательность попарно несовместимых событий, то

$$P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k).$$

Эта аксиома эквивалентна следующей аксиоме непрерывности.

Для всякой монотонной последовательности A_k

$$P(\lim A_k) = \lim P(A_k).$$

Вероятностным пространством (полем вероятностей) $\{\Omega, U, P\}$ называется совокупность трех объектов-пространства элементарных событий Ω , σ -алгебры U подмножеств пространства Ω (σ -алгебры событий), вероятностной меры $P(A)$, определенной для $A \in U$, для которой $P(\Omega) = 1$.

Мерой на σ -алгебре подмножеств U называется неотрицательная счетно-аддитивная функция $P(A)$ множества, то есть такая функция, для которой

$$P\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k P(A_k)$$

для всякой последовательности попарно не пересекающихся множеств A_k из U .

Если $P(\Omega) = 1$, то мера называется нормированной (или вероятностной). Измеримым пространством $\{\Omega, U\}$ называется пара объектов – некоторое множество Ω и некоторая σ -алгебра его подмножеств U . Таким образом, вероятностное пространство – это измеримое пространство с нормированной мерой на нем.

Если Ω содержит не более счетного числа элементов и U есть множество всех подмножеств Ω , то вероятность полностью определяется своими значениями на элементарных событиях. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, $P(\{\omega_k\}) = p_k$, $\{\omega_k\}$ – одноточечное множество, содержащее ω_k . Тогда

$$P(A) = \sum_k p_k \chi_A(\omega_k),$$

где $\chi_A(\omega) = 1$ при $\omega \in A$, $\chi_A(\omega) = 0$ при $\omega \notin A$. Функция $\chi_A(\omega)$ называется индикатором события A . Вероятностные пространства описанного вида называются дискретными.

Рассмотрим вероятностное пространство, для которого Ω , совпадает с m -мерным евклидовым пространством R^m . Такое пространство исходов естественно рассматривать в тех

экспериментах, в которых наблюдаются значения m вещественных величин. Будем обозначать координаты точки $x^m \in R^m$ через (x^1, x^2, \dots, x^m) . В качестве U возьмем σ -алгебру, содержащую множество точек вида

$$\{x^m: a_1 \leq x^1 < b_1, \dots, a_m \leq x^m < b_m\}, \quad (1)$$

где $-\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty$ – вещественные числа. Такие множества называются полуоткрытыми справа параллелепипедами. Конечные суммы полуоткрытых справа параллелепипедов образуют алгебру U_0 в R^m . Наименьшая σ -алгебра U , содержащая алгебру U_0 , совпадает с наименьшей σ -алгеброй множеств, содержащих все открытые и замкнутые множества R^m . Эта σ -алгебра называется борелевской σ -алгеброй, а множество U – борелевскими.

Всякое множество из U получается с помощью операции предельного перехода, переменного не более счетного числа раз к множествам из U_0 . Поэтому для задания вероятности на U (учитывая аксиому непрерывности) достаточно задать ее на U_0 . Поскольку множества из U_0 представимы в виде суммы попарно непересекающихся полуоткрытых параллелепипедов, то достаточно определить меру на множествах вида (1).

Функция распределения. Пусть

$$G(b_1, \dots, b_m) = P(\{x^n: -\infty < x^1 < b_1, \dots, -\infty < x^m < b_m\}). \quad (2)$$

Обозначим через

$$\Delta_{[a,b]}^{(k)} G(x^1, \dots, x^m) = G(x^1, \dots, x^{k-1}, b, x^{k+1}, \dots, x^m) - G(x^1, \dots, x^{k-1}, a, x^{k+1}, \dots, x^m)$$

приращение функции $G(x^1, \dots, x^m)$ по k -му аргументу на полуинтервале $[a, b)$. Тогда справедлива формула

$$P(\{x^n: a_1 \leq x^1 < b_1, \dots, a_m \leq x^m < b_m\}) = \Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \dots \Delta_{[a_m, b_m]}^{(m)} G(x^1, \dots, x^m) \quad (3)$$

Таким образом, всякая мера на измеримом пространстве $\{R^m, U\}$ однозначно определяется функцией $G(x^1, \dots, x^m)$ вида (2). Чтобы соответствующая мера была нормированной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$1) \lim_{x^1 \rightarrow \infty, \dots, x^m \rightarrow \infty} G(x^1, \dots, x^m) = 1.$$

Укажем еще некоторые условия, которым необходимо удовлетворяет G . Из аксиомы непрерывности следует, что

$$2) \lim_{x^k \rightarrow -\infty} G(x^1, \dots, x^m) = 0 \text{ для всяких } k = 1, \dots, m$$

$$3) \lim_{x^1 \uparrow b_1, \dots, x^m \uparrow b_m} G(x^1, \dots, x^m) = G(b_1, \dots, b_m), \text{ каковы бы ни были } b_1, \dots, b_m, \text{ т.е. функция}$$

$G(x^1, \dots, x^m)$ непрерывна (по совокупности аргументов) слева.

Из (3) следует

$$4) \Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \dots \Delta_{[a_m, b_m]}^{(m)} G(x^1, \dots, x^m) \geq 0.$$

Функция $G(x^1, \dots, x^m)$, удовлетворяющая условиям 1) – 4), называется m -мерной функцией распределения. Одномерной функцией распределения ($m=1$) называется неубывающая непрерывная слева функция $F(x)$, определенная на R и удовлетворяющая условиям

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Всякой m -мерной функции распределения отвечает единственная вероятностная мера на $\{R^m, U\}$.

Случайные величины. Определение случайной величины [4], [5].

Случайные величины – это величины, измеряемые в случайных экспериментах. Случайная величина полностью определена, если известен исход эксперимента ω . Таким образом, случайная величина ξ на вероятностном пространстве $\{\Omega, U, P\}$, описывающем данный случайный эксперимент, есть некоторая функция элементарного события $\xi = \xi(\omega)$. Тот факт, что мы можем измерять эту величину в нашем эксперименте, означает, что

возможно наблюдать событие: значение величины ξ принадлежит данному интервалу Δ , каков бы ни был этот интервал. Значит

$$\{\omega: \xi(\omega) \in \Delta\} \in U. \tag{4}$$

Функции $\xi(\omega)$, удовлетворяющие для всех интервалов Δ условию (4), называются измеримыми относительно σ -алгебры U или U -измеримыми. Для измеримой относительно U функции $\xi(\omega)$ соотношение (4) выполнено для всякого борелевского множества $\Delta \subset R$.

