



BAIPURSYNULY  
UNIVERSITY

АХМЕТ БАЙТҰРСЫНҰЛЫ АТЫНДАҒЫ  
ҚОСТАНАЙ Өңірлік университеті

КОСТАНАЙСКИЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АХМЕТА БАЙТҰРСЫНҰЛЫ

## СҰЛТАНҒАЗИН ОҚУЛАРЫ

«БІЛІМ БЕРУДЕГІ ЗАМАНАУИ ЗЕРТТЕУЛЕР:  
ТЕОРИЯ, ПРАКТИКА, НӘТИЖЕЛЕР»  
ХАЛЫҚАРАЛЫҚ  
ҒЫЛЫМИ-ПРАКТИКАЛЫҚ КОНФЕРЕНЦИЯ

## СУЛТАНГАЗИНСКИЕ ЧТЕНИЯ

МЕЖДУНАРОДНАЯ  
НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
«СОВРЕМЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ  
В ОБРАЗОВАНИИ: ТЕОРИЯ,  
ПРАКТИКА, РЕЗУЛЬТАТЫ»



Костанай 2024



УДК 37  
ББК 74  
С

**РЕДАКЦИЯ АЛҚАСЫ / РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**

- **Куанышбаев Сеитбек Бекенович**, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университетінің Басқарма Төрағасы-Ректоры, география ғылымдарының докторы, Қазақстан Педагогикалық Ғылымдар Академиясының мүшесі / Председатель Правления-Ректор Костанайского регионального университета имени Ахмет Байтұрсынұлы, доктор географических наук, член Академии Педагогических Наук Казахстана
- **Жарлыгасов Женис Бахытбекович**, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университетінің Зерттеулер, инновация және цифрландыру жөніндегі проректоры, ауыл шаруашылығы ғылымдарының кандидаты, қауымдастырылған профессор / Проректор по исследованиям, инновациям и цифровизации Костанайского регионального университета имени Ахмет Байтұрсынұлы, кандидат сельскохозяйственных наук, ассоциированный профессор
- **Радченко Татьяна Александровна**, жаратылыстану ғылымдарының магистрі, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университетінің «Физика, математика және цифрлық технологиялар» кафедрасының меңгерушісі / магистр естественных наук, заведующий кафедрой физики, математики и цифровых технологий Костанайского регионального университета имени Ахмет Байтұрсынұлы
- **Алимбаев Алибек Алпысбаевич**, PhD докторы, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университетінің «Физика, математика және цифрлық технологиялар» кафедрасының қауымдастырылған профессорының м.а. / доктор PhD, и.о. ассоциированного профессора кафедры физики, математики и цифровых технологий Костанайского регионального университета имени Ахмет Байтұрсынұлы
- **Телегина Оксана Станиславовна**, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университетінің «Физика, математика және цифрлық технологиялар» кафедрасының аға оқытушысы / старший преподаватель кафедры физики, математики и цифровых технологий Костанайского регионального университета имени Ахмет Байтұрсынұлы
- **Шумейко Татьяна Степановна**, педагогика ғылымдарының кандидаты, қауымдастырылған профессор, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университетінің «Физика, математика және цифрлық технологиялар» кафедра профессорының м.а. / кандидат педагогических наук, ассоциированный профессор, и.о. профессора кафедры физики, математики и цифровых технологий Костанайского регионального университета имени Ахмет Байтұрсынұлы

**СҰЛТАНҒАЗИН ОҚУЛАРЫ:** халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференцияның материалдары, 2024 жылдың 15 қараша.- Қостанай: Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, 2024. – 374 б.

**СУЛТАНҒАЗИНСКИЕ ЧТЕНИЯ:** материалы международной научно-практической конференции, 15 ноября 2024 года. - Костанай: Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, 2024. – 374с.

**ISBN 978-601-356-413-5**

«Сұлтанғазин оқулары» Халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясының материалдары жинағында қазіргі білім берудің өзекті мәселелеріне арналған ғылыми мақалалар ұсынылған: физиканы оқытудағы жаңа әдістер мен технологиялардың тәжірибесі мен болашағы, математиканы зерттеу мен оқыту мәселелері қарастырылған; информатиканың ғылым ретіндегі тарихы, қазіргі жағдайы және даму болашағы, кәсіби білім берудің мәселелері мен келешегі ашылды. Жинақтағы материалдар ғалымдардың, оқытушылардың, магистранттар мен студенттердің қызығушылығын тудыру мүмкін.

