BU

BAITURSYNULY UNIVERSITY

ISSN 2310-3353

«АХМЕТ БАЙТҰРСЫНҰЛЫ АТЫНДАҒЫ ҚОСТАНАЙ ӨҢІРЛІК УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

ҚМПИ ЖАРШЫСЫ

КӨПСАЛАЛЫ ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ

МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

№ 1

2025

PUBLISHINGS KSPI	BU BAITURSYNULY UNIVERSITY	ҚМПИ ЖАРШЫСЫ	ВЕСТНИК КГПИ

2025 ж., қаңтар, №1 (77)
Журнал 2005 ж. қаңтардан бастап шығады
Жылына төрт рет шығады

Құрылтайшы: ***Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті***

Тіркеу туралы куәлік №5452-Ж
Қазақстан Республикасының ақпарат министрлігімен 17.09.2004 берілген.
Мерзімді баспа басылымын қайта есепке алу 07.11.2023 ж.
Жазылу бойынша индексі 74081

Редакцияның мекен-жайы:
110000, Қостанай қ., Байтұрсынов к., 47
(Редакциялық-баспа бөлімі)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

КӨПСАЛАЛЫ ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ | № 1 (77) 2025 | МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

№1 (77), январь 2025 г.
Издается с января 2005 года
Выходит 4 раза в год

Учредитель: ***Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы***

Свидетельство о регистрации № 5452-Ж
выдано Министерством информации Республики Казахстан 17.09.2004 г.
Переучёт периодического печатного издания 07.11.2023 г.
Подписной индекс 74081

Адрес редакции:
110000, г. Костанай, ул. Байтурсынова, 47
(Редакционно-издательский отдел)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

or investigate the range of values for the parameters involved in the operator. These parameters determine whether the operator maps the class S of univalent functions (or its subclasses) onto itself or into other subclasses.

In this article, we study the set of values of the real exponent, in which the Bernatskiy integral operator displays a class of starlike Yanovskiy functions in the unit circle having a decomposition of the form $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \cdots, z \in E, n \geq 1,$ *and satisfying the condition* $\left|z\frac{f'(z)}{f(z)} - a\right| \leq b$ *in the class* $K(\gamma)$ *of functions close-to-convex of order* γ*, or, in particular, in the class* S^0 *of convex functions. Distortion and rotation theorems for the Bernatskiy integral on the class of Yanovskiy starlike functions are also obtained. The results of the article summarize or enhance previously known results.*

Keywords: *univalent functions, Bernatskiy integral operator, convex functions, starlike functions, close-to convex functions.*

Сведения об авторах:

Майер Федор Федорович *– кандидат физико-математических наук, доцент, и.о. профессора кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.*

Хабдуллина Гульнара Жумабековна *– магистр математики, старший преподаватель, кафедра математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.*

Майер Федор Федорович *– физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, математика және физика кафедрасы профессорының м.а., Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.*

Хабдуллина Гульнара Жумабековна *– математика магистрі, математика және физика кафедрасының аға оқытушы, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.*

Mayer Fyodor Fyodorovich *– Candidate of Physical and Mathematical Sciences, acting Professor of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.*

Khabdullina Gulnara Zhumabekovna *– Master of Mathematics, Senior Lecturer of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.*

УДК 519.245

Тастанов, М.Г.,
кандидат физико-математических наук,
и.о. профессора кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан
Жарлыгасова, Э.З.,
магистр естественных наук,
старший преподаватель
кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Аннотация

Теорией случайных процессов называется раздел математики, который изучает закономерности случайных явлений в динамике их развития. При *изучении явлений окружающего мира мы часто сталкиваемся с процессами, течение которых заранее предсказать в точности невозможно. Эта неопределенность (непредсказуемость) вызвана влиянием случайных факторов, воздействующих на ход процесса. Теория случайных процессов является основой методов Монте-Карло, поэтому в данной статье приведены сведения из теории случайных процессов (цепи Маркова, случайные блуждания, однородные марковские процессы и др.) и теории мартингалов. Теорию мартингалов мы в дальнейшем будем использовать для доказательства $\varepsilon -$ смещенности оценок. Решение исходной задачи будет оцениваться в одной точке (точечное оценивание).*

Ключевые слова: *случайные процессы, цепи Маркова, критерий марковости, случайные блуждания, однородные цепи Маркова, вероятность перехода, мартингалы.*

1 Введение

При изучении различных явлений, событий действителности мы сталкиваемся с процессами, предсказать дальнейшее развитие которых заранее мы не можем. Случайные процессы – удобная математическая модель функций времени, значениями которых являются случайные величины. Первое математическое описание случайного процесса, называемого в настоящее время винеровским или процессом броуновского движения было дано Л. Башалье в докладе в Парижской академии [1]. Он предложил использовать этот процесс в качестве модели колебаний цены активов, стремился получить аналитические выражения для стоимости различных типов опционов и сравнить их с наблюдаемыми рыночными ценами опционов. Опцион является примером финансовой производной и дает его владельцу право купить указанное число долей акций по определенной цене в указанную дату или до нее.

То, что теория случайных процессов принадлежит к категории наиболее быстро развивающихся математических дисциплин, в значительной мере определяется ее глубокими связями с практикой [2]. В 1905 году двумя известными физиками, М. Смолуховским и А. Эйнштейном, была разработана теория броунсовского движения, исходящая из теоретико-вероятностных предпосылок, которая и привела математику к порогу создания теории случайных процессов. Работы датчанина А.К. Эрланга оказали значительное влияние на формирование элементов теории случайных процессов, в частности, процессов гибели и размножения, которые положили начало изучения динамики биологических популяций. Изучение явления диффузии средствами теории вероятностей предприняли известные физики М. Планк и А. Фоккер. Н. Винер в середине 20-х годов прошлого века при иизучении броуновского движения ввел в рассмотрение процессы, названные винеровскими. Необходимо также отметить работы А.А. Маркова по изучению цепных зависимостей (цепи Маркова) и Е.Е. Слуцкого по теории случайных функций. А.Н. Колмогоров в статье «Об аналитических методах в теории вероятностей» заложил основы теории марковских процессов: в ней получены прямые и обратные дифференциальные уравнения, которые управляют вероятностями перехода случайных процессов без последствия. Здесь же был дан набросок теории скачкообразных процессов без последствия, которую дал позднее В. Феллер, получивший интегро-дифференциальное уравнение для для скачкообразных марковских процессов. В работах А.Я. Хинчина было осуществлено построение основ стационарных случайных процессов на базе физических задач. Вышеупомянутые работы послужили началом построения общей теории случайных процессов.