Случайной величиной на вероятностном пространстве $\{\Omega, U, P\}$ называется всякая U -измеримая функция $\xi(\omega)$, определенная на Ω .

Случайные величины часто обозначают ξ вместо $\xi(\omega)$, не указывая на зависимость от элементарного события.

Простейшим примером случайной величины является величина $\chi_A(\omega)$ – индикатор события $A \in U: \chi_A(\omega) = 1$, если $\omega \in A$; $\chi_A(\omega) = 0$, если $\omega \notin A$.

Другим примером случайной величины служит дискретная случайная величина, принимающая не более чем счетное число различных значений $\{x_1, x_2, \dots\}$. Очевидно, что события $\{\xi(\omega) = x_i\} = A_i$ попарно несовместимы и

$$\cup_i A_i = \Omega. \text{ Пусть } P(A_i) = P\{\xi(\omega) = x_i\} = P\{\xi = x_i\} = p_i.$$

Набор вероятностей $\{p_i\}$ и чисел $\{x_i\}$ называется распределением дискретной величины ξ . Оно определяет вероятность попадания величины ξ в любое множество Λ на прямой:

$$P\{\xi \in \Lambda\} = \sum_{x_i \in \Lambda} p_i.$$

Распределение случайной величины.

Распределением произвольной (случайной) величины ξ называется мера

$$P_\xi(\Lambda) = P(\{\omega: \xi(\omega) \in \Lambda\}), \tag{5}$$

заданная на σ -алгебре борелевских множеств из R . Из (4) следует, что для всех борелевских множеств $\{\omega: \xi(\omega) \in \Lambda\} \in U$, и поэтому правая часть (5) определена. Для задания распределения величины ξ достаточно задать функцию $F_\xi(x) = P_\xi((-\infty, x)) = P\{\xi < x\}$, которая называется функцией распределения случайной величины ξ и является одномерной функцией распределения.

Если ξ – дискретная величина, для которой $P\{\xi = x_i\} = p_i$, то

$$F_\xi(x) = \sum_{x_i < x} p_i = \sum_i p_i \varepsilon(x - x_i),$$

где $\varepsilon(x) = 1$, если $x > 0$; $\varepsilon(x) = 0$, если $x \leq 0$. Обозначим через $F_\xi(x + 0)$ предел справа $F_\xi(x)$ в точке x . Величина скачка функции распределения $F_\xi(x + 0) - F_\xi(x)$ совпадает с вероятностью $P\{\xi = x\}$; если $P\{\xi = x\} > 0$, то x называют атомом распределения случайной величины ξ . Говорят, что ξ имеет непрерывное распределение, если $F_\xi(x)$ – непрерывная функция. В этом случае любое фиксированное значение ξ может принимать лишь с вероятностью 0. Величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует такая функция $f_\xi(x)$, что

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt. \tag{6}$$

Функция $f_\xi(x)$ удовлетворяющая соотношению (6), называется плотностью распределения величины ξ . Если ξ имеет плотность распределения, то ее распределение выражается формулой

$$P_\xi(\Lambda) = \int_\Lambda f_\xi(t) dt \tag{7}$$

Интеграл (7) понимается как интеграл Лебега. В частности,

$$P_\xi((a, b)) = \int_a^b f_\xi(t) dt = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Плотность распределения удовлетворяет следующим двум условиям:

а) $f_\xi(t) \geq 0$ для почти всех t ;

б) $\int f_\xi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t) dt = 1$.

Любая измеримая по Лебегу функция $f_\xi(t)$, удовлетворяющая этим двум условиям, может выступать в качестве плотности некоторой случайной величины.

Группа случайных величин. Совместное распределение случайных величин [4], [6]. Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, U, P\}$ заданы m случайных величин $\xi_1(\omega), \dots, \xi_T(\omega)$. Тогда для всех $a_1 < b_1, \dots, a_m < b_m$

$$\{\omega: a_1 \leq \xi_1(\omega) < b_1, \dots, a_m \leq \xi_m(\omega) < b_m\} = \bigcap_{k=1}^m \{\omega: a_k \leq \xi_k(\omega) < b_k\} \in U \quad (8)$$

Обозначим через $(\xi_1(\omega), \dots, \xi_T(\omega))$ точку в R^m , а через Λ полуоткрытый параллелепипед: $\Lambda = \{\vec{x}: a_1 \leq x^1 < b_1, \dots, a_m \leq x^m < b_m\}$.

Соотношение (8) для произвольного борелевского множества Λ из R^m можно переписать так:

$$\{\omega: (\xi_1(\omega), \dots, \xi_T(\omega)) \in \Lambda\} \in U. \quad (9)$$

Мера $\mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}$, определенная на борелевских множествах соотношением

$$\mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}(B) = P(\{\omega: (\xi_1(\omega), \dots, \xi_m(\omega)) \in B\}), \quad (10)$$

называется совместным распределением случайных величин ξ_1, \dots, ξ_T или распределением случайного вектора $\vec{\xi} = (\xi_1(\omega), \dots, \xi_T(\omega))$ в R^m . Для определения меры $\mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}$ достаточно задать функцию

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = P(\{\omega: \xi_1(\omega) < x_1, \dots, \xi_m(\omega) < x_m\}) = P\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_m < x_m\}, \quad (11)$$

которая называется совместной функцией распределения величин ξ_1, \dots, ξ_T . Эта функция является m -мерной функцией распределения и, следовательно, удовлетворяет условиям 1) – 4). Зная совместную функцию распределения величин ξ_1, \dots, ξ_T , можно определить и совместную функцию распределения величин $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}$, где $0 < i_1 < \dots < i_k \leq m$:

$$F_{\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) \Big|_{\substack{x_j = +\infty \\ j \neq i_1, \dots, i_k}} \quad (12)$$

под $F(+\infty)$ понимается $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Соотношение (12) следует непосредственно из (11), если только $\{\xi_j < +\infty\}$ – достоверное событие. Совместные функции распределения подмножества случайных величин, получаемые из функции распределения всех величин, называются маргинальными (частными) функциями распределения (формула (12) определяет k -мерные маргинальные распределения). В частности, зная F_{ξ_1, \dots, ξ_T} , определяем и функции распределения величин ξ_k :

$$F_{\xi_k}(x) = F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(+\infty, \dots, \overset{k-1}{+}, +\infty, x, +\infty, \dots, \overset{m-k}{+}, +\infty).$$

Дискретные и непрерывные распределения.

