BU
BAITURSYNULY
UNIVERSITY

ISSN 2310-3353

«АХМЕТ БАЙТҰРСЫНҰЛЫ
АТЫНДАҒЫ ҚОСТАНАЙ ӨҢІРЛІК
УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

ҚМПИ ЖАРШЫСЫ

КӨПСАЛАЛЫ
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ
МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

№ 1
2025

PUBLISHINGS KSPI | ҚМПИ ЖАРШЫСЫ | ВЕСТНИК КГПИ

BU BAITURSYNULY UNIVERSITY

2025 ж., қаңтар, №1 (77)
Журнал 2005 ж. қаңтардан бастап шығады
Жылына төрт рет шығады

Құрылтайшы: ***Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті***

Тіркеу туралы куәлік №5452-Ж
Қазақстан Республикасының ақпарат министрлігімен 17.09.2004 берілген.
Мерзімді баспа басылымын қайта есепке алу 07.11.2023 ж.
Жазылу бойынша индексі 74081

Редакцияның мекен-жайы:
110000, Қостанай қ., Байтұрсынов к., 47
(Редакциялық-баспа бөлімі)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

КӨПСАЛАЛЫ ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ | № 1 (77) 2025 | МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

№1 (77), январь 2025 г.
Издается с января 2005 года
Выходит 4 раза в год

Учредитель: ***Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы***

Свидетельство о регистрации № 5452-Ж
выдано Министерством информации Республики Казахстан 17.09.2004 г.
Переучёт периодического печатного издания 07.11.2023 г.
Подписной индекс 74081

Адрес редакции:
110000, г. Костанай, ул. Байтурсынова, 47
(Редакционно-издательский отдел)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

УДК 517.54

Майер, Ф.Ф.,
кандидат физико-математических наук, доцент,
и.о. профессора кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПОЧТИ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ, ПОСТРОЕННЫХ НА БАЗЕ КЛАССА ЯНОВСКОГО

Аннотация

Исследуется класс $CS_n^*(a,\gamma,A,B)$ почти звездообразных функций $f(z)$, определенный с помощью условия $\left|\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{1/\gamma}-a\right|\le a$, $a>1/2$, $0<\gamma\le 1$, где функция $g(z)$ принадлежит классу $S_n^*[A,B]$ звездообразных функций Яновского. Для данного класса получена теорема роста и определен радиус звездообразности порядка α, в том числе и в случае, когда функция $g(z)$ является выпуклой. В частных случаях получается как ряд ранее известных, так и новых результатов. Все результаты, полученные в статье, являются точными.

Ключевые слова: *почти звездообразные функции, теорема роста, радиусы звездообразности.*

1 Введение

Естественным расширением класса S^* звездообразных в круге $E=\{z:|z|<1\}$ функций $f(z)$ является класс CS^* почти звездообразных функций $f(z)$, введенный в работе [1] с помощью условия

$$Re\frac{f(z)}{g(z)}>0, z\in E, \tag{1}$$

где $g(z)\in S^*$.

В дальнейшем рассматривались другие классы почти звездообразных функций, при определении которых вместо условия (1) использовались условия [2, 3] $Re\frac{f(z)}{g(z)}>0$, $\left|\frac{f(z)}{g(z)}-1\right|<1$, [4] $\left|\frac{f(z)}{g(z)}-a\right|<a, a>\frac{1}{2}$, [5] $Re\frac{f(z)}{\lambda f(z)+(1-\lambda)g(z)}>0$, $\left|\frac{f(z)}{\lambda f(z)+(1-\lambda)g(z)}-1\right|<1$, где $0\le\lambda<1$, и некоторые другие неравенства, связывающие функции $f(z)$ и $g(z)$.

