



BAITURSYNULY
UNIVERSITY

«АХМЕТ БАЙТҰРСЫНҰЛЫ
АТЫНДАҒЫ ҚОСТАНАЙ Өңірлік
УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ



ҚМПИ ЖАРШЫСЫ

КӨПСАЛАЛЫ
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ
МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

№ 1
2025

ISSN 2310-3353



2025 ж., қаңтар, №1 (77)
Журнал 2005 ж. қаңтардан бастап шығады
Жылына төрт рет шығады

Құрылтайшы: *Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті*

Бас редактор: *Қуанышбаев С. Б.*, география ғылымдарының докторы, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы ҚӨУ, Қазақстан.

Бас редактордың орынбасары: *Жарлығасов Ж.Б.*, ауыл шаруашылығы ғылымдарының кандидаты, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы ҚӨУ, Қазақстан.

РЕДАКЦИЯ АЛҚАСЫ

Әлімбаев А.Е., философия докторы (PhD), А.К. Құсайынов атындағы Еуразия гуманитарлық институты, Қазақстан.

Емин Атасой, PhD докторы, Улудаг университеті, Бурса қ., Түркия.

Зоя Микниене, докторы, (PhD) Литва денсаулық туралы ғылым университеті, Каунас қ., Литва Республикасы.

Качев Д.А., философия ғылымдарының кандидаты, тарих магистрі, «Челябі мемлекеттік университеті» ЖББ ФМБББМ Қостанай филиалы, Қазақстан.

Ксембаева С.К., педагогика ғылымдарының кандидаты, «Торайғыров университеті» КЕАҚ, Қазақстан.

Лина Анастасова, әлеуметтану ғылымдарының докторы, Бургас еркін университеті, Бургас қ., Болгария.

Медетов Н.А., физика-математика ғылымдарының докторы, «Ш. Уалиханов атындағы Көкшетау университеті» КЕАҚ, Қазақстан.

Мишулина О.В., экономика ғылымдарының докторы, «Челябі мемлекеттік университеті» ЖББ ФМБББМ Қостанай филиалы, Қазақстан.

Соловьев С.А., биология ғылымдарының докторы, Новосібір мемлекеттік экономика және басқару университеті, Ресей.

Скорородов Д.М., техника ғылымдарының кандидаты, «Ресей мемлекеттік аграрлық университеті – К.А. Тимирязев атындағы Мәскеу ауыл шаруашылық академиясы» ЖББ ФМБББМ, Ресей.

Сычева И.Н., ауыл шаруашылығы ғылымдарының кандидаты, «Ресей мемлекеттік аграрлық университеті – К.А. Тимирязев атындағы Мәскеу ауыл шаруашылық академиясы» ЖББ ФМБББМ, Ресей.

Ташев А.Н., экология бойынша биология ғылымдарының кандидаты, орман шаруашылығы университеті, София қ., Болгария.

Уразбоев Г.У., физика-математика ғылымдарының докторы, Ургенч мемлекеттік университеті, Өзбекстан.

Тіркеу туралы куәлік №5452-Ж
Қазақстан Республикасының ақпарат министрлігімен 17.09.2004 берілген.
Мерзімді баспа басылымын қайта есепке алу 07.11.2023 ж.
Жазылу бойынша индексі 74081

Редакцияның мекен-жайы:

110000, Қостанай қ., Байтұрсынұлы к., 47
(Редакциялық-баспа бөлімі)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

№1 (77), январь 2025 г.
Издается с января 2005 года
Выходит 4 раза в год

Учредитель: *Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы*

Главный редактор: *Куанышбаев С.Б.*, доктор географических наук, КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы, Казахстан.

Заместитель главного редактора: *Жарлыгасов Ж.Б.*, кандидат сельскохозяйственных наук, КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы, Казахстан.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Алимбаев А.Е., доктор философии (PhD), Евразийский гуманитарный институт имени А.К.Кусаинова, Казахстан.

Емин Атасой, доктор PhD, Университет Улудаг, г. Бурса, Турция.

Зоя Микниене, доктор (PhD), Литовский университет наук здоровья, г. Каунас, Республика Литва.

Качеев Д.А., кандидат философских наук, магистр истории, Костанайский филиал ФГБОУ ВО «ЧелГУ», Казахстан.

Ксембаева С.К., кандидат педагогических наук, НАО «Торайгыров университет», Казахстан.

Лина Анастасова, доктор социологии, Бургасский свободный университет, г. Бургас, Болгария.

Медетов Н.А., доктор физико-математических наук, НАО «Кокшетауский университет им. Ш.Уалиханова», Казахстан.

Мишулина О.В., доктор экономических наук, Костанайский филиал ФГБОУ ВО «ЧелГУ», Казахстан.

Соловьев С.А., доктор биологических наук, Новосибирский государственный университет экономики и управления, Россия.

Скорыходов Д.М., кандидат технических наук, ФГБОУ ВО РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, Россия.

Сычева И.Н., кандидат сельскохозяйственных наук, ФГБОУ ВО РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, Россия.

Ташев А.Н., кандидат биологических наук по экологии, Лесотехнический университет, г. София, Болгария.

Уразбоев Г.У., доктор физико-математических наук, Ургенчский государственный университет, Узбекистан.

Свидетельство о регистрации № 5452-Ж
выдано Министерством информации Республики Казахстан 17.09.2004 г.
Переучёт периодического печатного издания 07.11.2023 г.
Подписной индекс 74081

Адрес редакции:

110000, г. Костанай, ул. Байтұрсынұлы, 47
(Редакционно-издательский отдел)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

or investigate the range of values for the parameters involved in the operator. These parameters determine whether the operator maps the class S of univalent functions (or its subclasses) onto itself or into other subclasses.

In this article, we study the set of values of the real exponent, in which the Bernatskiy integral operator displays a class of starlike Yanovski functions in the unit circle having a decomposition of the form $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \dots$, $z \in E$, $n \geq 1$, and satisfying the condition $\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - a \right| \leq b$ in the class $K(\gamma)$ of functions close-to-convex of order γ , or, in particular, in the class S^0 of convex functions. Distortion and rotation theorems for the Bernatskiy integral on the class of Yanovski starlike functions are also obtained. The results of the article summarize or enhance previously known results.

Keywords: univalent functions, Bernatskiy integral operator, convex functions, starlike functions, close-to convex functions.

Сведения об авторах:

Майер Федор Федорович – кандидат физико-математических наук, доцент, и.о. профессора кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.

Хабдуллина Гульнара Жумабековна – магистр математики, старший преподаватель, кафедра математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.

Майер Федор Федорович – физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, математика және физика кафедрасы профессорының м.а., Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.

Хабдуллина Гульнара Жумабековна – математика магистрі, математика және физика кафедрасының аға оқытушы, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.

Mayer Fyodor Fyodorovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, acting Professor of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.

Khabdullina Gulnara Zhumabekovna – Master of Mathematics, Senior Lecturer of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.

УДК 519.245

Тастанов, М.Г.,

кандидат физико-математических наук,
и.о. профессора кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан

Жарлыгасова, Э.З.,

магистр естественных наук,
старший преподаватель
кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Аннотация

Теорией случайных процессов называется раздел математики, который изучает закономерности случайных явлений в динамике их развития. При

изучении явлений окружающего мира мы часто сталкиваемся с процессами, течение которых заранее предсказать в точности невозможно. Эта неопределенность (непредсказуемость) вызвана влиянием случайных факторов, воздействующих на ход процесса. Теория случайных процессов является основой методов Монте-Карло, поэтому в данной статье приведены сведения из теории случайных процессов (цепи Маркова, случайные блуждания, однородные марковские процессы и др.) и теории мартингалов. Теорию мартингалов мы в дальнейшем будем использовать для доказательства ε – смещенности оценок. Решение исходной задачи будет оцениваться в одной точке (точечное оценивание).