Если каждая из величин ξ_k имеет дискретное распределение, то говорят, что случайный вектор (ξ_1, \dots, ξ_T) также имеет дискретное распределение (или что совместное распределение величин ξ_1, \dots, ξ_T дискретно). Пусть ξ_k принимает значения $\{y_1^k, y_2^k, \dots\}$. Тогда совместное распределение величин ξ_1, \dots, ξ_m определяется вероятностями

$$p_{i_1, \dots, i_m} = P\{\xi_1 = y_{i_1}^1, \xi_2 = y_{i_2}^2, \dots, \xi_m = y_{i_m}^m\}.$$

Мера, задающая совместное распределение ξ_1, \dots, ξ_m , задается в этом случае равенством

$$\mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}(B) = \sum p_{i_1, \dots, i_m} \chi_B(y_{i_1}^1, \dots, y_{i_m}^m),$$

где $\chi_B(y^1, \dots, y^T) = 1$, если $(y^1, \dots, y^T) \in B$; $\chi_B(y^1, \dots, y^T) = 0$, если $(y^1, \dots, y^T) \notin B$; (y^1, \dots, y^T) – точка в R^m . Совместная функция распределения задается формулой

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{y_{i_1}^1 < x_1, \dots, y_{i_m}^m < x_m} p_{i_1, \dots, i_m}.$$

Величины ξ_1, \dots, ξ_T имеют совместное абсолютно непрерывное распределение если существует такая измеримая по Лебегу функция $f_{\xi_1, \dots, \xi_T}(x_1, \dots, x_T)$, что совместное распределение величин ξ_1, \dots, ξ_m определяется формулой

$$\mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}(B) = \int_B \dots \int_B f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m$$

(справа записан m -кратный интеграл Лебега). Тогда функция $f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m)$ называется совместной плотностью распределения величин ξ_1, \dots, ξ_m . Совместная функция распределения выражается через совместную плотность по формуле

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_m} f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(y_1, \dots, y_m) dy_1 \dots dy_m.$$

Отсюда следует формула для плотности:

$$f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial^m}{\partial x_1 \dots \partial x_m} F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m).$$

Отметим, что существование производной, стоящей в правой части последнего равенства, для почти всех x_1, \dots, x_m еще не обеспечивает существования плотности. Чтобы последняя существовала, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial x_1 \dots \partial x_m} F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = 1.$$

Свойства совместной плотности:

а) $f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) \geq 0$ для почти всех x_1, \dots, x_m ;

б) $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = 1$.

Всякая измеримая по Лебегу функция $g(x_1, \dots, x_m)$, удовлетворяющая этим двум условиям, может выступать в качестве совместной плотности некоторых m случайных величин и называется m -мерной плотностью.

Проинтегрировав плотность по аргументам $x_j, j \neq i_1, \dots, i_k$, от $-\infty$ до $+\infty$, получим совместную плотность распределения величин $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}$. В частности,

$$f_{\xi_k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_m.$$

Пример. Случайный вектор (ξ_1, \dots, ξ_m) равномерно распределен в ограниченном измеримом множестве $G \in R^m$, если совместная плотность величин ξ_1, \dots, ξ_m имеет вид

$$f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} \frac{1}{mesG}, & (x_1, \dots, x_m) \in G; \\ 0, & (x_1, \dots, x_m) \notin G, \end{cases}$$

где $mesG$ - лебегова мера G в R^m .

Математическое ожидание дискретной величины.

Пусть в случайном эксперименте наблюдается некоторая случайная величина ξ , которая может принимать конечное число значений a_1, \dots, a_N с вероятностями p_1, \dots, p_N . Если x_1, \dots, x_n – наблюдения нашей величины в n последовательных осуществлениях эксперимента, то среднее значение реализаций можно представить в виде

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \sum_{k=1}^N a_k v_n(A_k),$$

где A_k – события $\{\xi = a_k\}$, v_n - частота события. Заменяя частоты на вероятности, получим выражение

$$M\xi = \sum_{k=1}^N a_k p_k,$$

которое называется средним или математическим ожиданием случайной величины ξ .

Если ξ – произвольная дискретная случайная величина, принимающая значения $a_k (k = 1, 2, \dots)$ с вероятностями p_k , то $M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k$, если только ряд справа сходится абсолютно. Некоторые свойства математического ожидания дискретной величины.

1) $M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$; (если только суц. мат. ожидание справа и слева);

2) $M(\lambda\xi) = \lambda M(\xi)$ для всех постоянных λ ;

3) если $P(\xi_1 = \xi_2) = 1$, то $M\xi_1 = M\xi_2$;

4) если $\xi \geq 0$, то $M\xi \geq 0$;

5) если $P\{\xi = c\} = 1$, то $M\xi = c$.

Математическое ожидание произвольной случайной величины. Для определения математического ожидания произвольной случайной величины ξ введем последовательность

дискретных случайных величин ξ_n , определяемых равенством $\xi_n = k/n$, если $k/n \leq \xi < (k + 1)/n$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $n = 1, 2, \dots$. Очевидно, что $|\xi_n - \xi| \leq 1/n$. Если $M\xi_n$ существует при некотором n , то оно существует для всех n и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{n} P \left\{ \frac{k}{n} \leq \xi < \frac{k+1}{n} \right\}.$$

Этот предел называется математическим ожиданием величины ξ и обозначается $M\xi$. Таким образом определенное математическое ожидание также удовлетворяет свойствам 1-5. Если ξ – неотрицательная случайная величина, то считаем $M\xi$ всегда определенным и равным $+\infty$ в том случае, когда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} P \left\{ \frac{k}{n} \leq \xi < \frac{k+1}{n} \right\}$ расходится.