2 Материалы и методы

Определим основные задачи теории случайных процессов, большинство из которых мы в дальнейшем будем рассматривать.

Одной из основных задач является построение математической модели, допускающее строгое или формальное определение случайного процесса и исследование общих свойств этой модели.

Важной задачей является классификация случайных процессов. Существующая классификация в теории случайных процессов заключается в выделении из всей совокупности таких процессов некоторых классов, допускающих более или менее конструктивное описание [2]. Каждый класс характеризуется тем, что достаточно дополнительно задать лишь конечное число функциональных характеристик, чтобы выделить из всего класса отдельный случайный процесс. Иногда рассматривают классы процессов, допускающих единообразное решение определенного набора задач. Можно отметить следующие широкие классы процессов:

- марковские процессы, включая, естественно, цепи Маркова;
- процессы с конечными моментами второго порядка (гильбертово процессы);
- процессы с независимыми приращениями;
- стационарные в узком и широком смыслах случайные процессы, в частности, гауссовский и винеровский процессы;
- эргодические процессы.

Задачи отыскания для различных классов случайных процессов аналитического аппарата, дающего возможность находить вероятность характеристики процессов, тесно связаны с предыдущей. Для простейших вероятностных характеристик такой аппарат создан и использует, как правило, теорию обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, а также интегро-дифференциальные и интегральные уравнения, разностные уравнения, преобразования Фурье. Изучение различных преобразований случайных процессов также является важной задачей теории случайных процессов. Эти преобразования используются для того, чтобы с их помощью изучать сложные процессы путем сведения их к более простым. К такой задаче можно отнести и анализ стохастических дифференциальных и интегральных уравнений, в которые входят случайные процессы. Задачи определения значений некоторого функционала от процесса по значениям других функционалов от этого же процесса играет также важную роль в формировании ряда разделов теории случайных процессов. Примером такой задачи является задача предсказания, позволяющая определить значение процесса в некоторые будущие моменты времени, наблюдая процесс в течение определенного промежутка времени.

3-4 Результаты и обсуждение

Цепи Маркова. Одним из наиболее важных обобщений понятия последовательности независимых случайных величин является понятие последовательности величин, связанных в цепь Маркова [3].

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P). Измеримое отображение ζ:(Ω, F) → (X, B), где (X, B) – некоторое измеримое пространство, называется случайным элементом в (X, B).

Последовательность $\{\xi_n, n = 0,1,2,...\}$ случайных элементов в измеримом пространстве (X, B) называется цепью Маркова, если для любых $\Gamma \in B$ и $n = 1,2,..$. с вероятностью 1

$$\mathrm{P}\{\xi_n \in \Gamma \xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1}\} = \mathrm{P}\{\xi_n \in \Gamma \xi_{n-1}\}$$

Пространство (X, B) называется фазовым пространством цепи.

Всякую последовательность (случайных или неслучайных) элементов $\{\xi_n, n = 0,1,2,...\}$ пространства (X, B) можно рассматривать как движение некоторой системы (точки, частицы) в фазовом пространстве: из начального состояния ξ_0 в момент времени 1 система переходит в состояние ξ_1, затем в момент времени 2 – в состояние ξ_2 и т.д. Понятие цепи Маркова, таким образом, выделяет из совокупности всевозможных движущихся систем так называемые системы без последствия, или системы с отсутствием памяти. В детерминированном случае это те системы, для которых состояние в момент времени nоднозначно определяется состоянием этой системы в момент времени $n - 1$, независимо от того, каким было движение до этого момента. В отличие от детерминированных стохастические системы без последствия обладают тем свойством, что по состоянию системы в момент времени $n - 1$

однозначно определяется не состояние системы в момент времени n, а лишь вероятность, с какой она в этот момент времени находится в том или ином множестве состояний.

Пример. Последовательность независимых случайных элементов $\{\xi_n, n = 0,1,2,\dots\}$ образует цепь Маркова, так как

$$\mathrm{P}\{\xi_n \in \Gamma\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\} = \mathrm{P}\{\xi_n \in \Gamma\xi_{n-1}\} = \mathrm{P}\{\xi_n \in \Gamma\}.$$

Случайные блуждания. Пусть X – аддитивная коммутативная группа и B – некоторая σ -алгебра подмножеств X, согласованная с операцией сложения в X, то есть если $\Gamma \in B$, то $\Gamma + \mathrm{x} = \{x + z, z \in \Gamma\} \in B$ при любом $x \in X$. Предположим, что задана последовательность независимых случайных элементов $\{\eta_n, n = 0,1,2,\dots\}$ в (X, B). Тогда последовательность $\{\xi_n = \eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_n, n = 0,1,2,\dots\}$ является цепью Маркова в фазовом пространстве (X, B), так как для всех $\Gamma \in B$ и $n = 1,2,\dots$

$$P\{\xi_n \in \Gamma|\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\} = P\{\xi_{n-1} + \eta_n \in \Gamma|\xi_{n-1}\}.$$

Такая цепь называется случайным блужданием в X [4] – [6].