Совсем недавно вышел цикл статей [6-10], в которых исследуются классы почти звездообразных функций, заданные условиями вида $Re\frac{f(z)}{g(z)}>0$, $\left|\frac{f(z)}{g(z)}-1\right|<1$, в которых используются конкретные звездообразные функции $g(z):=z$; $z/(1+z)$; $z/(1-z)^2$; $z+z^2/2$; $z/(1-z^2)$.

В настоящей статье с помощью условия $\left|\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{1/\gamma}-a\right|\le a, a>\frac{1}{2}, 0<\gamma\le 1$, естественным образом обобщающего многие из выше перечисленных условий, вводится класс почти звездообразных функций $f(z)$, в котором используются звездообразные функции $g(z)$ класса Яновского [11]. Для введенного класса установлена теорема роста и определен точный радиус звездообразности порядка α, в том числе, когда функция $g(z)$ является выпуклой. Все результаты являются точными. В частных случаях получаются многие из ранее известных результатов.

2 Материалы и методы

Основным методом исследования статьи является метод подчиненности аналитических функций, позволяющий достаточно просто получать различные оценки аналитических функций.

По определению, аналитическая в E функция $\varphi(z)$ называется подчиненной однолистной функции $\varphi_0(z)$, если $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ и $\varphi(0) = \varphi_0(0)$. При этом используют обозначение $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$. Для случая неоднолистной в E функции $\varphi_0(z)$ соотношение подчиненности $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$ означает, что можно найти функцию $\omega(z)$, $\omega(0) = 0, |\omega(z)| \leq 1$, такую, что будет выполняться соотношение $\varphi(z) = \varphi_0\big(\omega(z)\big)$.

Если функция $\varphi(z)$ имеет разложение вида $\varphi(z) = c_0 + c_n z^n + c_{n+1}z^{n+1} + \cdots, n \geq 1$, то из подчиненности $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$ следует вложение $\varphi(|z| \leq r) \subseteq \varphi_0(|z| \leq r^n)$ для всех r, $0 \leq r < 1$, позволяющее получать точные оценки функции $\varphi(z)$ по характеристикам мажоранты $\varphi_0(z)$.

Пусть $\mathcal{R}_n$ и $\mathcal{N}_n$ обозначают, соответственно, классы аналитических в E функций $\varphi(z)$ и $f(z)$, имеющих разложения в ряд вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1}z^{n+1} + \cdots$, $n \geq 1$, и $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \cdots, n \geq 1, z \in E$. Через $\mathcal{P}_n(a,\gamma)$ будем обозначать класс функций $\varphi(z)$ из $\mathcal{R}_n$, удовлетворяющих условию

$$\left|(\varphi(z))^{\frac{1}{\gamma}} - a\right| < a, \quad a > 1/2\,, 0 < \gamma \leq 1, z \in E.$$

Тогда $\mathcal{P}_n \coloneqq \mathcal{P}_n(\infty, 1)$ – класс функций из $\mathcal{R}_n$ с положительной вещественной частью. Также будем считать, что $\mathcal{P}(a,\gamma) := \mathcal{P}_1(a,\gamma)$, $\mathcal{P} \coloneqq \mathcal{P}_1$, $\mathcal{N} \coloneqq \mathcal{N}_1$.

Пусть $S_n^*[A,B]$ – класс Яновского звездообразных функций $g(z) \in \mathcal{N}_n$, удовлетворяющих условию

$$z\frac{g'(z)}{g(z)} \prec \psi_0(z) = \frac{1 + Az}{1 + Bz}, \quad -1 \leq B < A \leq 1.$$

Его подклассом является класс $S^*(\alpha) = S^*[1 - 2\alpha, -1]$ функций $g(z)$, звездообразных порядка α, которые удовлетворяют условию $Re\left(z\frac{g'(z)}{g(z)}\right) > \alpha, 0 \leq \alpha < 1,\ z \in E$. Также в статье используется класс S^0 выпуклых функций, удовлетворяющих условию $Re\, z\frac{g''(z)}{g'(z)} > -1, z \in E$.