Если $F_\xi(x)$ – функция распределения величины ξ , то

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x) \text{ при } \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_\xi(x) < \infty$$

интегралы справа являются интегралами Стильеса и вычисляются как пределы интегральных сумм. Если существует плотность $f_\xi(x)$ величины ξ , то

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx \text{ при } \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx < \infty.$$

Если величина $\xi = \xi(\omega)$ задана на вероятностном пространстве $\{\Omega, U, P\}$, то ее математическое ожидание может быть вычислено с помощью интеграла Лебега по мере P :

$$M\xi(\omega) = \int \xi(\omega) P(d\omega),$$

при условии, что интеграл справа существует.

Пусть ξ_1, \dots, ξ_m – случайные величины, $F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m)$ – их совместная функция распределения, $g(x_1, \dots, x_m)$ – некоторая борелевская функция. Тогда

$$Mg(\xi_1, \dots, \xi_m) = \int \dots \int g(x_1, \dots, x_m) dF_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m),$$

если только интеграл справа абсолютно сходится (он понимается как m -кратный интеграл Лебега-Стилтьеса); если g – непрерывная функция, то его можно вычислить как интеграл Римана-Стилтьеса. В том случае, когда существует совместная плотность величин ξ_1, \dots, ξ_m , предыдущая формула принимает вид

$$Mg(\xi_1, \dots, \xi_m) = \int \dots \int g(x_1, \dots, x_m) f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m,$$

если только m -кратный интеграл Лебега в правой части абсолютно сходится.

Моменты случайных величин.

Величина $M\xi^k = \int x^k dF_\xi(x)$, $k = 1, 2, \dots$, называется k -м моментом величины ξ (если указанное математическое ожидание существует); k -й момент величины $(\xi - M\xi)$ называется k -м центральным моментом. Он вычисляется по формуле

$$M(\xi - M\xi)^k = \int (x - M\xi)^k dF_\xi(x).$$

k -й момент случайной величины $|\xi|$ называется абсолютным k -м моментом величины ξ .

Особую роль играет второй центральный момент, который называется дисперсией величины и обозначается $D\xi$:

$$\begin{aligned} D\xi &= M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int (x - M\xi)^2 dF_\xi(x) = \\ &= \int x^2 dF_\xi(x) - \left(\int x dF_\xi(x) \right)^2. \end{aligned}$$

Для абсолютно непрерывных величин дисперсия вычисляется по формуле

$$D\xi = \int (x - M\xi)^2 f_\xi(x) dx = \int x^2 f_\xi(x) dx - \left(\int x f_\xi(x) dx \right)^2.$$

Для дискретной величины ξ , принимающей значения a_k с вероятностями p_k ,

$$D\xi = \sum_k a_k^2 p_k - \left(\sum_k a_k p_k \right)^2 = \sum_k (a_k - \sum_k a_k p_k)^2 p_k.$$

Заметим, что $D\xi$ всегда определена, если определено $M\xi$, но может принимать значения $+\infty$.

Величина $\sigma = \sqrt{D\xi}$ называется среднеквадратическим отклонением величины ξ . Отметим одно важное свойство величины $D\xi$: если $D\xi = 0$, то $P\{\xi = M\xi\} = 1$, т.е. в этом случае величина ξ с вероятностью 1 постоянна.

Пусть ξ_1, \dots, ξ_T – случайные величины с совместной функцией распределения $F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m)$. Величины

$$m_{\xi_1, \dots, \xi_m}(k_1, \dots, k_m) = \int \dots \int x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} dF_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = M\xi_1^{k_1} \dots \xi_m^{k_m},$$

где $k_1, \dots, k_T \geq 0$, $k_1 + \dots + k_T = k$, называются смешанными моментами величин ξ_1, \dots, ξ_T порядка k .

Условное распределение случайной величины. Рассмотрим некоторую величину ξ . Выражение

$$F_\xi(x|A) = \frac{P(\{\xi < x\} \cap A)}{P(A)}$$

называется условной функцией распределения величины ξ относительно события A . Она определена, если $P(A) > 0$. Если $F_\xi(x|A)$ абсолютно непрерывна и

$$F_\xi(x|A) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t|A) dt,$$

то $f_\xi(x|A)$ называется условной плотностью распределения величины ξ относительно события A . Как условная функция распределения, так и условная плотность распределения обладают свойствами функции распределения и плотности распределения соответственно. Моменты, вычисленные по условной функции распределения, называются условными моментами величины. В частности, выражение

$$M(\xi|A) = \int x dF_\xi(x|A),$$

если интеграл справа сходится абсолютно, называется условным математическим ожиданием величины ξ относительно события A . Если ξ задана на вероятностном пространстве $\{\Omega, U, P\}$, то для условного математического ожидания можно привести другое выражение:

$$M(\xi|A) = \frac{1}{P(A)} \int_A \xi(\omega) P(d\omega).$$

Пусть E_1, \dots, E_n – полная группа событий, т.е. $\sum P(E_i) = 1$ и $P(E_i) > 0$ ($i = 1, \dots, n$). Справедлива следующая формула полного математического ожидания:

$$M\xi = \sum_{k=1}^n M(\xi|E_k) P(E_k).$$

Можно привести и некоторое обобщение этой формулы. Если C имеет вид $C = \cup E_{i_k}$, то

$$\int_C \xi(\omega) P(d\omega) = \sum_{E_k \subset C} M(\xi|E_k) P(E_k). \tag{13}$$

Предположим, что событие A заключается в том, что $\{a \leq \xi < b\}$.