Критерий марковости. Пусть задана последовательность $\{\xi_n, n = 0,1,2,\dots\}$ случайных элементов в измеримом пространстве (X, B) (вероятностное пространство (Ω, F, P) считается фиксированным). Обозначим через F_nминимальную σ-алгебру событий, относительно которой измеримы случайные элементы $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$, а через F^n – минимальную σ-алгебру событий, относительно которой измеримы случайные элементы $\xi_n, \xi_{n+1}, \dots$. Иначе говоря, F_n σ-алгебра всех событий, связанных с эволюцией последовательности до момента nвключительно, а F^n – σ-алгебра всех событий, связанных с эволюцией последовательности после момента n, включая сам момент времени n. σ-алгебра F_n порождается событиями вида $\{\xi_k \in \Gamma\}$ при всех $k = 0,1,2,\dots,n$, $\Gamma \in F$. Аналогично σ-алгебра F^n порождается событиями $\{\xi_k \in \Gamma\}$при $k \geq n$, $\Gamma \in F$.

Определение цепи Маркова означает, таким образом, что для всех $n = 0,1,2,\dots$ и $\Gamma \subset F$ с вероятностью 1

$$P\{\xi_{n+1} \in \Gamma|F_n\} = P\{\xi_{n+1} \in \Gamma|\xi_n\}$$

Теорема. Пусть $(\xi_n, n = 0,1,2,\dots)$ – последовательность случайных элементов в измеримом пространстве (X, B). Следующие утверждения эквивалентны:

1) последовательность $(\xi_n, n = 0,1,2,\dots)$ является цепью Маркова;
2) для всех $n = 0,1,2,\dots$, $m = 1,2,\dots$, $\Gamma \in F$с вероятностью 1
$$P\{\xi_{n+m} \in \Gamma|F_n\} = P\{\xi_{n+m} \in \Gamma|\xi_n\};$$
3) для любых $A \in F_{n-1}$, $B \in F^{n+1}$ $(n = 1,2,\dots)$ с вероятностью 1
$$P\{A \cap B|\xi_n\} = P\{A|\xi_n\}P\{B|\xi_n\};$$
4) для любой ограниченной F^{n+1} – измеримой случайной величины η с вероятностью 1 $M\{\eta|\xi_n\} = M\{\eta|\xi_n\}$.

Если считать момент времени n «настоящим», то тогда F_{n-1} – это «прошлое», а F^{n+1} – «будущее». Утверждение 3) означает, что для цепи Маркова при известном «настоящем» «прошлое» и «будущее» условно независимы.

Уравнения Колмогорова-Чепмена. Пусть $\{\xi_n, n = 0,1,2,\dots\}$ – цепь Маркова в фазовом пространстве (X, B) и $0 \leq k < m < n$. Тогда в силу свойств условных вероятностей и марковского свойства имеем с вероятностью 1

$$P\{\xi_n \in \Gamma|\xi_k\} = M\{P\{\xi_n \in \Gamma|\xi_m\}|\xi_k\}.$$

Это соотношение называется уравнением Колмогорова-Чепмена и является фактически следствием формулы полной вероятности и марковского свойства.

Рассмотрим условную вероятность $P\{\xi_n \in \Gamma|\xi_k\}$ $(0 \leq k < n, \Gamma \in B)$. При фиксированных $k, n,$ Гэта вероятность представляет собой B – измеримую функцию от ξ_k. Вообще говоря, нельзя утверждать, что при фиксированных k, n, ω функция $P\{\xi_n \in \Gamma|\xi_k\}$ является мерой на B.

В самом деле, из свойств условных вероятностей следует, что для каждой последовательности $\{\Gamma_r, r = 1,2,\dots\}$ непересекающихся множеств из σ-алгебры Bс вероятностью 1 выполнено

$$P\{\xi_n \in \cup_{r=1}^{\infty} \Gamma_r | \xi_k\} = \sum_{r=1}^{\infty} P\{\xi_n \in \Gamma_r | \xi_k\}.$$

При этом множество тех ω, для которых это равенство не имеет места, зависит от последовательности $\{\Gamma_r, r = 1,2,\dots\}$. Для другой последовательности это исключительное множество будет другим, и поэтому нельзя утверждать, что для почти всех ω условная вероятность $P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_k\}$ является мерой на B. Тем не менее во многих случаях такое утверждение справедливо. Именно, если X – полное метрическое X, то существует такая функция $P(k, x, n, \Gamma)$, $0 \le k < n$, $x \in X$, $\Gamma \in$ B, что при каждых k, n и Гс вероятностью 1

$$P\{\xi_n \in \Gamma / \xi_k\} = P(k, \xi_k, n, \Gamma),$$

и при этом $P(k, x, n, \Gamma)$ B – измерима при фиксированных k, n, Г, а при фиксированных k, x, n – это вероятностная мера на B. Очевидно, при $k = n$ должно быть $P(n, x, n, \Gamma) = \chi_\Gamma(\mathrm{x})$, где $\chi_\Gamma(\mathrm{x})$ – индикатор множества Г.

Если для данной цепи $(\xi_n, n = 0,1,2,\dots)$ в пространстве (X, B) такая функция $P(k, x, n, \Gamma)$ существует, то она называется вероятностью перехода. В терминах вероятностей перехода уравнение Колмогорова-Чепмена может быть записано так:

$$P(k, \xi_k, n, \Gamma) = \int_X P(m, y, n, \Gamma) P(k, \xi_k, m, dy).$$

Это равенство выполняется с вероятностью 1. Во многих случаях выполняется более сильное равенство

$$P(k, x, n, \Gamma) = \int_X P(m, y, n, \Gamma) P(k, x, m, dy)$$

для всех $0 \le k \le m \le n$, $x \in X$, $\Gamma \in$ B, которое также называется уравнением Колмогорова-Чепмена для вероятностей перехода. Вероятность перехода $P(k, x, n, \Gamma)$ можно интерпретировать как условную вероятность

$$P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_k = x\}$$

Заметим, что условные вероятности вида $P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_k = x\}$ для данной случайной последовательности $\{\xi_n, n = 0,1,2,\dots\}$ могут удовлетворять уравнению Колмогорова-Чепмена без того, чтобы эта последовательность была цепью Маркова.