Основой для дальнейших исследований являются следующие оценки, полученные на основе метода подчиненности.

Лемма 1 [12]. *Если $g(z) \in S_n^*[A,B]$, то в круге $|z| \leq r, 0 \leq r < 1$, выполняются точные оценки*

$$r(1 - Br^n)^{\frac{A-B}{nB}} \leq |g(z)| \leq r(1 + Br^n)^{\frac{A-B}{nB}}, \qquad B \neq 0, \tag{1}$$

$$r\exp\left(-\frac{A}{n}r^n\right) \leq |g(z)| \leq r\exp\left(\frac{A}{n}r^n\right), \quad B = 0, \tag{2}$$

$$Re\left(z\frac{g'(z)}{g(z)}\right) \geq \frac{1 - Ar^n}{1 - Br^n}, \tag{3}$$

знак равенства в которых достигается для функции

$$g_0(z) = \begin{cases} z \cdot (1 + Bz^n)^{\frac{A-B}{nB}}, & B \neq 0, \\ z \cdot exp\left\{\dfrac{A}{n}z^n\right\}, & B = 0 \end{cases}. \tag{4}$$

Лемма 2 [13]. *Если $\varphi(z) \in \mathcal{P}_n(a,\gamma)$, то в круге $|z| \leq r, 0 \leq r < 1$, выполняются точные оценки*

$$\left(\frac{1 - r^n}{1 + (1 - 1/a)r^n}\right)^{\gamma} \leq |\varphi(z)| \leq \left(\frac{1 + r^n}{1 - (1 - 1/a)r^n}\right)^{\gamma}, \tag{5}$$

$$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| \le \frac{\gamma(2-1/a)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-1/a)r^n)}. \tag{6}$$

Экстремальная функция задается формулой $\varphi(z)=\varphi_0(z^n)$, где

$$\varphi_0(z)=\left(\frac{1+z}{1-(1-1/a)z}\right)^{\gamma}. \tag{7}$$

3-4 Результаты и обсуждение

Введем класс $CS_n^*(a,\gamma,A,B)$ почти звездообразных функций $f(z)\in\mathcal{N}_n$, удовлетворяющих условию

$$\left|\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{1/\gamma}-a\right| \le a, a>\frac{1}{2}, 0<\gamma\le 1, \tag{8}$$

где $g(z)\in S_n^*[A,B]$.

Теорема 1. *Если $f(z)\in CS_n^*(a,\gamma,A,B)$, то в круге $|z|\le r, 0\le r<1$, выполняются неравенства*

1) *при $B\neq 0$*

$$r(1-Br^n)^{\frac{A-B}{nB}}\left(\frac{1-r^n}{1+(1-1/a)r^n}\right)^{\gamma} \le |f(z)| \le r(1+Br^n)^{\frac{A-B}{nB}}\left(\frac{1+r^n}{1-(1-1/a)r^n}\right)^{\gamma}, \tag{9}$$

2) *при $B=0$*

$$r\exp\left(-\frac{A}{n}r^n\right)\left(\frac{1-r^n}{1+(1-1/a)r^n}\right)^{\gamma} \le |f(z)| \le r\exp\left(\frac{A}{n}r^n\right)\left(\frac{1+r^n}{1-(1-1/a)r^n}\right)^{\gamma} \tag{10}$$

и радиусом $r^*(\alpha)$ звездообразности порядка α класса $CS_n^*(a,\gamma,A,B)$ является единственный на $(0;1)$ корень уравнения

$$\frac{1-Ar^n}{1-Br^n}-\frac{\gamma(2-1/a)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-1/a)r^n)}-\alpha=0. \tag{11}$$

Результат точный.

Доказательство. Пусть $\varphi(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$. Тогда $f(z)=g(z)\varphi(z)$, причем $\varphi(z)\in\mathcal{P}_n(a,\gamma)$. Поэтому, комбинируя оценки (1)-(2) и (5), получим оценки (9)-(10).