В сборнике материалов Международной научно-практической конференции «Султангазинские чтения» представлены научные статьи по актуальным вопросам современного образования: рассмотрены опыт и перспективы новых методов и технологий в преподавании физики, проблемы исследования и преподавания в математике; раскрыты история, современное состояние и перспективы развития информатики как науки, проблемы и перспективы профессионального образования. Материалы сборника могут быть интересны ученым, преподавателям, магистрантам и студентам.



УДК 37  
ББК 74

*Рекомендовано к изданию Ученым советом НАО «Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы» от 27.11.2024 года, протокол № 17*

© Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, 2024  
© Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, 2024

### Список использованных источников:

1. Шабанова, М.В. (2013). Системы динамической геометрии в обучении математике: проблемы и пути их решения // Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова. – 2013. – № 9. – С. 229-237.
2. Плещова, Н.С. (2018). Примеры использования интерактивной геометрической среды GeoGebra на уроках математики при изучении темы "Координатная плоскость" // Применение современных информационно-коммуникационных технологий в работе педагога. Материалы творческой лаборатории – Киров: Кировское областное государственное образовательное автономное учреждение дополнительного профессионального образования «Институт развития образования Кировской области», 2018. – С. 45-48.

УДК 51-7

## ПРИМЕНЕНИЕ $W$ -ФУНКЦИИ ЛАМБЕРТА В РЕШЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Москаленко Артём Тимофеевич,  
бакалавр образования,  
учитель физики  
Гимназии имени А.М. Горького,  
г. Костанай, Казахстан  
E-mail: mosk\_art@mail.ru

### Аннотация

$W$ -функция является относительно новой математической функцией, остающейся неизвестной для широкого круга специалистов. Между тем она позволяет найти точные решения широкого класса трансцендентных уравнений, которые раньше могли быть решены только численными методами. В статье рассматриваются некоторые физические задачи, при решении которых возникает необходимость привлечения  $W$ -функции Ламберта.

**Ключевые слова:**  $W$ -функция Ламберта, трансцендентные уравнения, физические задачи.

### Аңдатпа

Ламберт  $W$ -функциясы – мамандардың кең ауқымына белгісіз болып қалатын салыстырмалы түрде жаңа математикалық функция. Сонымен қатар, ол бұрын тек сандық әдістермен шешілетін трансценденттік теңдеулердің кең класының нақты шешімдерін табуға мүмкіндік береді. Мақалада дәл шешімін табу үшін Ламберт  $W$ -функциясын қолдануды қажет ететін кейбір физикалық есептер қарастырылады.

**Түйінді сөздер:** Ламберт  $W$ -функциясы, трансценденттік теңдеулер, физикалық есептер.

### Abstract

The Lambert  $W$  function is a relatively new mathematical function that remains unknown to a wide range of specialists. Meanwhile, it allows to find exact solutions to a broad class of transcendental equations, which previously could only be solved by numerical methods. The article discusses some physical problems where the use of the Lambert  $W$  function becomes necessary.

**Key-words:** Lambert  $W$  function, transcendental equations, physical problems.

### 1. Введение

$W$ -функция Ламберта была введена в научный оборот в конце 1980-х годов группой математиков [1], которые назвали её в честь немецкого учёного И. Ламберта. Необходимость введения этой функции возникает при рассмотрении трансцендентного уравнения вида

$$we^w = x. \quad (1)$$

Данное уравнение неразрешимо относительно  $w$  в элементарных функциях. Однако можно разложить экспоненту в ряд по степеням  $w$ :

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = 1 + w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{6} + \frac{w^4}{24} + \dots, \quad (2)$$

благодаря чему уравнение (1) примет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{n+1}}{n!} = x. \quad (3)$$

Далее следует применить теорему Лагранжа об обращении степенных рядов и найти обратный ряд для нахождения  $w$  по степеням  $x$ . Этот ряд имеет вид:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n = x - x^2 + \frac{3}{2} x^3 - \frac{8}{3} x^4 + \frac{125}{24} x^5 - \frac{54}{5} x^6 + \dots \quad (4)$$

Формула (4) и представляет собой разложение в ряд  $W$ -функции Ламберта, а если быть строгими – разложение основной её ветви [2]. Дело в том, что уравнение (1) всегда имеет бесконечное число корней, большинство из которых комплексные. Приведённый ряд позволяет найти действительный корень уравнения. Таким образом,  $W$ -функция Ламберта  $W(x)$  определяется как решение функционального уравнения

$$W(x)e^{W(x)} = x. \quad (5)$$

$W$ -функция является многозначной, то есть одному значению  $x$  соответствует множество значений  $W(x)$ . Эти значения называют ветвями и обозначают  $W_k(x)$ , где  $k = 0, \pm 1, \pm 2$  и т.д. Ветви, отличные от  $W_0(x)$  и  $W_{-1}(x)$ , всегда комплексные. Ветвь  $W_0(x)$  называют основной ветвью [3, с. 8].