Построение цепи Маркова по вероятности перехода. Пусть (X, B) – некоторое измеримое пространство. Предположим, что для всех $x \in X$, $\Gamma \in B$ и целых k, n таких, что $0 \le k < n$, задана числовая функция $P(k, x, n, \Gamma)$, удовлетворяющая условиям:

а) при фиксированных k, n, Гона B – измерима;

б) при фиксированных k, x, n она является вероятностной мерой на B;

в) для всех $0 \le k < m < n$, $x \in X$и $\Gamma \in$ Ввыполнено соотношение

$$P(k, x, n, \Gamma) = \int_X P(k, x, m, dy) P(m, y, n, \Gamma).$$

Спрашивается, существует ли на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) цепь Маркова $\{\xi_n, n = 0,1,2,\dots\}$, для которой $P(k, x, n, \Gamma)$ была бы вероятностью перехода, т.е. с вероятностью 1

$$P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_k\} = P(k, \xi_k, n, \Gamma).$$

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Если функция $P(k, x, n, \Gamma)$ удовлетворяет условиям а)-в), то существует вероятностное пространство (Ω, F, P) и последовательность $\{\xi_n, n = 0,1,2,\dots\}$ случайных элементов из (X, B) такие, что последовательность $\{\xi_n, n = 0,1,2,\dots\}$ является цепью Маркова с вероятностью перехода $P(k, x, n, \Gamma)$.

Указанное вероятностное пространство может быть построено следующим образом. Положим $\Omega = X^\infty$, $F = B^\infty$. Это означает, что элементами множества Ω являются всевозможные последовательности вида $\omega = (x_0, x_1, x_2, \dots)$, где $x_i \in X$, а F – минимальная σ-алгебра подмножеств Ω, содержащая все множества вида

$$\{\omega: x_0 \in \Gamma_1, \dots, x_n \in \Gamma_n\} \tag{1}$$

при всевозможных $n = 0,1,2,\dots$, $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots \Gamma_n \in B$.

Далее, пусть μ – произвольная вероятностная мера на B. На множествах вида (1) зададим числовую функцию P формулой

$P\{\omega: x_0 \in \Gamma_1, \dots, x_n \in \Gamma_n\} = \int_{\Gamma_0} \mu(dx_0) \int_{\Gamma_1} P(0, x_0, 1, dx_1) \int_{\Gamma_2} P(1, x_1, 2, dx_2) \dots \int_{\Gamma_n} P(n - 1, x_{n-1}, n, dx_n)$

$$P\{\omega: x_0 \in \Gamma_1, \dots, x_n \in \Gamma_n\} = \int_{\Gamma_0} \mu(dx_0) \int_{\Gamma_1} P(0, x_0, 1, dx_1) \int_{\Gamma_2} P(1, x_1, 2, dx_2) \dots \int_{\Gamma_n} P(n - 1, x_{n-1}, n, dx_n)$$

$$P\{\omega: x_0 \in \Gamma_1, \dots, x_n \in \Gamma_n\} = \int_{\Gamma_0} \mu(dx_0) \int_{\Gamma_1} P(0, x_0, 1, dx_1) \int_{\Gamma_2} P(1, x_1, 2, dx_2) \dots \int_{\Gamma_n} P(n - 1, x_{n-1}, n, dx_n)$$

Эта функция продолжается до вероятностной меры P на измеримом пространстве (Ω, F). Положим для $n = 0,1,2, \dots \xi_n = \xi_n(\omega) = x_n$, если $\omega = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ Тогда на вероятностном пространстве (Ω, F, P) последовательность $\{\xi_n, n = 0,1,2, \dots\}$ случайных элементов в (X, B) образует цепь Маркова, для которой заданная функция $P(k, x, n, \Gamma)$ является вероятностью перехода. При этом начальное состояние ξ_0 имеет распределение μ, называемое начальным распределением цепи.

По функции $P(k, x, n, \Gamma)$ цепь Маркова может быть построена неоднозначно: имеется произвол в выборе вероятностного пространства и начального распределения. Однако, если для двух цепей в одном и том же фазовом пространстве $\{\xi_n, n = 0,1,2, \dots\}$, заданной на вероятностном пространстве (Ω, F, P) и $\{\xi'_n, n = 0,1,2, \dots\}$, заданной на вероятностном пространстве (Ω', F', P'), – совпадают вероятности перехода и начальные распределения, то такие цепи стохастически эквивалентны в том смысле, что для любых $n = 0,1,2, \dots$ и произвольного набора $\{\Gamma_i, i = 0,1,2, \dots, n\}$ измеримых множеств из фазового пространства выполнено

$$\mathrm{P}\{\xi_0 \in \Gamma_0, \xi_1 \in \Gamma_1, \dots, \xi_n \in \Gamma_n\} = \mathrm{P}'\{\xi'_0 \in \Gamma_0, \xi'_1 \in \Gamma_1, \dots, \xi'_n \in \Gamma_n\}.$$

Это означает, что цепь Маркова в указанном смысле однозначно определяется своей вероятностью перехода и начальным распределением.