Ключевые слова: случайные процессы, цепи Маркова, критерий марковости, случайные блуждания, однородные цепи Маркова, вероятность перехода, мартингалы.

1 Введение

При изучении различных явлений, событий действительности мы сталкиваемся с процессами, предсказать дальнейшее развитие которых заранее мы не можем. Случайные процессы – удобная математическая модель функций времени, значениями которых являются случайные величины. Первое математическое описание случайного процесса, называемого в настоящее время винеровским или процессом броуновского движения было дано Л. Башалье в докладе в Парижской академии [1]. Он предложил использовать этот процесс в качестве модели колебаний цены активов, стремился получить аналитические выражения для стоимости различных типов опционов и сравнить их с наблюдаемыми рыночными ценами опционов. Опцион является примером финансовой производной и дает его владельцу право купить указанное число долей акций по определенной цене в указанную дату или до нее.

То, что теория случайных процессов принадлежит к категории наиболее быстро развивающихся математических дисциплин, в значительной мере определяется ее глубокими связями с практикой [2]. В 1905 году двумя известными физиками, М. Смолуховским и А. Эйнштейном, была разработана теория броуновского движения, исходящая из теоретико-вероятностных предпосылок, которая и привела математику к порогу создания теории случайных процессов. Работы датчанина А.К. Эрланга оказали значительное влияние на формирование элементов теории случайных процессов, в частности, процессов гибели и размножения, которые положили начало изучения динамики биологических популяций. Изучение явления диффузии средствами теории вероятностей предприняли известные физики М. Планк и А. Фоккер. Н. Винер в середине 20-х годов прошлого века при изучении броуновского движения ввел в рассмотрение процессы, названные винеровскими. Необходимо также отметить работы А.А. Маркова по изучению цепных зависимостей (цепи Маркова) и Е.Е. Слуцкого по теории случайных функций. А.Н. Колмогоров в статье «Об аналитических методах в теории вероятностей» заложил основы теории марковских процессов: в ней получены прямые и обратные дифференциальные уравнения, которые управляют вероятностями перехода случайных процессов без последствия. Здесь же был дан набросок теории скачкообразных процессов без последствия, которую дал позднее В. Феллер, получивший интегро-дифференциальное уравнение для скачкообразных марковских процессов. В работах А.Я. Хинчина было осуществлено построение основ стационарных случайных процессов на базе физических задач. Вышеупомянутые работы послужили началом построения общей теории случайных процессов.

2 Материалы и методы

Определим основные задачи теории случайных процессов, большинство из которых мы в дальнейшем будем рассматривать.

Одной из основных задач является построение математической модели, допускающее строгое или формальное определение случайного процесса и исследование общих свойств этой модели.

Важной задачей является классификация случайных процессов. Существующая классификация в теории случайных процессов заключается в выделении из всей совокупности таких процессов некоторых классов, допускающих более или менее конструктивное описание [2]. Каждый класс характеризуется тем, что достаточно дополнительно задать лишь конечное число функциональных характеристик, чтобы выделить из всего класса отдельный случайный процесс. Иногда рассматривают классы процессов, допускающих единообразное решение определенного набора задач. Можно отметить следующие широкие классы процессов:

- марковские процессы, включая, естественно, цепи Маркова;
- процессы с конечными моментами второго порядка (гильбертовы процессы);
- процессы с независимыми приращениями;
- стационарные в узком и широком смысле случайные процессы, в частности, гауссовский и винеровский процессы;
- эргодические процессы.

Задачи отыскания для различных классов случайных процессов аналитического аппарата, дающего возможность находить вероятность характеристики процессов, тесно связаны с предыдущей. Для простейших вероятностных характеристик такой аппарат создан и используется, как правило, теорию обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, а также интегро-дифференциальные и интегральные уравнения, разностные уравнения, преобразования Фурье. Изучение различных преобразований случайных процессов также является важной задачей теории случайных процессов. Эти преобразования используются для того, чтобы с их помощью изучать сложные процессы путем сведения их к более простым. К такой задаче можно отнести и анализ стохастических дифференциальных и интегральных уравнений, в которые входят случайные процессы. Задачи определения значений некоторого функционала от процесса по значениям других функционалов от этого же процесса играют также важную роль в формировании ряда разделов теории случайных процессов. Примером такой задачи является задача предсказания, позволяющая определить значение процесса в некоторые будущие моменты времени, наблюдая процесс в течение определенного промежутка времени.

3-4 Результаты и обсуждение

Цепи Маркова. Одним из наиболее важных обобщений понятия последовательности независимых случайных величин является понятие последовательности величин, связанных в цепь Маркова [3].

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P) . Измеримое отображение $\zeta: (\Omega, F) \rightarrow (X, B)$, где (X, B) – некоторое измеримое пространство, называется случайным элементом в (X, B) .

Последовательность $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ случайных элементов в измеримом пространстве (X, B) называется цепью Маркова, если для любых $\Gamma \in B$ и $n = 1, 2, \dots$ с вероятностью 1

$$P\{\xi_n \in \Gamma \mid \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\} = P\{\xi_n \in \Gamma \mid \xi_{n-1}\}$$

Пространство (X, B) называется фазовым пространством цепи.

Всякую последовательность (случайных или неслучайных) элементов $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ пространства (X, B) можно рассматривать как движение некоторой системы (точки, частицы) в фазовом пространстве: из начального состояния ξ_0 в момент времени 1 система переходит в состояние ξ_1 , затем в момент времени 2 – в состояние ξ_2 и т.д. Понятие цепи Маркова, таким образом, выделяет из совокупности всевозможных движущихся систем так называемые системы без последствия, или системы с отсутствием памяти. В детерминированном случае это те системы, для которых состояние в момент времени однозначно определяется состоянием этой системы в момент времени $n - 1$, независимо от того, каким было движение до этого момента. В отличие от детерминированных стохастические системы без последствия обладают тем свойством, что по состоянию системы в момент времени $n - 1$

однозначно определяется не состояние системы в момент времени n , а лишь вероятность, с какой она в этот момент времени находится в том или ином множестве состояний.

Пример. Последовательность независимых случайных элементов $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ образует цепь Маркова, так как

$$P\{\xi_n \in \Gamma \mid \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\} = P\{\xi_n \in \Gamma \mid \xi_{n-1}\} = P\{\xi_n \in \Gamma\}.$$

Случайные блуждания. Пусть X – аддитивная коммутативная группа и B – некоторая σ -алгебра подмножеств X , согласованная с операцией сложения в X , то есть если $\Gamma \in B$, то $\Gamma + x = \{x + z, z \in \Gamma\} \in B$ при любом $x \in X$. Предположим, что задана последовательность независимых случайных элементов $\{\eta_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ в (X, B) . Тогда последовательность $\{\xi_n = \eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ является цепью Маркова в фазовом пространстве (X, B) , так как для всех $\Gamma \in B$ и $n = 1, 2, \dots$

$$P\{\xi_n \in \Gamma \mid \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\} = P\{\xi_{n-1} + \eta_n \in \Gamma \mid \xi_{n-1}\}.$$

Такая цепь называется случайным блужданием в X [4] – [6].