Из равенства $f(z)=g(z)\varphi(z)$ находим

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}=z\frac{g'(z)}{g(z)}+z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Поэтому, применяя оценки (3) и (6), в круге $|z|\le r$, $0\le r<1$, получаем

$$Re\frac{zf'(z)}{f(z)} \ge Re\ \frac{zg'(z)}{g(z)}-\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| \ge \frac{1-Ar^n}{1-Br^n}-\frac{\gamma(2-1/a)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-1/a)r^n)}.$$

Если $|z|\le r$, где $r=r^*(\alpha)$ – корень уравнения (11), то $Re\frac{zf'(z)}{f(z)}\ge\alpha$ и $f(z)$ является звездообразной порядка α в круге $|z|\le r^*(\alpha)$.

Средствами дифференциального исчисления нетрудно установить, что функция

$$m_2(r)=\frac{\gamma(2-1/a)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-1/a)r^n)}+\alpha$$

монотонно возрастает на $[0;1)$ от α до $+\infty$ при $a>\frac{1}{2}, \gamma>0$. Так как $m_1(r)=(1-Ar^n)/(1-Br^n)$ монотонно убывает на $[0;1]$ от 1 до $m_1(1)=(1-A)/(1-B)\in[0;1]$, то уравнение $m_1(r)-m_2(r)=0$, а, следовательно, и уравнение (11), имеет единственный корень $r=r^*(\alpha)\in(0;1)$.

Для доказательства точности оценок (9)-(10) и радиуса звездообразности $r^*(\alpha)$ рассмотрим функцию $f_0(z)=g_0(z)\varphi_0(z^n)$, где функция $g_0(z)$ задана формулой (4), а функция $\varphi_0(z)$ – формулой (7). Для функции $f_0(z)$ правые оценки в (9)-(10) достигаются в точке $z=r$, а левые оценки в (9)-(10) – достигаются в точке $z=\sqrt[n]{-1}r$.

Кроме того,

$$z\frac{f_0'(z)}{f_0(z)}=\frac{1+Az^n}{1+Bz^n}+\frac{\gamma(2-1/a)nz^n}{(1+z^n)(1-(1-1/a)z^n)}.$$

Поэтому в точке $z=\sqrt[n]{-1}r$, где $r=r^*(\alpha)$ – корень уравнения (11), имеем

$$Re\left.\frac{zf_0'(z)}{f_0(z)}\right|_{z=\sqrt[n]{-1}r}=\frac{1-Ar^n}{1-Br^n}-\frac{\gamma(2-1/a)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-1/a)r^n)}=\alpha.$$

Следовательно, радиус звездообразности порядка α увеличить нельзя. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть* $f(z)$ *удовлетворяет условию* $|f(z)/g(z)-a|\le a, a>1/2$*, где* $g(z)\in S^0$*. Тогда в круге* $|z|\le r, 0\le r<1$*, выполняется оценка*

$$\frac{r}{1+r}\frac{1-r}{1+(1-1/a)r}\le|f(z)|\le\frac{r}{1-r}\frac{1-r}{1-(1-1/a)r},\qquad(12)$$

и радиусом звездообразности порядка α *данного класса функций является единственный на* $(0;1)$ *корень уравнения*

$$\alpha(a-1)r^3+(\alpha a-3a+2)r^2-2ar+a-\alpha a=0.\qquad(13)$$

Доказательство. Известно, что если функция $g(z)$ является выпуклой, то [14] $g(z)\in S^*(1/2)=S^*(0,-1)$. Поэтому, полагая в теореме 1 $A=0, B=-1$, $n=\gamma=1$, из оценки (9) получим оценку (12), а уравнение (11) преобразуется к виду (13).