Однородные цепи Маркова. Определение однородной цепи Маркова. Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P). Цепь Маркова $\{\xi_n, n = 0,1,2, \dots\}$ в фазовом пространстве (X, B) с вероятностью перехода $P(k, x, n, \Gamma)$ называется однородной, если $P(k, x, n, \Gamma)$ представляет собой функцию от $x \in X$, $\Gamma \in B$ и $n - k$, $0 \le k < n$. Обозначим через $P(n, x, \Gamma)$, $n > 0$, $x \in X$, $\Gamma \in B$, функцию, для которой $P(k, x, n, \Gamma) = P(n - k, x, \Gamma)$. При $n = 0$естественно положит $P(0, x, \Gamma) = \chi_r(x)$. Функция $P(n, \mathrm{x}, \Gamma)$ называется вероятностью перехода однородной цепи. Она удовлетворяет условиям:

а) при фиксированных n и Γ, $n = 0,1,2, \dots$, $\Gamma \in B$ функция $P(n, x, \Gamma)$ B – измерима;

б) при фиксированных n и x, $n = 1,2, \dots$, $x \in X$ функция $P(n, \mathrm{x}, \Gamma)$ является вероятностной мерой на B;

б*) при всех $0 \le k < m < n$ и $\Gamma \in B$ с вероятностью 1 выполнено соотношение

$$P(n - k, \xi_k, \Gamma) = \int_X P(n - m, y, \Gamma) \cdot P(m - k, \xi_k, dy)$$

Ниже всюду будет предполагаться, что вероятность перехода однородной цепи Маркова удовлетворяет условиям а) и б) и следующему, несколько сильному, чем б*) условию:

в) при всех выполнено соотношение

$$P(m + n, x, \Gamma) = \int_X P(m, x, dy)\, P(n, y, \Gamma)$$

называемое уравнением Колмогорова-Чепмена.

Положим $P(x, \Gamma) = P(1, x, \Gamma)$. Функция $P(x, \Gamma)$ называется вероятностью перехода за один шаг. Из уравнения Колмогорова-Чепмена следует, что вероятность перехода за n шагов, то есть функция $P(n, \mathrm{x}, \Gamma)$, выражается через $P(x, \Gamma)$ при помощи рекуррентных соотношений

$$P(n+1, \mathrm{x}, \Gamma) = \int_X P(n, y, \Gamma) \cdot P(\mathrm{x}, dy) = \int_X P(y, \Gamma) \cdot P(n, \mathrm{x}, dy),$$
$$n = 1,2, \ldots$$

Поэтому, зная начальное распределение μоднородной цепи (т.е. меру $\mu(\Gamma) = P\{\xi_0 \in \Gamma\}$, $\Gamma \in B$) и вероятность перехода за один шаг, можно в принципе определить вероятность произвольного события, связанного с эволюцией рассматриваемой цепи, т.е. произвольного события из σ-алгебры F^0, порожденной элементами $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$. Именно для событий вида

$$\mathrm{A} = \{\xi_0 \in \Gamma_0, \xi_1 \in \Gamma_1, \ldots, \xi_n \in \Gamma_n\}, \{\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in B\}, n = 0,1,2, \ldots$$

имеем

$$P(A) = \int_{\Gamma_0} \mu(dx_0) \cdot \int_{\Gamma_1} P(x_0, dx_1) \ldots \int_{\Gamma_{n-1}} P(x_{n-2}, dx_{n-1}) \cdot P(x_{n-1}, \Gamma_n)$$

Так как события указанного вида образуют алгебру, а F^0 – минимальная σ-алгебра, порожденная этой алгеброй, то вероятность произвольного события из F^0 однозначно восстанавливается по вероятностям всевозможных событий типа события А.

Отсюда следует, что все однородные цепи Маркова в одном и том же фазовом пространстве (возможно, на разных вероятностных пространствах), у которых совпадают начальные распределения и вероятности перехода на один шаг, стохастически эквивалентны. Это означает, что вероятности событий типа события А для всех таких цепей одни и те же.

Вероятность перехода за один шаг $P(x, \Gamma)$,$x \in X$,$\Gamma \in B$ удовлетворяет условиям:

1) при фиксированном $\Gamma \in B$ функция $P(x, \Gamma)$ В-измерима по x;

2) при фиксированном $x \in X$ она является вероятностной мерой на В.

Если на некотором измеримом пространстве (X, B) задана функция $P(x, \Gamma)$, $x \in X$, $\Gamma \in B$ удовлетворяющая условиям 1) и 2), то можно построить однородную цепь Маркова, для которой эта функция была бы вероятностью перехода за один шаг. Разумеется, с заданной вероятностью перехода за один шаг существует не одна цепь. Однако, все они отличаются друг от друга (с точностью до стохастической эквивалентности) лишь начальным распределением.

Пример. Вероятностное представление решения задачи Дирихле. Пусть $P(x, \Gamma)$ – вероятность перехода за один шаг некоторой однородной цепи Маркова в фазовом пространстве (X, B); В-измеримую вещественную функцию $f(x)$, заданную на X, назовем гармонической на множестве $\Gamma \in B$, если для всех $x \in \Gamma$ выполнено равенство $f(x) = Pf(x)$.

Следующая задача является аналогом задачи Дирихле из теории дифференциальных уравнений.

Пусть заданы множество $D \in B$и определена на множестве $X \backslash D$ вещественная В-измеримая функция $g(x)$. Требуется найти такую В-измеримую функцию $f(x)$, чтобы на множестве Dона была гармонической, а вне Dсовпадала с заданной функцией $g(x)$.

Запишем решение такой задачи в вероятностных терминах. Пусть τ – момент первого попадания во множество $X \backslash D$ для цепи Маркова с вероятностью перехода за один шаг $P(x, \Gamma)$: $\tau = inf\{n: n \geq 0, \xi_n \notin D\}$, причем, если для некоторого $\omega \xi_n(\omega) \in D$ для всех $n = 0,1,2, \ldots$, то полагаем $\tau(\omega) = +\infty$. Для всех $x \in X$положим $f(x) = M_x g(\xi_\tau)$. При этом, если $\tau = +\infty$, то считаем $g(\xi_\tau) = 0$; для $x \notin D$ $f(x) = g(x)$. Нетрудно проверить также, что $f(x)$ гармонична на множестве D.

Решение такой задачи не единственно.