Критерий марковости. Пусть задана последовательность $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ случайных элементов в измеримом пространстве (X, B) (вероятностное пространство (Ω, F, P) считается фиксированным). Обозначим через F_n минимальную σ -алгебру событий, относительно которой измеримы случайные элементы $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$, а через F^n – минимальную σ -алгебру событий, относительно которой измеримы случайные элементы ξ_n, ξ_{n+1}, \dots . Иначе говоря, F_n σ -алгебра всех событий, связанных с эволюцией последовательности до момента n включительно, а F^n – σ -алгебра всех событий, связанных с эволюцией последовательности после момента n , включая сам момент времени n . σ -алгебра F_n порождается событиями вида $\{\xi_k \in \Gamma\}$ при всех $k = 0, 1, 2, \dots, n$, $\Gamma \in F$. Аналогично σ -алгебра F^n порождается событиями $\{\xi_k \in \Gamma\}$ при $k \geq n$, $\Gamma \in F$.

Определение цепи Маркова означает, таким образом, что для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ и $\Gamma \in F$ с вероятностью 1

$$P\{\xi_{n+1} \in \Gamma \mid F_n\} = P\{\xi_{n+1} \in \Gamma \mid \xi_n\}$$

Теорема. Пусть $(\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ – последовательность случайных элементов в измеримом пространстве (X, B) . Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) последовательность $(\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ является цепью Маркова;
- 2) для всех $n = 0, 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots, \Gamma \in F$ с вероятностью 1

$$P\{\xi_{n+m} \in \Gamma \mid F_n\} = P\{\xi_{n+m} \in \Gamma \mid \xi_n\};$$

- 3) для любых $A \in F_{n-1}, B \in F^{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) с вероятностью 1

$$P\{A \cap B \mid \xi_n\} = P\{A \mid \xi_n\}P\{B \mid \xi_n\};$$

- 4) для любой ограниченной F^{n+1} – измеримой случайной величины η с вероятностью 1 $M\{\eta \mid \xi_n\} = M\{\eta\}$.

Если считать момент времени n «настоящим», то тогда F_{n-1} – это «прошлое», а F^{n+1} – «будущее». Утверждение 3) означает, что для цепи Маркова при известном «настоящем» «прошлое» и «будущее» условно независимы.

Уравнения Колмогорова-Чепмена. Пусть $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ – цепь Маркова в фазовом пространстве (X, B) и $0 \leq k < m < n$. Тогда в силу свойств условных вероятностей и марковского свойства имеем с вероятностью 1

$$P\{\xi_n \in \Gamma \mid \xi_k\} = M\{P\{\xi_n \in \Gamma \mid \xi_m\} \mid \xi_k\}.$$

Это соотношение называется уравнением Колмогорова-Чепмена и является фактически следствием формулы полной вероятности и марковского свойства.

Рассмотрим условную вероятность $P\{\xi_n \in \Gamma \mid \xi_k\}$ ($0 \leq k < n, \Gamma \in B$). При фиксированных k, n, Γ эта вероятность представляет собой B – измеримую функцию от ξ_k . Вообще говоря, нельзя утверждать, что при фиксированных k, n, ω функция $P\{\xi_n \in \Gamma \mid \xi_k\}$ является мерой на B .

В самом деле, из свойств условных вероятностей следует, что для каждой последовательности $\{\Gamma_r, r = 1, 2, \dots\}$ непересекающихся множеств из σ -алгебры B

вероятностью 1 выполнено

$$P\{\xi_n \in \cup_{r=1}^{\infty} \Gamma_r | \xi_k\} = \sum_{r=1}^{\infty} P\{\xi_n \in \Gamma_r | \xi_k\}.$$

При этом множество тех ω , для которых это равенство не имеет места, зависит от последовательности $\{\Gamma_r, r = 1, 2, \dots\}$. Для другой последовательности это исключительное множество будет другим, и поэтому нельзя утверждать, что для почти всех ω условная вероятность $P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_k\}$ является мерой на B . Тем не менее во многих случаях такое утверждение справедливо. Именно, если X – полное метрическое X , то существует такая функция $P(k, x, n, \Gamma)$, $0 \leq k < n$, $x \in X$, $\Gamma \in B$, что при каждом k , n и Γ с вероятностью 1

$$P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_k\} = P(k, \xi_k, n, \Gamma),$$

и при этом $P(k, x, n, \Gamma)$ B – измерима при фиксированных k, n, Γ , а при фиксированных k, x, n – это вероятностная мера на B . Очевидно, при $k = n$ должно быть $P(n, x, n, \Gamma) = \chi_{\Gamma}(x)$, где $\chi_{\Gamma}(x)$ – индикатор множества Γ .

Если для данной цепи $(\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ в пространстве (X, B) такая функция $P(k, x, n, \Gamma)$ существует, то она называется вероятностью перехода. В терминах вероятностей перехода уравнение Колмогорова-Чепмена может быть записано так:

$$P(k, \xi_k, n, \Gamma) = \int_X P(m, y, n, \Gamma) P(k, \xi_k, m, dy).$$

Это равенство выполняется с вероятностью 1. Во многих случаях выполняется более сильное равенство

$$P(k, x, n, \Gamma) = \int_X P(m, y, n, \Gamma) P(k, x, m, dy)$$

для всех $0 \leq k \leq m \leq n$, $x \in X$, $\Gamma \in B$, которое также называется уравнением Колмогорова-Чепмена для вероятностей перехода. Вероятность перехода $P(k, x, n, \Gamma)$ можно интерпретировать как условную вероятность

$$P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_k = x\}$$

Заметим, что условные вероятности вида $P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_k = x\}$ для данной случайной последовательности $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ могут удовлетворять уравнению Колмогорова-Чепмена без того, чтобы эта последовательность была цепью Маркова.

Построение цепи Маркова по вероятности перехода. Пусть (X, B) – некоторое измеримое пространство. Предположим, что для всех $x \in X$, $\Gamma \in B$ и целых k, n таких, что $0 \leq k < n$, задана числовая функция $P(k, x, n, \Gamma)$, удовлетворяющая условиям:

- а) при фиксированных k, n , Гона B – измерима;
- б) при фиксированных k, x, n она является вероятностной мерой на B ;
- в) для всех $0 \leq k < m < n$, $x \in X$ и $\Gamma \in B$ выполнено соотношение

$$P(k, x, n, \Gamma) = \int_X P(k, x, m, dy) P(m, y, n, \Gamma).$$

Спрашивается, существует ли на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) цепь Маркова $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$, для которой $P(k, x, n, \Gamma)$ была бы вероятностью перехода, т.е. с вероятностью 1

$$P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_k\} = P(k, \xi_k, n, \Gamma).$$

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Если функция $P(k, x, n, \Gamma)$ удовлетворяет условиям а)-в), то существует вероятностное пространство (Ω, F, P) и последовательность $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ случайных элементов из (X, B) такие, что последовательность $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ является цепью Маркова с вероятностью перехода $P(k, x, n, \Gamma)$.

Указанное вероятностное пространство может быть построено следующим образом. Положим $\Omega = X^{\infty}$, $F = B^{\infty}$. Это означает, что элементами множества Ω являются всевозможные последовательности вида $\omega = (x_0, x_1, x_2, \dots)$, где $x_i \in X$, а F – минимальная σ -алгебра подмножеств Ω , содержащая все множества вида

$$\{\omega: x_0 \in \Gamma_1, \dots, x_n \in \Gamma_n\} \tag{1}$$

при всевозможных $n = 0, 1, 2, \dots$, $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in B$.