Заметим, что при $a=1$ из следствия 1 вытекает радиус звездообразности порядка α класса $\mathcal{F}_5=\left\{f(z)\in\mathcal{N}:\left|\frac{f(z)}{g(z)}-1\right|<1, g(z)\in S^0\right\}$ из [15], определяемый по формуле

$$r^*(\alpha)=\frac{1-\alpha}{1+\sqrt{2+\alpha^2-2\alpha}}.$$

При $\alpha=0$ уравнение (13) преобразуется к виду $(3a-2)r^2+2ar-a=0$ и из следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Пусть* $f(z)$ *удовлетворяет условию* $|f(z)/g(z)-a|\le a, a>1/2$*, где* $g(z)\in S^0$*. Тогда* $f(z)$ *является звездообразной в круге* $|z|\le r^*$, где

$$r^*=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2a(2a-1)}-a}{3a-2}, & a\ne\dfrac{2}{3};\\ 1/2, & a=2/3.\end{cases}\qquad(14)$$

Радиус звездообразности является точным.

Заметим, что при $a=1$ следствие 2 дает теорему 4 из [3] о радиусе звездообразности $r^*=\sqrt{2}-1$ класса функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $|f(z)/g(z)-1|\le1$, где $g(z)\in S^0$.

Следствие 3. *Пусть* $c=1-1/a, b=1-\gamma n$*. Точный радиус* r^* *звездообразности класса функций* $f(z)$*, удовлетворяющих условию*

$$\left|\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{1/\gamma}-a\right|\le a, a>1/2, 0<\gamma\le1,$$

где $g(z)\in S_n^*(\beta)$*, определяется по формуле* $r^*=t^{1/n}$*, где* t *– единственный на* $(0;1)$ *корень уравнения*

$$(2\beta-1)ct^3+[(3-b)c+2\beta-2\beta c-b]t^2+(3-b-2\beta-bc)t-1=0.\qquad(15)$$

Доказательство. Если $A=1-2\beta, B=-1$, то класс $S_n^*[A,B]$ совпадает с классом $S_n^*(\beta)$ функций, звездообразных порядка β, $0\le\beta<1$. В силу этого следствие 3 вытекает из теоремы 1 при $\alpha=0$, и доказательство следствия сводится к преобразованию уравнения (11). При $t=r^n, c=1-1/a$ из (11) имеем

$$(1-(1-2\beta)t)(1-t)(1+ct)-\gamma(1+c)nt(1+t)=0$$

или

$$(2\beta-1)ct^3+[(2+\gamma n)c+2\beta-2\beta c-1+\gamma n]t^2+(2+\gamma n-2\beta-(1-\gamma n)c)t-1=0.$$

Отсюда, обозначив для упрощения $1-\gamma n=b$, приходим к (15).

При $\gamma=a=1$, то есть для класса функций, удовлетворяющих условию $|f(z)/g(z)-1|<1$, $g(z)\in S_n^*(\beta)$, уравнение (15) преобразуется к виду

$$(2\beta+n-1)t^2-(2\beta-n-2)t-1=0,$$

поэтому $r^*=t^{\frac{1}{n}}$, где

$$t=\begin{cases}\dfrac{2\beta-n-2+\sqrt{(2\beta-n-2)^2+4(2\beta+n-1)}}{2(2\beta+n-1)}, & 2\beta+n-1\neq 0,\\ 1/3, & \beta=0,\ \ n=1,\end{cases} \quad (16)$$

Данный результат получен ранее в [16, следствие 3], а его частный случай, когда $r^*=1/3$ при $n=1$ и $g(z)\in S^*$, – изучен в [3, теорема 3].