Цепи Маркова с дискретным множеством состояний. Матрицы вероятностей перехода. Рассмотрим однородные цепи Маркова (ξ_n, P_x) в фазовом пространстве (X, B) в предположении, что Xсчетно или конечно, а $B - \sigma$-алгебра всех подмножеств X. Такие цепи определяются вероятностями перехода за один шаг в одноточечные множества $P\left(x, y\right) = P_x\left\{\xi_1 = y / \xi_0 = x\right\}$ $(x, y \in X)$, ибо для произвольного $\Gamma \subset$ Химеем $P(x, \Gamma) =$

$P_x\{\xi_1 \in \Gamma\} = \sum_{y\in\Gamma} P(x,y)$. Числа $P(x,y)$ $(x,y \in X)$ образуют матрицу P, возможно бесконечную, в x-й строке которой расположены вероятности перехода за один шаг из состояния x во всевозможные состояния $y \in X$, а y-м столбце – вероятности перехода за один шаг из всевозможных состояний $x \in X$ в состояние y. Элементы матрицы P неотрицательны, и сумма их по строке равна 1. Такие матрицы называются стохастическими. Каждая стохастическая матрица определяет единственную с точностью до эквивалентности однородную цепь Маркова, для которой вероятности перехода за один шаг совпадают с элементами этой матрицы.

Вероятности перехода за n шагов $P(n,x,y)$также образуют стохастическую матрицу, и она равна n-й степени матрицы P, как это следует из уравнения Колмогорова-Чепмена:

$$P(n,x,y) = \sum_{z_1,\dots,z_{n-1}\in X} P(x,z_1)\,P(z_1,z_2)\dots P(z_{n-1},y),$$

где $x,y \in X$, $n = 2,3,\dots$. При $n = 0$естественно считать функцию $P(0,x,y) = 1$для $x = y$ и $P(0,x,y) = 0$ для $x \neq y$ так что вероятности перехода за 0 шагов образует единичную матрицу I.

В случае, когда X конечно, для вероятностей перехода за n шагов справедлива следующая формула:

$$P(n,x,y) = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{(m_k-1)!} \cdot \frac{d^{m_k-1}}{d\lambda^{m_k-1}} \left[\frac{\lambda^n M_{xy}(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_k}, \qquad (2)$$

где $n = 0,1,2,\dots;$ $x,y \in X;$ $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r$ – различные корни уравнения $det(\lambda I - P) = 0$; $m_1,m_2,\dots,m_r$ – их краткости соответственно; $M_{xy}(\lambda)$ – алгебраическое дополнение элемента y-й строки и x-го столбца матрицы $\lambda I - P$, $\psi_k(\lambda) = (\lambda-\lambda_k)^{-m_k}\, det(\lambda I - P)$.

Мартингалы. Определения. Общие свойства. Мартингалы и полумартингалы образуют важный класс процессов, обобщающий процессы с независимыми приращениями. Он включает в себя широкий класс процессов – марковские процессы, решения стохастических уравнений, управляемые случайные процессы и др. Разработана специальная «мартингальная» техника изучения случайных процессов.

Пусть $\{\Omega, \mathrm{C}, \mathrm{P}\}$ – полное вероятностное пространство, на котором задан поток σ-алгебр $(Ft)_{t\in T}$, где T – некоторое подмножество вещественной прямой R. Это означает, что F_t монотонно зависит от t: при $t_1 < t_2, t_1, t_2 \in T$ будет $F_{t_1} \subset F_{t_2} \subset C$.

Семейство вещественных величин $\xi(t)(t \in T)$ называется мартингалом, если $\forall t \in TM|\xi(t)| < \infty$ и

$$M\big(\xi(t_2)|F_{t_1}\big) \leq \xi(t_1), t_1 < t_2, t_1, t_2 \in T \qquad (3)$$

Семейство случайных величин $\xi(t)(t \in T)$ называется супермартингалом, если $\forall t M\xi^-(t) = \frac{1}{2}M(|\xi(t)| - \xi(t)) < \infty$ и,

$$M\big(\xi(t_2)|F_{t_1}\big) \leq \xi(t_1), t_1 < t_2, t_1, t_2 \in T. \qquad (4)$$

Семейство случайных величин $\xi(t)(t \in T)$ называется субмартингалом, если $-\xi(t)$ является суперматрингалом. Мартингал явояется одновременно и суперматрингалом, и субматрингалом; верно и обратное: если $\xi(t)(t \in T)$ является суперматингалом, и субмартингалом одновременно, то $\xi(t)$ – мартингал. Термины «мартингал», «субмартингал», «супермартингал» относятся также и к случайным процессам. Более точно, называя процесс мартингалом (супермартингалом), следует указывать поток, относительно которого свойства (3) или (4) выполнены. Поэтому используется также термин «$(F_t)_{t\in T}$-мартингал» («супермартингал»). Иногда термин «мартингал» относят к процессам, для которых (3) выполнено для потока, порождаемого самим процессом $\xi(t)$, т.е. когда $F_t = \sigma(\xi(s), s \leq t, s \in T)$ – наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы все указанные в скобках величины.

В дальнейшем относительно σ-алгебр F_t, будет предполагаться, что они содержат все множества Р – меры нуль. Тогда всякая модификация мартингала (супермартингала) также будет мартингалом (супермартингалом) относительно того же потока.

Вместо свойств (3), (4) и аналогичного свойства субмартингала можно использовать интегральные неравенства:

$$\int_A \xi(t_2)P(d\omega) \le \int_A \xi(t_1)P(d\omega) \qquad \text{(супермартингал)},$$
$$\int_A \xi(t_2)P(d\omega) = \int_A \xi(t_1)P(d\omega) \qquad \text{(мартингал)}, \qquad (5)$$
$$\int_A \xi(t_2)P(d\omega) \ge \int_A \xi(t_1)P(d\omega) \qquad \text{(субмартингал)},$$
$$A \in F_{t_1}, t_1 < t_2, t_1, t_2 \in T.$$