Далее, пусть μ – произвольная вероятностная мера на B . На множествах вида (1) зададим числовую функцию P формулой

$$P\{\omega: x_0 \in \Gamma_1, \dots, x_n \in \Gamma_n\} = \int_{\Gamma_0} \mu(dx_0) \int_{\Gamma_1} P(0, x_0, 1, dx_1) \int_{\Gamma_2} P(1, x_1, 2, dx_2) \dots \int_{\Gamma_n} P(n-1, x_{n-1}, n, dx_n)$$

$$P\{\omega: x_0 \in \Gamma_1, \dots, x_n \in \Gamma_n\} = \int_{\Gamma_0} \mu(dx_0) \int_{\Gamma_1} P(0, x_0, 1, dx_1) \int_{\Gamma_2} P(1, x_1, 2, dx_2) \dots \int_{\Gamma_n} P(n-1, x_{n-1}, n, dx_n)$$

$$P\{\omega: x_0 \in \Gamma_1, \dots, x_n \in \Gamma_n\} = \int_{\Gamma_0} \mu(dx_0) \int_{\Gamma_1} P(0, x_0, 1, dx_1) \int_{\Gamma_2} P(1, x_1, 2, dx_2) \dots \int_{\Gamma_n} P(n-1, x_{n-1}, n, dx_n)$$

Эта функция продолжается до вероятностной меры P на измеримом пространстве (Ω, F) . Положим для $n = 0, 1, 2, \dots$ $\xi_n = \xi_n(\omega) = x_n$, если $\omega = (x_0, x_1, x_2, \dots)$. Тогда на вероятностном пространстве (Ω, F, P) последовательность $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ случайных элементов в (X, B) образует цепь Маркова, для которой заданная функция $P(k, x, n, \Gamma)$ является вероятностью перехода. При этом начальное состояние ξ_0 имеет распределение μ , называемое начальным распределением цепи.

По функции $P(k, x, n, \Gamma)$ цепь Маркова может быть построена неоднозначно: имеется произвол в выборе вероятностного пространства и начального распределения. Однако, если для двух цепей в одном и том же фазовом пространстве $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$, заданной на вероятностном пространстве (Ω, F, P) и $\{\xi'_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$, заданной на вероятностном пространстве (Ω', F', P') , – совпадают вероятности перехода и начальные распределения, то такие цепи стохастически эквивалентны в том смысле, что для любых $n = 0, 1, 2, \dots$ и произвольного набора $\{\Gamma_i, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ измеримых множеств из фазового пространства выполнено

$$P\{\xi_0 \in \Gamma_0, \xi_1 \in \Gamma_1, \dots, \xi_n \in \Gamma_n\} = P'\{\xi'_0 \in \Gamma_0, \xi'_1 \in \Gamma_1, \dots, \xi'_n \in \Gamma_n\}.$$

Это означает, что цепь Маркова в указанном смысле однозначно определяется своей вероятностью перехода и начальным распределением.

Однородные цепи Маркова. Определение однородной цепи Маркова. Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P) . Цепь Маркова $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ в фазовом пространстве (X, B) с вероятностью перехода $P(k, x, n, \Gamma)$ называется однородной, если $P(k, x, n, \Gamma)$ представляет собой функцию от $x \in X, \Gamma \in B$ и $n - k, 0 \leq k < n$. Обозначим через $P(n, x, \Gamma)$, $n > 0, x \in X, \Gamma \in B$, функцию, для которой $P(k, x, n, \Gamma) = P(n - k, x, \Gamma)$. При $n = 0$ естественно положить $P(0, x, \Gamma) = \chi_\Gamma(x)$. Функция $P(n, x, \Gamma)$ называется вероятностью перехода однородной цепи. Она удовлетворяет условиям:

а) при фиксированных n и $\Gamma, n = 0, 1, 2, \dots, \Gamma \in B$ функция $P(n, x, \Gamma)$ B – измерима;
 б) при фиксированных n и $x, n = 1, 2, \dots, x \in X$ функция $P(n, x, \Gamma)$ является вероятностной мерой на B ;

б*) при всех $0 \leq k < m < n$ и $\Gamma \in B$ с вероятностью 1 выполнено соотношение

$$P(n - k, \xi_k, \Gamma) = \int_X P(n - m, y, \Gamma) \cdot P(m - k, \xi_k, dy)$$

Ниже всюду будет предполагаться, что вероятность перехода однородной цепи Маркова удовлетворяет условиям а) и б) и следующему, несколько сильному, чем б*) условию:

в) при всех выполнено соотношение

$$P(m + n, x, \Gamma) = \int_X P(m, x, dy) P(n, y, \Gamma)$$

называемое уравнением Колмогорова-Чепмена.

Положим $P(x, \Gamma) = P(1, x, \Gamma)$. Функция $P(x, \Gamma)$ называется вероятностью перехода за

один шаг. Из уравнения Колмогорова-Чепмена следует, что вероятность перехода за n шагов, то есть функция $P(n, x, \Gamma)$, выражается через $P(x, \Gamma)$ при помощи рекуррентных соотношений

$$P(n + 1, x, \Gamma) = \int_X P(n, y, \Gamma) \cdot P(x, dy) = \int_X P(y, \Gamma) \cdot P(n, x, dy),$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Поэтому, зная начальное распределение μ однородной цепи (т.е. меру $\mu(\Gamma) = P\{\xi_0 \in \Gamma\}$, $\Gamma \in B$) и вероятность перехода за один шаг, можно в принципе определить вероятность произвольного события, связанного с эволюцией рассматриваемой цепи, т.е. произвольного события из σ -алгебры F^0 , порожденной элементами $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$. Именно для событий вида

$$A = \{\xi_0 \in \Gamma_0, \xi_1 \in \Gamma_1, \dots, \xi_n \in \Gamma_n\}, \{\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in B\}, n = 0, 1, 2, \dots$$

имеем

$$P(A) = \int_{\Gamma_0} \mu(dx_0) \cdot \int_{\Gamma_1} P(x_0, dx_1) \dots \int_{\Gamma_{n-1}} P(x_{n-2}, dx_{n-1}) \cdot P(x_{n-1}, \Gamma_n)$$

Так как события указанного вида образуют алгебру, а F^0 – минимальная σ -алгебра, порожденная этой алгеброй, то вероятность произвольного события из F^0 однозначно восстанавливается по вероятностям всевозможных событий типа события A .

Отсюда следует, что все однородные цепи Маркова в одном и том же фазовом пространстве (возможно, на разных вероятностных пространствах), у которых совпадают начальные распределения и вероятности перехода на один шаг, стохастически эквивалентны. Это означает, что вероятности событий типа события A для всех таких цепей одни и те же.

Вероятность перехода за один шаг $P(x, \Gamma), x \in X, \Gamma \in B$ удовлетворяет условиям:

- 1) при фиксированном $\Gamma \in B$ функция $P(x, \Gamma)$ B -измерима по x ;
- 2) при фиксированном $x \in X$ она является вероятностной мерой на B .

Если на некотором измеримом пространстве (X, B) задана функция $P(x, \Gamma), x \in X, \Gamma \in B$ удовлетворяющая условиям 1) и 2), то можно построить однородную цепь Маркова, для которой эта функция была бы вероятностью перехода за один шаг. Разумеется, с заданной вероятностью перехода за один шаг существует не одна цепь. Однако, все они отличаются друг от друга (с точностью до стохастической эквивалентности) лишь начальным распределением.

Пример. Вероятностное представление решения задачи Дирихле. Пусть $P(x, \Gamma)$ – вероятность перехода за один шаг некоторой однородной цепи Маркова в фазовом пространстве (X, B) ; B -измеримую вещественную функцию $f(x)$, заданную на X , назовем гармонической на множестве $\Gamma \in B$, если для всех $x \in \Gamma$ выполнено равенство $f(x) = Pf(x)$.