Тогда условная функция распределения

$$F_\xi(x|a \leq \xi < b) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{F_\xi(x) - F_\xi(a)}{F_\xi(b) - F_\xi(a)}, & a \leq x < b, \\ 1, & x > b, \end{cases}$$

есть распределение урезанной величины ξ или урезанное распределение. Запишем математическое ожидание и дисперсию для урезанного распределения:

$$M(\xi|a \leq \xi < b) = \frac{1}{F_\xi(b) - F_\xi(a)} \int_a^b x dF_\xi(x),$$

$$D(\xi|\{a \leq \xi < b\}) = \frac{1}{F_\xi(b) - F_\xi(a)} \int_a^b x^2 dF_\xi(x) - \left(\frac{1}{F_\xi(b) - F_\xi(a)} \int_a^b x dF_\xi(x) \right)^2.$$

Закон больших чисел.

Обозначим через v_n число появлений события A в серии из n независимых испытаний. Пусть p – вероятность появления события A в одном испытании. Тогда при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M \xi_k \rightarrow 0 \tag{14}$$

Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ , если для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P\{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\} = 0$$

Таким образом, предыдущее утверждение означает, что частота $\frac{v_n}{n}$ появления события A в серии из n испытаний сходится по вероятности к вероятности p появления события A в одном испытании. Вообще, законом больших чисел называют теоремы, дающие условия, при которых

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M \xi_k \rightarrow 0$$

по вероятности. В приведенной схеме Бернулли $v_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, где ξ_i – случайная величина, равная 1, если в i -м испытании событие A произошло, и равная 0 в противном случае. Тогда

$$\frac{v_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k, p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M \xi_k.$$

Мы ниже приведем более общую задачу [4], [7]. Пусть заданы последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ и числовая последовательность $\{\beta_n, n = 1, 2, \dots\}$ такая, что $\beta_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. При каких условиях существует такая числовая последовательность $\{\alpha_n, n = 1, 2, \dots\}$, что при $n \rightarrow \infty$ $\frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \alpha_n \rightarrow 0$ по вероятности? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ – последовательность независимых случайных величин $F_n(x) = P\{\xi_n < x\}$. Обозначим через τ_n медиану случайной величины ξ_n , то есть любое из чисел, удовлетворяющих неравенствам $P\{\xi_n \geq \tau_n\} \geq 1/2$ и $P\{\xi_n \leq \tau_n\} \geq 1/2$. Для того чтобы существовала последовательность постоянных $\{\alpha_n, n \geq 1\}$ такая, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \alpha_n \rightarrow 0$$

по вероятности, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - m_k)^2}{\beta_k^2 + (x - m_k)^2} dF_k(x) \rightarrow 0. \tag{15}$$

Если это условие выполнено, то

$$\alpha_n = \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \left(m_k + \int_{|x - m_k| < \tau \beta_n} (x - m_k) dF_k(x) \right) + o(1),$$

где τ – произвольная положительная постоянная.

Простое условие применимости закона больших чисел содержится в следующих теоремах.

Теорема 3. Если последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ такова, что $D \xi_n$ существует и $\frac{D \xi_n}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M \xi_k \rightarrow 0$$

по вероятности.

Если величины ξ_n ($n = 1, 2, \dots$) имеет одну и ту же функцию распределения $F(x) = P\{\xi_n < x\}$, то они называются одинаково распределенными.

Теорема 4. Если $\{\xi_n, n \geq 1\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин и если существует математическое ожидание $M \xi_n = a$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow a$$

по вероятности.

Неравенство Чебышева.

Пусть ξ – произвольная случайная величина и $g(x)$ – неотрицательная четная и неубывающая на $[0; \infty)$ функция. Тогда для всех $a \geq 0$

$$\frac{Mg(\xi) - g(a)}{n \cdot \sup g(\xi)} \leq P\{|\xi| \geq a\} \leq \frac{Mg(\xi)}{g(a)}. \tag{16}$$

Величина, стоящая в знаменателе левой части неравенства, называется почти наверное верхней гранью случайной величины $g(\xi)$ и определяется так:

$$n. n. \sup g(\xi) = \inf\{C: C \geq 0 \quad \text{и} \quad P\{g(\xi) > C\} = 0\}.$$

Полагая в неравенстве (16) $g(x) = |x|^r$ ($r > 0$), получаем

$$\frac{M|\xi|^r - a^r}{n \cdot \sup |\xi|^r} \leq P\{|\xi| \geq a\} \leq \frac{M|\xi|^r}{a^r}. \tag{17}$$

Применив это неравенство к величине $\xi - M\xi$, получим

$$\frac{M|\xi - M\xi|^r - a^r}{n \cdot \sup |\xi - M\xi|^r} \leq P\{|\xi - M\xi| \geq a\} \leq \frac{M|\xi - M\xi|^r}{a^r}. \tag{18}$$

При $r = 2$ отсюда следует неравенство Чебышева:

$$P\{|\xi - M\xi| \geq a\} \leq \frac{D\xi}{a^2}. \tag{19}$$

Центральная предельная теорема.

Термин центральная предельная теорема в теории вероятностей означает любое утверждение о том, что при выполнении определенных условий функция распределения суммы индивидуально малых случайных величин с ростом числа слагаемых сходится к нормальной функции распределения. Исключительная важность центральной предельной теоремы объясняется тем, что она дает теоретическое объяснение следующему, многократно подтвержденному практикой наблюдению: если исход случайного эксперимента определяется большим числом случайных факторов, влияние каждого из которых пренебрежимо мало, то такой эксперимент хорошо аппроксимируется нормальным распределением с соответствующим образом подобранными математическим ожиданием и дисперсией [4], [8].

Центральная предельная теорема для последовательностей независимых случайных величин. Центральная предельная теорема при наличии конечных дисперсий.

Пусть $\{\xi_k, k \geq 1\}$ – последовательность взаимно независимых случайных величин с функциями распределения $G_k(x) = P\{\xi_k < x\}$, имеющих конечные математические ожидания $M\xi_k = a_k$ и дисперсии $D\xi_k = \sigma_k^2$, причем

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 > 0 \text{ для } n \geq 1.$$

Нормированной суммой случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называется случайная величина

$$\eta_n = B_n^{-1} \sum_{k=1}^n (\xi_k - a_k),$$

которая характеризуется тем, что $M\eta_n = 0, D\eta_n = 1$ для любого $n \geq 1$.