Однородные марковские процессы. Марковский процесс называется однородным, если вероятность перехода $P(s,x,t,\Gamma)$ обладает тем свойством, что функция $P(s,x,s+h,\Gamma)$ не зависит от s. Если положить $P(h,x,\Gamma) = P(s,x,s+h,\Gamma)$, то для конечномерных распределений процесса будет имеет место равенство

$$P_{SX}\{\xi(t_1) \in \Gamma_1,\dots,\xi(t_n) \in \Gamma_n\} = \int_{\Gamma_1} P(t_1 - s, x, dy_1) \int_{\Gamma_2} P(t_2 - t_1, y_1, dy_2)\dots$$
$$\dots \int_{\Gamma_n} P(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n) = P_{0x}\{\xi(t_1 - s) \in \Gamma_1,\dots,\xi(t_n - s) \in \Gamma_n\},$$

Таким образом, вместо семейства мер P_{sx}, зависящих от временной и пространственной переменных, в однородном случае достаточно рассматривать семейство мер $P_x = P_{ox}$, зависящих лишь от пространственной переменной. Другими словами, каждый раз, когда процесс выходит из состояния x в момент времени s, мы производим сдвиг времени так, чтобы точка sстала начальной (нулевой). Естественно, что мы должны иметь возможность сдвигать соответственно и все траектории процесса, а это значит, что пространство элементарных событий должно быть достаточно богатым.

Пусть даны:

а) пространство элементарных событий (Ω, U);

б) случайная величина $\zeta(\omega)$ со значениями в расширенном отрезке $[0,\infty]$;

в) для каждого $t \ge 0$ σ-алгебра F_t в пространстве Ω_t $\{\omega: \zeta(\omega) > t\}$, причем если $s \le t$, то $F_s[\Omega_t] \subseteq F_t \subseteq U$, где $F_s[\Omega_t]$ – след σ-алгебры F_s на множестве Ω_t, т.е. совокупность множеств вида $A \cap \Omega_t, A \in F_s$;

г) функция двух переменных $\zeta(t) = \zeta(t,\omega)$, $t \in [0, \zeta(\omega)]$, $\omega \in \Omega$, принимающая значения в некотором измеримом пространстве (X, B), такая, что при каждом $t \ge 0$ отображение $\zeta(t,\cdot)$ пространства (Ω_t, F_t) в пространство (X, B) измеримо; предполагается, что σ-алгебра B содержит все одноточечные множества;

д) для каждого $x \in X$ вероятностная мера P_x на некоторой σ-алгебре F в пространстве Ω, содержащей все F_t, $t \ge 0$.

Система объектов а)-д) образует однородный марковский процесс, если выполнены условия:

1) при любых $t \ge 0, \Gamma \in B$ функция $P(t,x,\Gamma) = P_x\{\xi(t) \in \Gamma\}$ B – измерима как функция от x, причем $P(0,x,X\backslash\{x\}) = 0$;

2) для любых $s,t \ge 0$, $\Gamma \in B$ $P_x\{\xi(t+s) \in \Gamma | F_x\} = P(t, \xi(s), \Gamma)$ почти, наверное, относительно меры P_x на множестве Ω_s;

3) для каждого $\omega \in \Omega_t$ найдется такое $\omega' \in \Omega$, что $\zeta(\omega') = \zeta(\omega) - t$ и $\xi(s,\omega') = \xi(s+t,\omega)$ при $0 \le s < \zeta(\omega')$.

Условие 2) соединяет в себе свойство марковости процесса и свойство его однородности во времени. Условие 3) означает, что вместе с каждой траекторией процесса произвольный кусок ее после некоторого момента времени также является возможной траекторией. Расширяя, если это нужно, пространство Ω всегда можно добиться того, чтобы условие 3) выполнялось.

$$P(s+t,x,\Gamma) = \int_X P(s,x,dy)P(t,y,\Gamma),\ s,t \ge 0,\ x \in X,\ \Gamma \in B.$$

Функция $P(t,x,\Gamma)$, определенная в условии 1) называется вероятностью перехода. Из условия 2) следует, что она удовлетворяет уравнению Колмогорова-Чепмена. При этом

$P(s,x,X) \le 1$. Если $P(+0,x,X) = \lim_{t\to 0} P(t,x,X) = 1$, то вероятность перехода называется нормальной, а соответствующий процесс – нормальным.

Однородный марковский процесс будем обозначать $(\xi(t), \zeta, F_t, P_x)$. Если $\zeta \equiv +\infty$, то процесс называется необрывающимся и обозначается $(\xi(t), F_t, P_x)$. Для необрывающегося процесса $P(t,x,X) \equiv 1$.

Обозначим через $\mathfrak{R}^0$минимальную σ-алгебру подмножеств Ω, содержащую все множества вида $\{\xi(t) \in \Gamma\}$ при $t \ge 0$, $\Gamma \in B$, а через R_tминимальную σ-алгебру подмножеств Ω_t, содержащую все множества вида $\{\xi(s) \in \Gamma\} \cap \Omega_t$ при $s \in [0,t]$, $\Gamma \in B$.

Пусть $\mathfrak{R}$ обозначает след σ-алгебры $\mathfrak{R}^0$на множестве $\Omega_0 = \{\zeta > 0\}$. Очевидно, что $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}^0 \subseteq \mathfrak{R} \subseteq F, \mathfrak{R}_t \subseteq F_t$, и вместе с процессом $(\xi(t), \zeta, F_t, P_x)$, однородным марковским процессом будет также процесс $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$.

5 Выводы

Нами были рассмотрены вопросы корректности нелинейных краевых задач, где рассматриваются задачи именно в такой постановке и алгоритмы методов Монте-Карло, а именно, алгоритмы «блуждания по сферам» и «блуждания по границам», которые применяются для оценивания решения и производных от решения этой задачи [7]. Оценки, построенные с помощью таких алгоритмов методов Монте-Карло, будут в основном $\varepsilon -$ смещенными. Несмещенные оценки в большинстве случаев нереализуемы на ЭВМ, так как с вероятностью 1 не выходят на границу области и поэтому непригодны. В практике обычно ограничиваются лишь двумя первыми моментами оценки.