В рамках данной статьи мы ограничимся рассмотрением только действительной области функции, график которой представлен на рисунке 1.

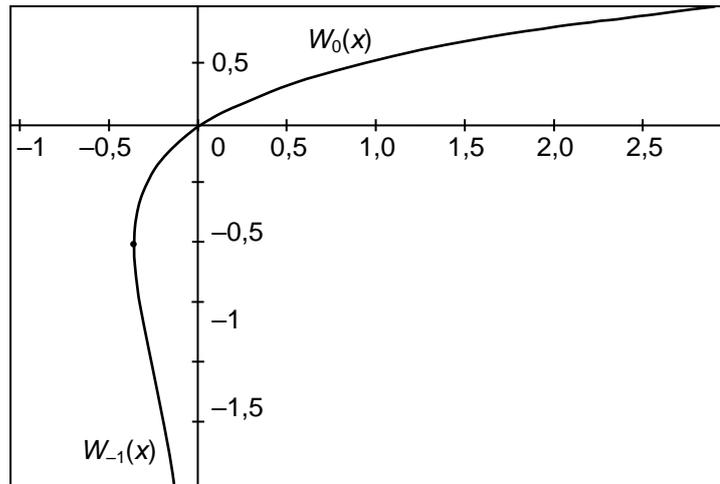


Рисунок 1. График действительной области  $W$ -функции Ламберта

Область определения функции есть интервал  $[-1/e; +\infty)$ , на котором она принимает значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В интервале  $(-1/e; 0)$  функция двузначна. Точка с координатами  $(-1/e; -1)$  делит график на верхнюю ветвь  $W_0(x)$  и нижнюю ветвь  $W_{-1}(x)$ .

Перечислим некоторые свойства  $W$ -функции. Из определения функции следует соотношение:

$$e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}. \quad (6)$$

При  $x > 0$  выполняется тождество

$$\ln W(x) = \ln x - W(x). \quad (7)$$

Нетрудно также убедиться в справедливости формулы

$$W(x \ln x) = \ln x = \ln W(x) + W(x). \quad (8)$$

Производная  $W$ -функции определяется выражением:

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}, \quad (9)$$

где  $x \neq -1/e$ ,  $x \neq 0$ . В точке  $x = 0$  производная  $W'(0) = 1$ .

Интеграл от  $W$ -функции Ламберта равен:

$$\int W(x) dx = x \left[ W(x) - 1 + \frac{1}{W(x)} \right] + C. \quad (10)$$

## 2. Точное решение трансцендентных уравнений

$W$ -функция Ламберта позволяет записать точное решение не только уравнения вида (1), но и большого числа других трансцендентных уравнений, содержащих логарифмы и экспоненты. Рассмотрим, например, уравнение

$$x + \ln x = a. \quad (11)$$

Потенцируя уравнение, придадим ему форму:

$$xe^x = e^a. \quad (12)$$

Пользуясь определением  $W$ -функции Ламберта (5), получаем формулу для нахождения корня:

$$x = W(e^a). \quad (13)$$

В таблице 1 систематизированы трансцендентные уравнения, точно решаемые через  $W$ -функцию Ламберта. В справедливости приведённых решений можно убедиться непосредственной подстановкой.