Следующая задача является аналогом задачи Дирихле из теории дифференциальных уравнений.

Пусть заданы множество $D \in B$ и определена на множестве $X \setminus D$ вещественная B -измеримая функция $g(x)$. Требуется найти такую B -измеримую функцию $f(x)$, чтобы на множестве D она была гармонической, а вне D совпадала с заданной функцией $g(x)$.

Запишем решение такой задачи в вероятностных терминах. Пусть τ – момент первого попадания во множество $X \setminus D$ для цепи Маркова с вероятностью перехода за один шаг $P(x, \Gamma)$: $\tau = \inf\{n: n \geq 0, \xi_n \notin D\}$, причем, если для некоторого $\omega \xi_n(\omega) \in D$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то полагаем $\tau(\omega) = +\infty$. Для всех $x \in X$ положим $f(x) = M_x g(\xi_\tau)$. При этом, если $\tau = +\infty$, то считаем $g(\xi_\tau) = 0$; для $x \notin D$ $f(x) = g(x)$. Нетрудно проверить также, что $f(x)$ гармонична на множестве D .

Решение такой задачи не единственно.

Цепи Маркова с дискретным множеством состояний. Матрицы вероятностей перехода. Рассмотрим однородные цепи Маркова (ξ_n, P_x) в фазовом пространстве (X, B) в предположении, что X счетно или конечно, а B – σ -алгебра всех подмножеств X . Такие цепи определяются вероятностями перехода за один шаг в одноточечные множества $P(x, y) = P_x \{ \xi_1 = y / \xi_0 = x \}$ ($x, y \in X$), ибо для произвольного $\Gamma \subset X$ имеем $P(x, \Gamma) =$

$P_x\{\xi_1 \in \Gamma\} = \sum_{y \in \Gamma} P(x, y)$. Числа $P(x, y)$ ($x, y \in X$) образуют матрицу P , возможно бесконечную, в x -й строке которой расположены вероятности перехода за один шаг из состояния x во всевозможные состояния $y \in X$, а y -м столбце – вероятности перехода за один шаг из всевозможных состояний $x \in X$ в состояние y . Элементы матрицы P неотрицательны, и сумма их по строке равна 1. Такие матрицы называются стохастическими. Каждая стохастическая матрица определяет единственную с точностью до эквивалентности однородную цепь Маркова, для которой вероятности перехода за один шаг совпадают с элементами этой матрицы.

Вероятности перехода за n шагов $P(n, x, y)$ также образуют стохастическую матрицу, и она равна n -й степени матрицы P , как это следует из уравнения Колмогорова-Чепмена:

$$P(n, x, y) = \sum_{z_1, \dots, z_{n-1} \in X} P(x, z_1) P(z_1, z_2) \dots P(z_{n-1}, y),$$

где $x, y \in X$, $n = 2, 3, \dots$. При $n = 0$ естественно считать функцию $P(0, x, y) = 1$ для $x = y$ и $P(0, x, y) = 0$ для $x \neq y$ так что вероятности перехода за 0 шагов образует единичную матрицу I .

В случае, когда X конечно, для вероятностей перехода за n шагов справедлива следующая формула:

$$P(n, x, y) = \sum_{k=1}^r \frac{1}{(m_k-1)!} \cdot \frac{d^{m_k-1}}{d\lambda^{m_k-1}} \left[\frac{\lambda^n M_{xy}(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k}, \quad (2)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$; $x, y \in X$; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ – различные корни уравнения $\det(\lambda I - P) = 0$; m_1, m_2, \dots, m_r – их краткости соответственно; $M_{xy}(\lambda)$ – алгебраическое дополнение элемента y -й строки и x -го столбца матрицы $\lambda I - P$, $\psi_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^{-m_k} \det(\lambda I - P)$.

Мартингалы. Определения. Общие свойства. Мартингалы и полумартингалы образуют важный класс процессов, обобщающий процессы с независимыми приращениями. Он включает в себя широкий класс процессов – марковские процессы, решения стохастических уравнений, управляемые случайные процессы и др. Разработана специальная «мартингальная» техника изучения случайных процессов.

Пусть $\{\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{P}\}$ – полное вероятностное пространство, на котором задан поток σ -алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, где T – некоторое подмножество вещественной прямой R . Это означает, что \mathcal{F}_t монотонно зависит от t : при $t_1 < t_2, t_1, t_2 \in T$ будет $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2} \subset \mathcal{C}$.

Семейство вещественных величин $\xi(t) (t \in T)$ называется мартингалом, если $\forall t \in TM |\xi(t)| < \infty$ и

$$M(\xi(t_2) | \mathcal{F}_{t_1}) \leq \xi(t_1), t_1 < t_2, t_1, t_2 \in T \quad (3)$$

Семейство случайных величин $\xi(t) (t \in T)$ называется супермартингалом, если $\forall t M \xi^-(t) = \frac{1}{2} M(|\xi(t)| - \xi(t)) < \infty$ и,

$$M(\xi(t_2) | \mathcal{F}_{t_1}) \leq \xi(t_1), t_1 < t_2, t_1, t_2 \in T. \quad (4)$$

Семейство случайных величин $\xi(t) (t \in T)$ называется субмартингалом, если $-\xi(t)$ является супермартингалом. Мартингал является одновременно и супермартингалом, и субмартингалом; верно и обратное: если $\xi(t) (t \in T)$ является супермартингалом, и субмартингалом одновременно, то $\xi(t)$ – мартингал. Термины «мартингал», «субмартингал», «супермартингал» относятся также и к случайным процессам. Более точно, называя процесс мартингалом (супермартингалом), следует указывать поток, относительно которого свойства (3) или (4) выполнены. Поэтому используется также термин « $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ -мартингал» («супермартингал»). Иногда термин «мартингал» относят к процессам, для которых (3) выполнено для потока, порождаемого самим процессом $\xi(t)$, т.е. когда $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi(s), s \leq t, s \in T)$ – наименьшая σ -алгебра, относительно которой измеримы все указанные в скобках величины.

В дальнейшем относительно σ -алгебр \mathcal{F}_t , будет предполагаться, что они содержат все множества P – меры нуль. Тогда всякая модификация мартингала (супермартингала) также будет мартингалом (супермартингалом) относительно того же потока.

Вместо свойств (3), (4) и аналогичного свойства субмартингала можно использовать интегральные неравенства:

$$\begin{aligned} \int_A \xi(t_2)P(d\omega) &\leq \int_A \xi(t_1)P(d\omega) && \text{(супермартингал),} \\ \int_A \xi(t_2)P(d\omega) &= \int_A \xi(t_1)P(d\omega) && \text{(мартингал),} \\ \int_A \xi(t_2)P(d\omega) &\geq \int_A \xi(t_1)P(d\omega) && \text{(субмартингал),} \end{aligned} \tag{5}$$

$$A \in F_{t_1}, t_1 < t_2, t_1, t_2 \in T.$$

Однородные марковские процессы. Марковский процесс называется однородным, если вероятность перехода $P(s, x, t, \Gamma)$ обладает тем свойством, что функция $P(s, x, s + h, \Gamma)$ не зависит от s . Если положить $P(h, x, \Gamma) = P(s, x, s + h, \Gamma)$, то для конечномерных распределений процесса будет иметь место равенство

$$\begin{aligned} P_{Sx}\{\xi(t_1) \in \Gamma_1, \dots, \xi(t_n) \in \Gamma_n\} &= \int_{\Gamma_1} P(t_1 - s, x, dy_1) \int_{\Gamma_2} P(t_2 - t_1, y_1, dy_2) \dots \\ &\dots \int_{\Gamma_n} P(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n) = P_{0x}\{\xi(t_1 - s) \in \Gamma_1, \dots, \xi(t_n - s) \in \Gamma_n\}, \end{aligned}$$

Таким образом, вместо семейства мер P_{Sx} , зависящих от временной и пространственной переменных, в однородном случае достаточно рассматривать семейство мер $P_x = P_{0x}$, зависящих лишь от пространственной переменной. Другими словами, каждый раз, когда процесс выходит из состояния x в момент времени s , мы производим сдвиг времени так, чтобы точка стала начальной (нулевой). Естественно, что мы должны иметь возможность сдвигать соответственно и все траектории процесса, а это значит, что пространство элементарных событий должно быть достаточно богатым.