Заметим, что при $\gamma=n=1$ из следствия 3 вытекает, что если $|f(z)/g(z)-a|\le a$ и $g(z)\in S_\beta^*$, то r^* определяется как единственный на $(0;1)$ корень уравнения

$$(2\beta-1)cr^3+(3c+2\beta-2\beta c)r^2+(3-2\beta)r-1=0. \quad (17)$$

Данный результат совпадает с частным случаем теоремы 3.3 при $\lambda=0$ из [5]. При $a\to\infty$ $(c\to 1)$, $\beta=0$ уравнение (17) преобразуется к виду $r^3-3r^2-3r+1=0$ или $(r+1)(r^2-4r+1)=0$. Отсюда получаем, что $r^*=2-\sqrt{3}$ для класса $Re\frac{f(z)}{g(z)}>0$, $g(z)\in S^*$, что совпадает с теоремой 3 из [17].

Примечание 1. Пусть $a\to\infty, \gamma=1$, при этом условие (8) преобразуется к виду $Re\frac{f(z)}{g(z)}>0$. Тогда при определенных значениях A,B (то есть конкретизируя функцию $g(z)$) и n из теоремы 1 вытекают радиусы звездообразности порядка α целого ряда классов функций, в том числе исследованных в последние годы.

Следствие 4. *Следующие результаты по радиусам звездообразности порядка α справедливы для классов*:

1) (случай $n=1, A=0, B=-1$) для класса $\mathcal{F}_3$: $Re\left\{\frac{1-z}{z}f(z)\right\}>0, z\in E$ из [7]

$$r^*(\alpha)=\frac{2(1-\alpha)}{3+\sqrt{9-4\alpha(1-\alpha)}};$$

2) (случай $n=1, A=1, B=-1$) для класса $\mathcal{F}_4$: $Re\left\{\frac{(1-z)^2}{z}f(z)\right\}>0, z\in E$ из [7]

$$r^*(\alpha)=\frac{1-\alpha}{2+\sqrt{3+\alpha^2}};$$

3) (случай $n=1, A=1, B=1/2$) для класса $\mathcal{F}_3$: $Re\{f(z)/(z+z^2/2)\}>0, z\in E$ из [8] $r^*(\alpha)$ *определяется как наименьший положительный корень уравнения* $(2-\alpha)r^3+2\alpha r^2+(\alpha-6)\,r+2-2\alpha=0$;

4) (случай $A=1, B=-1$) для класса $\mathcal{K}_3$: $Re\left\{\frac{1-z^2}{z}f(z)\right\}>0, z\in E$ из [9], при $n=2$ в дополнение к [9]

$$r^*(\alpha)=\left(\frac{1-\alpha}{3+\sqrt{8+\alpha^2}}\right)^{1/2};$$

5) (случай $n=1, A\to 0, B\to 0$) для класса $Re\frac{f(z)}{z}>0, z\in E$

$$r^*(\alpha)=\frac{1-\alpha}{1+\sqrt{1+(1-\alpha)^2}};$$

6) (случай $n\ge 1, A=0, B=-1$) для класса $Re\left\{\frac{(1-z^n)^{1/n}}{z}f(z)\right\}>0, z\in E$

$$r^*(\alpha)=\left(\frac{2(1-\alpha)}{1+2n+\sqrt{(1+2n)^2-4\alpha(1-\alpha)}}\right)^{1/n};$$

7) (случай $n \geq 1, A = 1, B = -1$) для класса $Re\left\{\frac{(1-z^n)^{2/n}}{z}f(z)\right\} > 0, z \in E$

$$r^*(\alpha) = \left(\frac{1-\alpha}{1+n+\sqrt{(1+n)^2-1+\alpha^2}}\right)^{1/n}.$$

5 Выводы

Настоящая статья посвящена исследованию геометрических свойств класса $CS_n^*(a,\gamma,A,B)$ почти звездообразных функций $f(z)$ таких, что $\left|(f(z)/g(z))^{1/\gamma} - a\right| \leq a$, где $g(z)$ принадлежит известному классу $\in S_n^*[A,B]$ звездообразных функций Яновского. В классе $CS_n^*(a,\gamma,A,B)$ установлены точные теоремы роста и найдены точные радиусы звездообразности, приводящие как к новым результатам, так и обобщающие целый ряд ранее известных результатов.