Список литературы

1 Медведев Г.А. Математические основы финансовой математики. Часть 1. Мартингальный подход. – Минск: БГУ, 2003. – 287 с.

2 Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 447 с.

3 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, изд. Четвертое доп. 2011. – 217 с.

4 Маталыцкий М.А., Романюк Т.В. Теория вероятностей в примерах и задачах. Учебное пособие для студентов математических специальностей вузов. – Гродно: ГрГУ, 2002. – 247 с.

5 Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 567 с.

6 Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – М.: Наука. 2015. – 492 с.

7 Смагулов Ш.С., Тастанов М.Г., Шакенов К.К. О решении трехмерной стационарной задачи фильтрации методами Монте-Карло. Вестник КазГУ, №11, Серия математика, механика, информатика. Алматы, 1998. С.150-163.

ТАСТАНОВ, М.Г., ЖАРЛЫГАСОВА, Э.З.

КЕЗДЕЙСОҚ ПРОЦЕССТЕР

Кездейсоқ процестер теориясы – бұл олардың даму динамикасындағы кездейсоқ құбылыстардың заңдылықтарын зерттейтін математиканың бөлімі. Қоршаған әлем құбылыстарын зерттеу кезінде біз көбінесе алдын-ала болжау мүмкін емес процестерге тап боламыз. Бұл белгісіздік (болжау мүмкін еместігі) процестің барысына әсер ететін кездейсоқ факторлардың әсерінен туындайды. Кездейсоқ процесстер теориясы Монте-Карло әдістерінің негізі болып табылады, сондықтан бұл мақала кездейсоқ процесстер теориясынан (Марков тізбектері, кездейсоқ адасулар, біртекті Марков процесстері жіне т.б.) және мартингалдар теориясынан ақпараттар береді. Біз $\varepsilon -$бағалауды дәлелдеу үшін мартингалдар теориясын әрі қарай қолданамыз. Бастапқы есептің шешуі бір нүктеде бағаланады (Нүктеде бағалау).

Түйінді сөздер: *кездейсоқ процесстер, Марков тізбектері, Марковтық болу критерйі, кездейсоқ адасу, біртекті Марков тізбектері, өту ықтималдығы, мартингалдар.*

TASTANOV, M.G., ZHARLYGASSOVA, E.Z.

RANDOM PROCESSES

The theory of random processes is a branch of mathematics that studies the patterns of random phenomena in the dynamics of their development. When studying the phenomena of the surrounding world, we *often encounter processes that cannot be accurately predicted in advance. This uncertainty (unpredictability) is caused by the influence of random factors affecting the course of the process. The theory of random processes is the basis of Monte Carlo methods, therefore this article provides information from the theory of random processes (Markov chains, random walks, homogeneous Markov processes, etc.) and the theory of martingales. We will further use the theory of martingales to prove the ε-bias of estimates. The solution to the original problem will be estimated at one point (Point estimation).*

Key words: *random processes, Markov chains, Markovianity criterion, random walks, homogeneous Markov chains, transition probability, martingales.*

Сведения об авторах:

Тастанов Мейрамбек Габдуалиевич *– кандидат физико-математических наук, доцент, и.о профессора кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.*

Жарлыгасова Эльмира Закировна *– магистр естественных наук, старший преподаватель кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.*

Тастанов Мейрамбек Ғабдуалиұлы *– физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, математика және физика кафедрасы профессорының м.а., Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.*

Жарлыгасова Эльмира Закировна *– жаратылыстану ғылымдарының магистрі, математика және физика кафедрасының аға оқытушысы, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.*

Tastanov Meirambek Gabdualiyevich *– Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, acting Professor of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.*

Zharlygassova Elmira Zakirovna *– Master of Natural Sciences, Senior Lecturer of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.*

УДК 519.245

Тастанов, М.Г.,
кандидат физико-математических наук,
и.о. профессора кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан
Нургельдина, А.Е.,
магистр естественных наук,
старший преподаватель
кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДОВ МОНТЕ-КАРЛО

Аннотация

Метод статистического моделирования основан на испытании модели множеством случайных сигналов, у которых плотность вероятности считается заданной. Целью в данном случае является определение выходных результатов. Статистичекое моделирование использует метод Монте-Карло в тех случаях, когда другие методы, кроме имитации применить невозможно. Основой методов Монте-Карло является теория вероятностей

МАЗМҰНЫ

ГУМАНИТАРЛЫҚ ЖӘНЕ ӨНЕР ҒЫЛЫМДАРЫ

ЖАРАТЫЛЫСТАНУ ҒЫЛЫМДАРЫ

ИНЖИНИРИНГ ЖӘНЕ ТЕХНОЛОГИЯ

АУЫЛ ШАРУАШЫЛЫҒЫ ЖӘНЕ ВЕТЕРИНАРИЯ ҒЫЛЫМДАРЫ

ӘЛЕУМЕТТІК ҒЫЛЫМДАР

СОДЕРЖАНИЕ

СОЦИАЛЬНЫЕ НАУКИ

CONTENT

Редактор, корректор: *А. Симонова*
Корректорлар: *Б. Сыздыкова, Т. Цай*
Компьютерлік беттеу: *С. Красикова*

Редактор, корректор: *А. Симонова*
Корректоры: *Б. Сыздыкова, Т. Цай*
Компьютерная верстка: *С. Красикова*

Басуға 15.01.2025 ж. берілді.
Пішімі 60х84/8. Көлемі 14,1 б.т.
Тапсырыс № 003

Ахмте Байтұрсынұлы атындағы
Қостанай өңірлік университетіндегі
редакциялық-баспа бөлімінде басылған
Қостанай қ., Байтұрсынов к., 47

Подписано в печать 15.01.2025 г.
Формат 60х84/8. Объем 14,1 п.л.
Заказ № 003

Отпечатано в редакционно-издательском отделе
Костанайского регионального университета
имени Ахмет Байтұрсынұлы
г. Костанай, ул. Байтурсынова, 47