Пусть даны:

- а) пространство элементарных событий (Ω, U) ;
- б) случайная величина $\zeta(\omega)$ со значениями в расширенном отрезке $[0, \infty]$;
- в) для каждого $t \geq 0$ σ -алгебра F_t в пространстве $\Omega_t \{ \omega: \zeta(\omega) > t \}$, причем если $s \leq t$, то $F_s[\Omega_t] \subseteq F_t \subseteq U$, где $F_s[\Omega_t]$ – след σ -алгебры F_s на множестве Ω_t , т.е. совокупность множеств вида $A \cap \Omega_t, A \in F_s$;
- г) функция двух переменных $\zeta(t) = \zeta(t, \omega), t \in [0, \zeta(\omega)], \omega \in \Omega$, принимающая значения в некотором измеримом пространстве (X, B) , такая, что при каждом $t \geq 0$ отображение $\zeta(t, \cdot)$ пространства (Ω_t, F_t) в пространство (X, B) измеримо; предполагается, что σ -алгебра B содержит все одноточечные множества;
- д) для каждого $x \in X$ вероятностная мера P_x на некоторой σ -алгебре F в пространстве Ω , содержащей все $F_t, t \geq 0$.

Система объектов а)-д) образует однородный марковский процесс, если выполнены условия:

- 1) при любых $t \geq 0, \Gamma \in B$ функция $P(t, x, \Gamma) = P_x\{\xi(t) \in \Gamma\}$ – измерима как функция от x , причем $P(0, x, X \setminus \{x\}) = 0$;
- 2) для любых $s, t \geq 0, \Gamma \in B$ $P_x\{\xi(t + s) \in \Gamma | F_x\} = P(t, \xi(s), \Gamma)$ почти, наверное, относительно меры P_x на множестве Ω_s ;
- 3) для каждого $\omega \in \Omega_t$ найдется такое $\omega' \in \Omega$, что $\zeta(\omega') = \zeta(\omega) - t$ и $\xi(s, \omega') = \xi(s + t, \omega)$ при $0 \leq s < \zeta(\omega')$.

Условие 2) соединяет в себе свойство марковости процесса и свойство его однородности во времени. Условие 3) означает, что вместе с каждой траекторией процесса произвольный кусок ее после некоторого момента времени также является возможной траекторией. Расширяя, если это нужно, пространство Ω всегда можно добиться того, чтобы условие 3) выполнялось.

$$P(s + t, x, \Gamma) = \int_X P(s, x, dy)P(t, y, \Gamma), s, t \geq 0, x \in X, \Gamma \in B.$$

Функция $P(t, x, \Gamma)$, определенная в условии 1) называется вероятностью перехода. Из условия 2) следует, что она удовлетворяет уравнению Колмогорова-Чепмена. При этом

$P(s, x, X) \leq 1$. Если $P(+0, x, X) = \lim_{t \rightarrow 0} P(t, x, X) = 1$, то вероятность перехода называется нормальной, а соответствующий процесс – нормальным.

Однородный марковский процесс будем обозначать $(\xi(t), \zeta, F_t, P_x)$. Если $\zeta \equiv +\infty$, то процесс называется необрывающимся и обозначается $(\xi(t), F_t, P_x)$. Для необрывающегося процесса $P(t, x, X) \equiv 1$.

Обозначим через \mathfrak{R}^0 минимальную σ -алгебру подмножеств Ω , содержащую все множества вида $\{\xi(t) \in \Gamma\}$ при $t \geq 0$, $\Gamma \in B$, а через R_t минимальную σ -алгебру подмножеств Ω_t , содержащую все множества вида $\{\xi(s) \in \Gamma\} \cap \Omega_t$ при $s \in [0, t]$, $\Gamma \in B$.

Пусть \mathfrak{R} обозначает след σ -алгебры \mathfrak{R}^0 на множестве $\Omega_0 = \{\zeta > 0\}$. Очевидно, что $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}^0 \subseteq \mathfrak{F} \subseteq F, \mathfrak{R}_t \subseteq F_t$, и вместе с процессом $(\xi(t), \zeta, F_t, P_x)$, однородным марковским процессом будет также процесс $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$.

5 Выводы

Нами были рассмотрены вопросы корректности нелинейных краевых задач, где рассматриваются задачи именно в такой постановке и алгоритмы методов Монте-Карло, а именно, алгоритмы «блуждания по сферам» и «блуждания по границам», которые применяются для оценивания решения и производных от решения этой задачи [7]. Оценки, построенные с помощью таких алгоритмов методов Монте-Карло, будут в основном ε – смещенными. Несмещенные оценки в большинстве случаев нереализуемы на ЭВМ, так как с вероятностью 1 не выходят на границу области и поэтому непригодны. В практике обычно ограничиваются лишь двумя первыми моментами оценки.

Список литературы

- 1 Медведев Г.А. Математические основы финансовой математики. Часть 1. Мартингалный подход. – Минск: БГУ, 2003. – 287 с.
- 2 Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 447 с.
- 3 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, изд. Четвертое доп. 2011. – 217 с.
- 4 Матальцкий М.А., Романюк Т.В. Теория вероятностей в примерах и задачах. Учебное пособие для студентов математических специальностей вузов. – Гродно: ГрГУ, 2002. – 247 с.
- 5 Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 567 с.
- 6 Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – М.: Наука. 2015. – 492 с.
- 7 Смагулов Ш.С., Тастанов М.Г., Шакенов К.К. О решении трехмерной стационарной задачи фильтрации методами Монте-Карло. Вестник КазГУ, №11, Серия математика, механика, информатика. Алматы, 1998. С.150-163.

ТАСТАНОВ, М.Г., ЖАРЛЫГАСОВА, Э.З.

КЕЗДЕЙСОҚ ПРОЦЕССТЕР

Кездейсоқ процесстер теориясы – бұл олардың даму динамикасындағы кездейсоқ құбылыстардың заңдылықтарын зерттейтін математиканың бөлімі. Қоршаған әлем құбылыстарын зерттеу кезінде біз көбінесе алдын-ала болжау мүмкін емес процесстерге тап боламыз. Бұл белгісіздік (болжау мүмкін еместігі) процесстің барысына әсер ететін кездейсоқ факторлардың әсерінен туындайды. Кездейсоқ процесстер теориясы Монте-Карло әдістерінің негізі болып табылады, сондықтан бұл мақала кездейсоқ процесстер теориясынан (Марков тізбектері, кездейсоқ адасулар, біртекті Марков процесстері және т.б.) және мартингалдар теориясынан ақпараттар береді. Біз ε – бағалауды дәлелдеу үшін мартингалдар теориясын әрі қарай қолданамыз. Бастапқы есептің шешуі бір нүктеде бағаланады (Нүктеде бағалау).

Түйінді сөздер: кездейсоқ процесстер, Марков тізбектері, Марковтық болу критеріі, кездейсоқ адасу, біртекті Марков тізбектері, өту ықтималдығы, мартингалдар.