Пусть $F_n(x)$ функция распределения нормированной суммы η_n и $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz$ – нормальная (0,1) функция распределения. При наличии конечных дисперсий центральная предельная теорема устанавливает условия, при которых имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x) \tag{20}$$

равномерно относительно $x \in (-\infty, \infty)$.

Одна из наиболее простых и, в то же время, наиболее часто применяемых форм центральной предельной теоремы связана с последовательностью одинаково распределенных случайных величин.

Теорема Леви-Линдберга.

Если $\{\xi_k, k \geq 1\}$ – последовательность взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин, то для функции распределения $F_n(x)$ нормированной суммы $\eta_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\sum \xi_k - na)$ имеет место соотношение (20), $a = M\xi_k, \sigma^2 = D\xi_k$.

5 Выводы

Нами были изложены основные сведения и факты из теории вероятностей и математической статистики, необходимые для введения в курс теории оценивания параметров и описания общих схем методов Монте-Карло. При использовании методов Монте-Карло моделируются случайные величины с известными законами распределения, и из этих величин по известным правилам конструируются более сложные, распределение которых уже не может быть найдено аналитически. Эти результирующие распределения могут быть известны с точностью до параметров – в этом случае используется аппарат математической статистики для оценивания этих параметров. В случае, когда вид результирующего распределения неизвестен, используются непараметрические методы [9].

Список литературы

- 1 Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – М.: Наука. 2015. – 492 с.
- 2 Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. – М.: Наука. 1982. – 247 с.
- 3 Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир. 1975.
- 4 Гмурман В.Е. Теория вероятности и математическая статистика. – М.: Высшая школа, изд. Четвертое доп. 2011. – 217 с.
- 5 Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука. 1973.
- 6 Бусленко Н.П., Голенко Д.И., Соболев И.М., Срагович В.Г., Шрейдер Ю.А. Метод стохастических испытаний (метод Монте-Карло). – М.: ГИФЛ, 1962. – 226 с.
- 7 Раменская А.В. Метод Монте-Карло и инструментальные средства его реализации: методические указания / А.В. Раменская, К.В. Пивоварова. Оренбургский гос. Университет – Оренбург: ОГУ, 2018. – 58 с.
- 8 Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод стохастических испытаний Монте-Карло и его реализация в цифровых машинах. – Физматгиз, изд. Третье доп. 2012. – 301 с.
- 9 Михайлов Г.А. Оптимизация взвешенных методов Монте-Карло. – М. Наука, 1987. – 239 с.

ТАСТАНОВ, М.Г., НУРГЕЛЬДИНА, А.Е.

МОНТЕ-КАРЛО ӘДІСТЕРІНІҢ ЖАЛПЫ СХЕМАСЫ

Статистикалық модельдеу әдісі ықтималдық тығыздығы берілген деп саналатын көптеген кездейсоқ сигналдар арқылы модельді сынауға негізделген. Бұл жағдайдағы мақсат – шығу нәтижелерін анықтау. Статистикалық модельдеу Монте-Карло әдісін имитациядан басқа әдістерді қолдану мүмкін болмаған жағдайларда қолданады. Монте-Карло әдістерінің негізі ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика болып табылады. Сондықтан, осы мақалада біз ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистикадан жалпы сипаттағы кейбір анықтамалар мен фактілерді және Монте-Карло әдістерін қолдануға қатысты басқа да фактілерді келтіреміз.

Түйінді сөздер: *статистикалық модельдеу, σ -оқигалар алгебрасы, борел σ -алгебрасы, кездейсоқ шаманың таралуы, Лебег интегралы, Үлкен сандар заңы.*

TASTANOV, M.G., NURGELDINA, A.Y.

MONTE CARLO METHODS DESIGN SCHEME

The statistical modeling method is based on testing a model with a large number of random signals whose probability density function is assumed to be given. The objective in this case is to determine the output results. Statistical modeling employs the Monte Carlo method in situations where other methods, apart from simulation, cannot be applied. The foundation of Monte Carlo methods lies in probability theory and mathematical statistics. Therefore, in this article, we will present certain definitions and general facts from

probability theory and mathematical statistics, along with other relevant facts related to the applications of Monte Carlo methods.

Key words: statistical modeling, σ -algebra of events, Borel σ -algebra, random variable distribution, Lebesgue integral, law of large numbers.

Сведения об авторах:

Тастанов Мейрамбек Габдуалиевич – кандидат физико-математических наук, доцент, и.о. профессора кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.

Нургельдина Асель Ермековна – магистр естественных наук, старший преподаватель кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.

Тастанов Мейрамбек Габдуалиұлы – физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, математика және физика кафедрасы профессорының м.а., Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.

Нургельдина Асель Ермековна – жаратылыстану ғылымдарының магистрі, математика және физика кафедрасының аға оқытушысы, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.

Tastanov Meirambek Gabdualiyevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, acting Professor of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.

Nurgeldina Assel Yermekovna – Master of Natural Sciences, Senior Lecturer of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.

МАЗМҰНЫ

ГУМАНИТАРЛЫҚ ЖӘНЕ ӨНЕР ҒЫЛЫМДАРЫ

Безаубекова А.Д., Мәлікзада А.М., Айтқазы Ә.А. М. Мақатаев «Аққулар ұйықтағанда»
 поэмасы 3

Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Бейбітова Н.Б. Сайын Мұратбеков «Жусан иісі»
 повесіндегі – Аян бейнесі 10

Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Дуйсенбаева К.Е. Бердібек Соқпақбаевтың
«Балалық шаққа саяхат» повесіндегі «балалық шақ» концептісі 18

Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Есенгельды Ә.Қ. Бердібек Соқпақбаевтың
«Ана жүрегі» шығармасындағы бала тағдыры 23

Исова Э.А., Азимхан Д.А. Дулат Исабековтың «Ескерткіш» әңгімесінің көркемдік
ерекшеліктері..... 28