Список литературы

1 Reade M.O. On close-to-close univalent functions. Michigan Math. J., 1955, 3, 59-62.

2 MacGregor T.H. The radius of univalence of certain analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc., 1963, 14, 514-520.

3 MacGregor T.H. The radius of univalence of certain analytic functions, II. Proc. Am. Math. Soc., 1963, 14, 521-524. doi: http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9939-1963-0148892-5.

4 Chichra P. On the radii of starlikeness and convexity of certain classes of regular functions. J. of the Australian Math. Soc., 1972, 13(2), 208-218. doi: https://doi.org/10.1017/S1446788700011290.

5 Anh V.V., Tuan P.D. On starlikeness and convexity of certain pacific. Journal of Mathematics, 1977,69(1), 1-9. doi: https://doi.org/10.2140/PJM.1977.69.1.

6 Ali R.M., Jain N.K., Ravichandran V. On the radius constants for classes of analytic functions // arXiv:1207.4529v1 [math.CV] – 2012, 1-16. http://arxiv.org/abs/1207.4529v1. https://doi.org/10.48550/arXiv.1207.4529.

7 Sebastianc A., Ravichandran V.. Radius of starlikeness of certain analytic functions. Math. Slovaca, 2021, 71(1), 83-104. DOI: https://doi.org/10.1515/ms-2017-0454.

8 Kanaga R., Ravichandran V. Starlikeness for Certain Close-to-Star Functions. Hacet. J. Math. Stat., 2021, 50 (2), 414-432. DOI: https://doi.org/10.15672/hujms.702703.

9 Khatter K., Lee S. K., Ravichandran V. Radius of starlikeness for classes of analytic functions // arXiv preprint arXiv:2006.11744 – 2020. doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744.

10 Sharma, M., Jain, N.K. & Kumar, S. (2023). Constrained radius estimates of certain analytic functions. arXiv:2305.16210v1 [math.CV].

11 Janowski J. Some extreme problems for certain families of analytic functions. Ann. Polon. Math., 1973, 28, 297-326. doi: https://doi.org/10.4064/ap-28-3-297-326.

12 Anh V.V., Tuan P.D. Extremal problems for a class of functions of positive real part and applications. Austral. Math. Soc. (Series A), 1986, 41, 152-164. doi: https://doi.org/10.1017/S1446788700033577.

13 Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Байманкулов А.Т. Об обобщении некоторых классов почти выпуклых и типично вещественных функций // Вестник ТГУ, Серия «Математика и механика», Томск. – 2023. – №84. – С. 147-156. https://www.mathnet.ru/links/36b8b367bce77d719cf15cb56737f2af/vtgu1025.pdf.

14 Strohhäcker E. Beiträge zur theorie der schlichten funktionen. Mathematische Zeitschrift, 1933, 37, 356-380.

15 Ali R.M., Jain N.K., Ravichandran V. On the radius constants for classes of analytic functions // arXiv:1207.4529v1 [math.CV] – 2012. https://doi.org/10.48550/arXiv.1207.4529.

16 Shah G.M. On the univalence of some analytic functions. Pacific J. Math., 1972, 43:1, 239-250. doi: https://doi.org/10.2140/pjm.1972.43.239.

17 MacGregor T.H. A class of univalent functions. Trans. Amer. Math. Soc., 1964,15, 311-317.

МАЙЕР, Ф.Ф.