TASTANOV, M.G., ZHARLYGASSOVA, E.Z.

RANDOM PROCESSES

The theory of random processes is a branch of mathematics that studies the patterns of random phenomena in the dynamics of their development. When studying the phenomena of the surrounding world, we

often encounter processes that cannot be accurately predicted in advance. This uncertainty (unpredictability) is caused by the influence of random factors affecting the course of the process. The theory of random processes is the basis of Monte Carlo methods, therefore this article provides information from the theory of random processes (Markov chains, random walks, homogeneous Markov processes, etc.) and the theory of martingales. We will further use the theory of martingales to prove the ε -bias of estimates. The solution to the original problem will be estimated at one point (Point estimation).

Key words: random processes, Markov chains, Markovianity criterion, random walks, homogeneous Markov chains, transition probability, martingales.

Сведения об авторах:

Тастанов Мейрамбек Габдуалиевич – кандидат физико-математических наук, доцент, и.о. профессора кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.

Жарлыгасова Эльмира Закировна – магистр естественных наук, старший преподаватель кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.

Тастанов Мейрамбек Габдуалиұлы – физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, математика және физика кафедрасы профессорының м.а., Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.

Жарлыгасова Эльмира Закировна – жаратылыстану ғылымдарының магистрі, математика және физика кафедрасының аға оқытушысы, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.

Tastanov Meirambek Gabdualiyevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, acting Professor of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.

Zharlygassova Elmira Zakirovna – Master of Natural Sciences, Senior Lecturer of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.

УДК 519.245

Тастанов, М.Г.,

кандидат физико-математических наук,
и.о. профессора кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан

Нургельдина, А.Е.,

магистр естественных наук,
старший преподаватель
кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДОВ МОНТЕ-КАРЛО

Аннотация

Метод статистического моделирования основан на испытании модели множеством случайных сигналов, у которых плотность вероятности считается заданной. Целью в данном случае является определение выходных результатов. Статистическое моделирование использует метод Монте-Карло в тех случаях, когда другие методы, кроме имитации применить невозможно. Основой методов Монте-Карло является теория вероятностей

МАЗМҰНЫ

ГУМАНИТАРЛЫҚ ЖӘНЕ ӨНЕР ҒЫЛЫМДАРЫ

Безаубекова А.Д., Мәлікзада А.М., Айтқазы Ә.А. М. Мақатаев «Аққулар ұйықтағанда»
 поэмасы 3

Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Бейбітова Н.Б. Сайын Мұратбеков «Жусан иісі» повесіндегі – Аян бейнесі 10

Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Дуйсенбаева К.Е. Бердібек Соқпақбаевтың «Балалық шаққа саяхат» повесіндегі «балалық шақ» концептісі 18

Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Есенгельды Ә.Қ. Бердібек Соқпақбаевтың «Ана жүрегі» шығармасындағы бала тағдыры 23

Исова Э.А., Азимхан Д.А. Дулат Исабековтың «Ескерткіш» әңгімесінің көркемдік ерекшеліктері..... 28

Исова Э.А., Атығай Ш.С. Қошке Кеменгерұлының педагогикалық мұрасы: тіл тазалығы және білім беру әдістемесі 33

Исова Э.А., Шахметова М.А. І. Жансүгіровтің «Қолбала» поэмасының көркемдік ерекшеліктері..... 39

ЖАРАТЫЛЫСТАНУ ҒЫЛЫМДАРЫ

Брагина Т.М., Приезжих Ю.В. Қостанай облысындағы қарағайдың сабақты зиянкестері – ұзын мүйізді қоңыздарға шолу (coleoptera, cerambicadae)..... 44

Майер Ф.Ф. Яновский класының негізінде құрылған жұлдыз тәрізді функциялардың кейбір кластары туралы..... 50

Майер Ф.Ф., Хабдуллина Г.Ж. Якубовскийдің жұлдыз тәрізді функциялар класындағы Бернацкийдің интегралды операторы 56

Тастанов М.Г., Жарлыгасова Э.З. Кездейсоқ процесстер..... 64

Тастанов М.Ф., Нургельдина А.Е. Монте-Карло әдістерінің жалпы схемасы..... 74

ИНЖИНИРИНГ ЖӘНЕ ТЕХНОЛОГИЯ

Амантаев М.А., Абитов Т.А., Азбергенев Е.Т., Красильников Я.С. Дөңгелек қозғалысын кинематикалық модельдеу 87

Балтабекова И.Ж., Жунусова Г.С., Саидов А.М., Калитка Д.А. Матча шай қосылған ашытқы нан өндірісінің болашағы 92

Кравченко Р.И., Золотухин Е.А., Амантаев М.А., Караев А.К. Жеңіл автомобиль қозғалтқышын теңестіру әдісін әзірлеу..... 98

Нам Д. Генеративті адверсарлық желілерді (gan) өкпе обырының КТ суреттерін генерациялау үшін қолдану 105

Семибаламут А.В., Золотухин Е.А., Медиткали И.Е., Кушибаева Д.Р. Өртүрлі серпімділік қасиеттері бар серпімді элементтер негізінде суспензияның серпімділік сипаттамаларын бағалау..... 113

АУЫЛ ШАРУАШЫЛЫҒЫ ЖӘНЕ ВЕТЕРИНАРИЯ ҒЫЛЫМДАРЫ

Бейшов Р.С., Алитанова М.К. Жаздық бидай мен арпаның ауруларға төзімділігіне әртүрлі қорғаныш және ынталандыру қосылыстардың әсері..... 121

Бейшов Р.С., Барсакбаева М.Б. Қостанай қаласының жанармай құю станцияларында мұнай өнімдерімен ластанған топырақ микрофлорасының биоремедиациялық қалпына келтіру әлеуетін практикалық тұрғыда зерттеу 127

Бейшов Р.С., Смаилова А.И. Топырақтың ауыр металдармен ластануы және олардың өсімдіктерге әсерін зерттеу..... 136

Саидов А.М. Цифрландыру жағдайында АӨК мамандарының кәсіби құзыреттілігін дамыту: цифрлық платформа тұжырымдамасы..... 143

ӘЛЕУМЕТТІК ҒЫЛЫМДАР

<i>Абылай П.С.</i> «Математикалық логика» пәнін болашақ педагогтерге оқытудың маңыздылығы және мазмұндық ерекшеліктері	151
<i>Саидов А.М., Раисова Ж.Х.</i> Білім беру процесін трансформациялаудағы инновациялық технологиялар мен цифрландырудың рөлі.....	155
<i>Шалгимбекова К.С., Айтмағамбетов Е.Ж.</i> Колледж оқушыларының кәсіби өзін-өзі айқындауының мәні мен ерекшеліктері	162
<i>Шалгимбекова К.С., Шупотаев С.М.</i> Мектеп оқушыларының қазіргі білім беру жағдайындағы ерік қасиеттері және оның сипаттары.....	168
АВТОРЛАРДЫҢ НАЗАРЫНА	174

СОДЕРЖАНИЕ

ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ И ИСКУССТВО

Безаубекова А.Д., Маликзада А.М., Айтказы А.А. Поэма М. Макатаева «Когда спят лебеди»..... 3

Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Бейбітова Н.Б. Образ Аяна в повести Сайына Муратбекова «Запах полыни» 10

Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Дуйсенбаева К.Е. Концепция «детство» в повести Бердибека Сокпакбаева «Путешествие в детство» 18

Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Есенгельды Э.Қ. Судьба ребенка в произведении Бердибека Сокпакбаева «Материнское сердце» 23