Исова Э.А., Атығай Ш.С. Қошке Кеменгерұлының педагогикалық мұрасы: тіл
тазалығы және білім беру әдістемесі 33

Исова Э.А., Шахметова М.А. І. Жансүгіровтің «Қолбала» поэмасының көркемдік
ерекшеліктері..... 39

ЖАРАТЫЛЫСТАНУ ҒЫЛЫМДАРЫ

Брагина Т.М., Приезжих Ю.В. Қостанай облысындағы қарағайдың сабақты зиянкестері
– ұзын мүйізді қоңыздарға шолу (coleoptera, cerambicadae)..... 44

Майер Ф.Ф. Яновский класының негізінде құрылған жұлдыз тәрізді функциялардың
кейбір кластары туралы..... 50

Майер Ф.Ф., Хабдуллина Г.Ж. Якубовскийдің жұлдыз тәрізді функциялар класындағы
Бернацкийдің интегралды операторы 56

Тастанов М.Г., Жарлыгасова Э.З. Кездейсоқ процесстер..... 64

Тастанов М.Ф., Нургельдина А.Е. Монте-Карло әдістерінің жалпы схемасы..... 74

ИНЖИНИРИНГ ЖӘНЕ ТЕХНОЛОГИЯ

Амантаев М.А., Абитов Т.А., Азбергенев Е.Т., Красильников Я.С. Дөңгелек қозғалысын
кинематикалық модельдеу 87

Балтабекова И.Ж., Жунусова Г.С., Саидов А.М., Калитка Д.А. Матча шай қосылған
ашытқы нан өндірісінің болашағы 92

Кравченко Р.И., Золотухин Е.А., Амантаев М.А., Караев А.К. Жеңіл автомобиль
қозғалтқышын теңестіру әдісін әзірлеу..... 98

Нам Д. Генеративті адверсарлық желілерді (gan) өкпе обырының КТ суреттерін
генерациялау үшін қолдану 105

Семибаламут А.В., Золотухин Е.А., Медиткали И.Е., Кушибаева Д.Р. Өртүрлі
серпімділік қасиеттері бар серпімді элементтер негізінде суспензияның серпімділік
сипаттамаларын бағалау..... 113

АУЫЛ ШАРУАШЫЛЫҒЫ ЖӘНЕ ВЕТЕРИНАРИЯ ҒЫЛЫМДАРЫ

Бейшов Р.С., Алитанова М.К. Жаздық бидай мен арпаның ауруларға төзімділігіне
өртүрлі қорғаныш және ынталандыру қосылыстардың әсері..... 121

Бейшов Р.С., Барсакбаева М.Б. Қостанай қаласының жанармай құю станцияларында
мұнай өнімдерімен ластанған топырақ микрофлорасының биоремедиациялық қалпына
келтіру әлеуетін практикалық тұрғыда зерттеу 127

Бейшов Р.С., Смаилова А.И. Топырақтың ауыр металдармен ластануы және олардың
өсімдіктерге әсерін зерттеу..... 136

Саидов А.М. Цифрландыру жағдайында АӨК мамандарының кәсіби құзыреттілігін
дамыту: цифрлық платформа тұжырымдамасы..... 143

ӘЛЕУМЕТТІК ҒЫЛЫМДАР

<i>Абылай П.С.</i> «Математикалық логика» пәнін болашақ педагогтерге оқытудың маңыздылығы және мазмұндық ерекшеліктері	151
<i>Саидов А.М., Раисова Ж.Х.</i> Білім беру процесін трансформациялаудағы инновациялық технологиялар мен цифрландырудың рөлі.....	155
<i>Шалгимбекова К.С., Айтмағамбетов Е.Ж.</i> Колледж оқушыларының кәсіби өзін-өзі айқындауының мәні мен ерекшеліктері	162
<i>Шалгимбекова К.С., Шупотаев С.М.</i> Мектеп оқушыларының қазіргі білім беру жағдайындағы ерік қасиеттері және оның сипаттары.....	168
АВТОРЛАРДЫҢ НАЗАРЫНА	174

СОДЕРЖАНИЕ

ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ И ИСКУССТВО

Безаубекова А.Д., Маликзада А.М., Айтказы А.А. Поэма М. Макатаева «Когда спят лебеди»..... 3

Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Бейбітова Н.Б. Образ Аяна в повести Сайына Муратбекова «Запах полыни» 10

Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Дуйсенбаева К.Е. Концепция «детство» в повести Бердибека Сокпакбаева «Путешествие в детство» 18

Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Есенгельды Э.Қ. Судьба ребенка в произведении Бердибека Сокпакбаева «Материнское сердце» 23

Исова Э.А., Азимхан Д.А. Художественные особенности рассказа Дулата Исабекова «Ескерткіш»..... 28

Исова Э.А., Атыгай Ш.С. Педагогическое наследие Кошке Кеменгерулы: чистота языка и методика образования..... 33

Исова Э.А., Шахметова М.А. Художественные особенности поэмы И. Жансугурова «Қолбала» 39

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Брагина Т.М., Приезжих Ю.В. Обзор жуков усачей (coleoptera, cerambicadae) – стволовых вредителей сосны в Костанайской области..... 44

Майер Ф.Ф. О некоторых классах почти звездообразных функций, построенных на базе класса Яновского..... 50

Майер Ф.Ф., Хабдуллина Г.Ж. Интегральный оператор Бернацкого на классе звездообразных функций Якубовского..... 56

Тастанов М.Г., Жарлыгасова Э.З. Случайные процессы 64

Тастанов М.Г., Нургельдина А.Е. Общая схема методов Монте-Карло..... 74

ИНЖИНИРИНГ И ТЕХНОЛОГИИ

Амантаев М.А., Абитов Т.А., Азбергенев Е.Т., Красильников Я.С. Кинематическое моделирование движения колеса 87

Балтабекова И.Ж., Жунусова Г.С., Саидов А.М., Калитка Д.А. Перспективы производства хлеба на закваске с добавлением матча чая 92

Кравченко Р.И., Золотухин Е.А., Амантаев М.А., Караев А.К. Разработка способа балансировки движителя легкового автомобиля..... 98