ЯНОВСКИЙ КЛАСЫНЫҢ НЕГІЗІНДЕ ҚҰРЫЛҒАН ЖҰЛДЫЗ ТӘРІЗДІ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ КЕЙБІР КЛАСТАРЫ ТУРАЛЫ

Мақалада $\left|\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{1/\gamma} - a\right| \leq a,\ a > 1/2,\ 0 < \gamma \leq 1,$ *шарттарымен анықталған* $f(z)$ *жұлдыз тәрізді функциялардың* $CS_n^*(a,\gamma,A,B)$ *класы зерттеледі, мұндағы* $g(z)$ *функциясы Яновскийдің* *жұлдыз тәрізді функцияларының $S_n^*[A,B]$ класына жатады. Берілген класс үшін өсу теоремасы алынады және α ретінің жұлдыз тәрізділік радиусы анықталады, оның ішінде $g(z)$ функциясы дөңес болған жағдайда. Ерекше жағдайларда бұрын белгілі және жаңа нәтижелер сериясы алынады. Алынған барлық нәтижелер дәл болып табылады.*

Түйінді сөздер: *жұлдыз тәрізді функциялар, өсу теоремасы, жұлдыз тәрізді радиустар.*

MAYER, F.F.

ON SOME CLASSES OF CLOSE-TO-STARLIKE FUNCTIONS BASED ON THE YANOVSKIY CLASS

The article examines the class $CS_n^*(a,\gamma,A,B)$ of close-to-starlike functions $f(z)$, defined using the condition $\left|\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{1/\gamma}-a\right|\le a,\ a>1/2,\ 0<\gamma\le 1$, where the function $g(z)$ belongs to the class $S_n^*[A,B]$ of Yanovskiy starlike functions. For this class, the growth theorem is obtained and the radius of starlikeness formation of the order α is determined, including in case when the function $g(z)$ is convex. In particular cases, a number of previously known and new results are obtained. All the results obtained are accurate.

Keywords: *close-to-starlike functions; growth theorem; radii of starlikeness.*

Сведения об авторе:

Майер Федор Федорович *– кандидат физико-математических наук, доцент, и.о. профессора кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.*

Майер Федор Федорович *– физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, математика және физика кафедрасы профессорының м.а., Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.*

Mayer Fyodor Fyodorovich *– Candidate of Physical and Mathematical Sciences, acting Professor of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.*

УДК 517.54

Майер, Ф.Ф.,
кандидат физико-математических наук,
доцент, и.о. ассоциированного профессора
(доцента) кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан
Хабдуллина, Г.Ж.,
магистр математики, старший преподаватель
кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР БЕРНАЦКОГО НА КЛАССЕ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ ЯКУБОВСКОГО

Аннотация

В геометрической теории функций различным интегральным операторам посвящен большой цикл работ, в которых определяется образ заданного класса регулярных функций при интегральном преобразовании, либо исследуется область значений, входящих в этот оператор показателей, при

МАЗМҰНЫ

СОДЕРЖАНИЕ

ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ И ИСКУССТВО

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ИНЖИНИРИНГ И ТЕХНОЛОГИИ

СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ, ВЕТЕРИНАРНЫЕ НАУКИ

СОЦИАЛЬНЫЕ НАУКИ

CONTENT

HUMANITIES AND ARTS

NATURAL SCIENCES

ENGINEERING AND TECHNOLOGY

AGRICULTURAL, VETERINARY SCIENCES

SOCIAL SCIENCES

Редактор, корректор: *А. Симонова*
Корректорлар: *Б. Сыздыкова, Т. Цай*
Компьютерлік беттеу: *С. Красикова*

Редактор, корректор: *А. Симонова*
Корректоры: *Б. Сыздыкова, Т. Цай*
Компьютерная верстка: *С. Красикова*

Басуға 15.01.2025 ж. берілді.
Пішімі 60х84/8. Көлемі 14,1 б.т.
Тапсырыс № 003

Ахмте Байтұрсынұлы атындағы
Қостанай өңірлік университетіндегі
редакциялық-баспа бөлімінде басылған
Қостанай қ., Байтұрсынов к., 47

Подписано в печать 15.01.2025 г.
Формат 60х84/8. Объем 14,1 п.л.
Заказ № 003

Отпечатано в редакционно-издательском отделе
Костанайского регионального университета
имени Ахмет Байтұрсынұлы
г. Костанай, ул. Байтурсынова, 47