Исова Э.А., Азимхан Д.А. Художественные особенности рассказа Дулата Исабекова «Ескерткіш»..... 28

Исова Э.А., Атыгай Ш.С. Педагогическое наследие Кошке Кеменгерулы: чистота языка и методика образования..... 33

Исова Э.А., Шахметова М.А. Художественные особенности поэмы И. Жансугурова «Қолбала» 39

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Брагина Т.М., Приезжих Ю.В. Обзор жуков усачей (coleoptera, cerambicadae) – стволовых вредителей сосны в Костанайской области..... 44

Майер Ф.Ф. О некоторых классах почти звездообразных функций, построенных на базе класса Яновского..... 50

Майер Ф.Ф., Хабдуллина Г.Ж. Интегральный оператор Бернацкого на классе звездообразных функций Якубовского..... 56

Тастанов М.Г., Жарлыгасова Э.З. Случайные процессы 64

Тастанов М.Г., Нургельдина А.Е. Общая схема методов Монте-Карло..... 74

ИНЖИНИРИНГ И ТЕХНОЛОГИИ

Амантаев М.А., Абитов Т.А., Азбергенев Е.Т., Красильников Я.С. Кинематическое моделирование движения колеса 87

Балтабекова И.Ж., Жунусова Г.С., Саидов А.М., Калитка Д.А. Перспективы производства хлеба на закваске с добавлением матча чая 92

Кравченко Р.И., Золотухин Е.А., Амантаев М.А., Караев А.К. Разработка способа балансировки движителя легкового автомобиля..... 98

Нам Д. Применение моделей ганов для генерации КТ снимков рака легкого 105

Семибаламут А.В., Золотухин Е.А., Медиткали И.Е., Кушибаева Д.Р. Оценка упругой характеристики подвески на основе эластичных элементов с различными упругими свойствами..... 113

СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ, ВЕТЕРИНАРНЫЕ НАУКИ

Бейшов Р.С., Алитанова М.К. Влияние защитно-стимулирующих составов на устойчивость к болезням яровой пшеницы и ячменя 121

Бейшов Р.С., Барсакбаева М.Б. Практическое исследование биоремедиационного восстановительного потенциала почвенной микрофлоры, загрязненной нефтепродуктами, на автозаправочных станциях г. Костанай..... 127

Бейшов Р.С., Смаилова А.И. Исследование загрязнение почвы тяжелыми металлами и их воздействие на растения..... 136

Саидов А.М. Развитие профессиональных компетенций специалистов АПК в условиях цифровизации: концепция цифровой платформы 143

СОЦИАЛЬНЫЕ НАУКИ

<i>Абылай П.С.</i> Важность и содержательные особенности преподавания предмета «математическая логика» будущим педагогам.....	151
<i>Саидов А.М., Раисова Ж.Х.</i> Роль инновационных технологий и цифровизации в трансформации образовательного процесса	155
<i>Шалгимбекова К.С., Айтмагамбетов Е.Ж.</i> Сущность и особенности профессионального самоопределения учащихся колледжа	162
<i>Шалгимбекова К.С., Шупотаев С.М.</i> Волевые качества школьников и их особенности в современных образовательных условиях	168
ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ	177

CONTENT

HUMANITIES AND ARTS

Bezaubekova A.D., Malikzada A.M., Aitkazy A.A. M. Makatayev’s poem «When swans sleep» 3
Bekbossynova A.Kh., Bekmagambetova M.Zh., Beibitova N.B. The character of Ayan in Saiyn Muratbekov’s story «The Scent of the Wormwood» 10
Bekbossynova A.Kh., Bekmagambetova M.Zh., Duissenbayeva K.Y. The concept of childhood in Berdibek Sokpakbayev's novel «Journey to Childhood» 18
Bekbossynova A.Kh., Bekmagambetova M.Zh., Yessengeldy E.K. The fate of a child in Berdibek Sokpakbayev's novel «A Mother's Heart» 23
Isova E.A., Azimkhan D.A. Artistic features of Dulat Issabekov’s story «Yeskertkish» 28
Isova E.A., Atygay Sh.S. Koshke Kemengeruly’s pedagogical heritage: language purity and teaching methodology 33
Isova E.A., Shakhmetova M.A. Artistic features of I. Zhansugurov's poem «Kolbala» 39

NATURAL SCIENCES

Bragina T. M., Priezzhikh, Yu.V. Review of longicorn beetles (coleoptera, cerambicadae) – stem pests of pine in Kostanay region 44
Mayer F.F. On some classes of close-to-starlike functions based on the Yanovskiy class 50
Mayer F.F., Khabdullina G.Zh. Bernatskiy integral operator on the class of Yakubovskiy starlike functions 56
Tastanov M.G., Zharlygassova E.Z. Random processes 64
Tastanov M.G., Nurgeldina A.Y. Monte Carlo methods design scheme 74

ENGINEERING AND TECHNOLOGY

Amantayev M.A., Abitov T.A., Azbergenov Y.T., Krasilnikov Ya.S. Kinematic modelling of wheel movement 87
Baltabekova I.Zh., Zhunussova G.S., Saidov A.M., Kalitka D.A. Prospects of matcha sourdough bread production 92
Kravchenko R.I., Zolotukhin Y.A., Amantayev M.A., Karayev A.K. Development of a method for balancing a passenger car propeller unit 98
Nam D. Application of generative adversarial neural networks for lung cancer CT image segmentation 105
Semibalamut A.V., Zolotukhin Y.A., Meditkali I.Y., Kushibayeva D.R. Evaluation of the elastic characteristics of a suspension based on elastic elements with different elastic properties 113

AGRICULTURAL, VETERINARY SCIENCES

Beishov R.S., Alitanova M.K. The effect of protective and stimulating compounds on disease resistance of spring wheat and barley 121
Beishov R.S., Barsakbayeva M.B. Empirical research of bioremediation recovery potential of soil microflora contaminated with oil products at gas stations in Kostanay 127
Beishov R.S., Smailova A.I. Research of soil pollution by heavy metals and their effects on plants 136
Saidov A.M. Development of professional competences of agro-industrial specialists in the context of digitalization: the concept of a digital platform 143

SOCIAL SCIENCES

Abylay P.S. The importance and key content-specific features of teaching the subject "mathematical logic" to future educators 151
Saidov A.M., Raissova Zh.Kh. The role of innovative technologies and digitalization in the educational process transformation 155

<i>Shalgimbekova K.S., Aitmagambetov Y.Z.</i> The essence and features of professional self-determination of college students	162
<i>Shalgimbekova K.S., Shalgimbekova K.S.</i> Volitional qualities of schoolchildren and their characteristics in modern educational conditions	168
INFORMATION FOR AUTHORS	180

Редактор, корректор: *А. Симонова*
Корректорлар: *Б. Сыздыкова, Т. Цай*
Компьютерлік беттеу: *С. Красикова*

Редактор, корректор: *А. Симонова*
Корректоры: *Б. Сыздыкова, Т. Цай*
Компьютерная верстка: *С. Красикова*

Басуға 15.01.2025 ж. берілді.
Пішімі 60x84/8. Көлемі 14,1 б.т.
Тапсырыс № 003

Подписано в печать 15.01.2025 г.
Формат 60x84/8. Объем 14,1 п.л.
Заказ № 003

Ахмете Байтұрсынұлы атындағы
Қостанай өңірлік университетіндегі
редакциялық-баспа бөлімінде басылған
Қостанай қ., Байтұрсынов к., 47

Отпечатано в редакционно-издательском отделе
Костанайского регионального университета
имени Ахмет Байтұрсынұлы
г. Костанай, ул. Байтұрсынова, 47