Нам Д. Применение моделей ганов для генерации КТ снимков рака легкого 105

Семибаламут А.В., Золотухин Е.А., Медиткали И.Е., Кушибаева Д.Р. Оценка упругой характеристики подвески на основе эластичных элементов с различными упругими свойствами..... 113

СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ, ВЕТЕРИНАРНЫЕ НАУКИ

Бейшов Р.С., Алитанова М.К. Влияние защитно-стимулирующих составов на устойчивость к болезням яровой пшеницы и ячменя 121

Бейшов Р.С., Барсакбаева М.Б. Практическое исследование биоремедиационного восстановительного потенциала почвенной микрофлоры, загрязненной нефтепродуктами, на автозаправочных станциях г. Костанай..... 127

Бейшов Р.С., Смаилова А.И. Исследование загрязнение почвы тяжелыми металлами и их воздействие на растения..... 136

Саидов А.М. Развитие профессиональных компетенций специалистов АПК в условиях цифровизации: концепция цифровой платформы 143

СОЦИАЛЬНЫЕ НАУКИ

<i>Абылай П.С.</i> Важность и содержательные особенности преподавания предмета «математическая логика» будущим педагогам.....	151
<i>Саидов А.М., Раисова Ж.Х.</i> Роль инновационных технологий и цифровизации в трансформации образовательного процесса	155
<i>Шалгимбекова К.С., Айтмагамбетов Е.Ж.</i> Сущность и особенности профессионального самоопределения учащихся колледжа	162
<i>Шалгимбекова К.С., Шупотаев С.М.</i> Волевые качества школьников и их особенности в современных образовательных условиях	168
ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ	177

CONTENT

HUMANITIES AND ARTS

Bezaubekova A.D., Malikzada A.M., Aitkazy A.A. M. Makatayev’s poem «When swans sleep» 3
Bekbossynova A.Kh., Bekmagambetova M.Zh., Beibitova N.B. The character of Ayan in Saiyn Muratbekov’s story «The Scent of the Wormwood» 10
Bekbossynova A.Kh., Bekmagambetova M.Zh., Duissenbayeva K.Y. The concept of childhood in Berdibek Sokpakbayev's novel «Journey to Childhood» 18
Bekbossynova A.Kh., Bekmagambetova M.Zh., Yessengeldy E.K. The fate of a child in Berdibek Sokpakbayev's novel «A Mother's Heart» 23
Isova E.A., Azimkhan D.A. Artistic features of Dulat Issabekov’s story «Yeskertkish» 28
Isova E.A., Atygay Sh.S. Koshke Kemengeruly’s pedagogical heritage: language purity and teaching methodology 33
Isova E.A., Shakhmetova M.A. Artistic features of I. Zhansugurov's poem «Kolbala» 39

NATURAL SCIENCES

Bragina T. M., Priezzhikh, Yu.V. Review of longicorn beetles (coleoptera, cerambicadae) – stem pests of pine in Kostanay region 44
Mayer F.F. On some classes of close-to-starlike functions based on the Yanovskiy class 50
Mayer F.F., Khabdullina G.Zh. Bernatskiy integral operator on the class of Yakubovskiy starlike functions 56
Tastanov M.G., Zharlygassova E.Z. Random processes 64
Tastanov M.G., Nurgeldina A.Y. Monte Carlo methods design scheme 74

ENGINEERING AND TECHNOLOGY

Amantayev M.A., Abitov T.A., Azbergenov Y.T., Krasilnikov Ya.S. Kinematic modelling of wheel movement 87
Baltabekova I.Zh., Zhunussova G.S., Saidov A.M., Kalitka D.A. Prospects of matcha sourdough bread production 92
Kravchenko R.I., Zolotukhin Y.A., Amantayev M.A., Karayev A.K. Development of a method for balancing a passenger car propeller unit 98
Nam D. Application of generative adversarial neural networks for lung cancer CT image segmentation 105
Semibalamut A.V., Zolotukhin Y.A., Meditkali I.Y., Kushibayeva D.R. Evaluation of the elastic characteristics of a suspension based on elastic elements with different elastic properties 113

AGRICULTURAL, VETERINARY SCIENCES

Beishov R.S., Alitanova M.K. The effect of protective and stimulating compounds on disease resistance of spring wheat and barley 121
Beishov R.S., Barsakbayeva M.B. Empirical research of bioremediation recovery potential of soil microflora contaminated with oil products at gas stations in Kostanay 127
Beishov R.S., Smailova A.I. Research of soil pollution by heavy metals and their effects on plants 136
Saidov A.M. Development of professional competences of agro-industrial specialists in the context of digitalization: the concept of a digital platform 143

SOCIAL SCIENCES

Abylay P.S. The importance and key content-specific features of teaching the subject "mathematical logic" to future educators 151
Saidov A.M., Raissova Zh.Kh. The role of innovative technologies and digitalization in the educational process transformation 155

Shalgimbekova K.S., Aitmagambetov Y.Z. The essence and features of professional self-determination of college students 162

Shalgimbekova K.S., Shalgimbekova K.S. Volitional qualities of schoolchildren and their characteristics in modern educational conditions 168

INFORMATION FOR AUTHORS 180

Редактор, корректор: *А. Симонова*
Корректорлар: *Б. Сыздыкова, Т. Цай*
Компьютерлік беттеу: *С. Красикова*

Редактор, корректор: *А. Симонова*
Корректоры: *Б. Сыздыкова, Т. Цай*
Компьютерная верстка: *С. Красикова*

Басуға 15.01.2025 ж. берілді.
Пішімі 60x84/8. Көлемі 14,1 б.т.
Тапсырыс № 003

Подписано в печать 15.01.2025 г.
Формат 60x84/8. Объем 14,1 п.л.
Заказ № 003

Ахмете Байтұрсынұлы атындағы
Қостанай өңірлік университетіндегі
редакциялық-баспа бөлімінде басылған
Қостанай қ., Байтұрсынов к., 47

Отпечатано в редакционно-издательском отделе
Костанайского регионального университета
имени Ахмет Байтұрсынұлы
г. Костанай, ул. Байтұрсынова, 47