Таблица 1. Трансцендентные уравнения, разрешимые через  $W$ -функцию Ламберта

Уравнение	Решение
$xe^x = a$	$x = W(a)$
$ax + \ln bx = c$	$x = \frac{1}{a} W\left(\frac{ae^c}{b}\right)$
$a^x = x^{-b}, a \neq 1$	$x = \frac{b}{\ln a} W\left(\frac{\ln a}{b}\right)$
$x^x = a$	$x = \frac{\ln a}{W(\ln a)}$
$x^b \ln x = a$	$x = e^{\frac{W(ab)}{b}}$
$ax = \ln bx,$ $a \neq 0, b \neq 0$	$x = -\frac{1}{a} W\left(-\frac{a}{b}\right)$
$x^n e^x = a$	$x = n W\left(\frac{a^{1/n}}{n}\right)$
$x^n b^x = a$	$x = \frac{n}{\ln b} W\left(\frac{a^{1/n}}{n \ln b}\right)$
$x + e^x = a$	$x = a - W(e^a)$
$a^x + bx = c,$ $a > 0, a \neq 1, b \neq 0$	$x = -\frac{1}{\ln a} W\left(\frac{\ln a}{b} \cdot a^{\frac{c}{b}}\right) + \frac{c}{b}$
$x + \ln(a + bx) = c$	$x = W\left(\frac{e^{a/b+c}}{b}\right) - \frac{a}{b}$

### 3. Решение физических задач с помощью $W$ -функции Ламберта

$W$ -функция Ламберта оказывается незаменимой в решении уравнений, возникающих при рассмотрении разнообразных физических задач. С её помощью решаются задачи о нахождении силы тока в цепи с последовательным соединением диода и резистора [4], определении дальности полёта тела при наличии сопротивления воздуха [5], движении вязкой жидкости по капилляру в поле тяжести [6], расчёте критических размеров ядерного реактора [3, с. 65] и др. Рассмотрим несколько задач, решение которых с привлечением  $W$ -функции Ламберта ранее не обсуждалось в научной литературе.

**Потенциал точечного заряда в плазме.** Как известно из электростатики, потенциал точечного заряда  $q$  в вакууме убывает с расстоянием  $r$  по закону

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (14)$$

где  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная. В плазме в силу поляризации окружающей среды потенциал точечного заряда убывает быстрее в соответствии с формулой

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{D}}, \quad (15)$$

где  $D$  – дебаевский радиус экранирования, зависящий от температуры плазмы и концентрации заряженных частиц [7, с. 16]. Если необходимо решить уравнение (15) относительно расстояния, то есть отыскать точку с заданным потенциалом, возникает необходимость применения  $W$ -функции Ламберта. Действительно, легко привести уравнение (15) к виду

$$\frac{r}{D} e^{\frac{r}{D}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 D \varphi}. \quad (16)$$

Тогда из определения  $W$ -функции Ламберта (5) следует, что

$$r = D \cdot W\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 D \varphi}\right). \quad (17)$$

**Уравнение Дитеричи.** В технической термодинамике используется большое число уравнений состояния газа, описывающих связь между параметрами газов точнее уравнения Менделеева – Клапейрона. Одним из таких уравнений является уравнение Дитеричи, имеющее вид:

$$p = \frac{RT}{V - b} e^{-\frac{a}{RTV}}, \quad (18)$$

где  $p$ ,  $V$ ,  $T$  – давление, объём и температура газа,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $a$  и  $b$  – индивидуальные для каждого газа константы, учитывающие взаимодействие молекул [8]. Покажем, что уравнение Дитеричи решается относительно температуры через  $W$ -функцию Ламберта. Для этого преобразуем уравнение:

$$\frac{1}{p(V - b)} = \frac{1}{RT} e^{\frac{a}{RTV}}. \quad (19)$$

Умножим обе части уравнения на  $a/V$ :

$$\frac{a}{pV(V - b)} = \frac{a}{RTV} e^{\frac{a}{RTV}}. \quad (20)$$

Применяя определение  $W$ -функции Ламберта, получаем:

$$\frac{a}{RTV} = W\left(\frac{a}{pV(V - b)}\right). \quad (21)$$

Окончательно для температуры газа справедливо выражение:

$$T = \frac{a}{RV \cdot W\left(\frac{a}{pV(V - b)}\right)}. \quad (22)$$

**Наполнение сосуда с отверстием в дне.** Рассмотрим цилиндрический сосуд высотой  $H$  и радиусом  $R$ , в который поступает жидкость с постоянной объёмной скоростью  $Q$ . В дне сосуда имеется малое отверстие радиуса  $r$ . Найдём закон изменения уровня жидкости с течением времени.

Скорость истечения жидкости из малого отверстия подчиняется формуле Торричелли:

$$v = \sqrt{2gh}, \quad (23)$$

где  $h$  – мгновенный уровень жидкости в сосуде. Пренебрегая эффектом сжатия струи, будем полагать, что площадь поперечного сечения струи равна площади поперечного сечения отверстия  $\pi r^2$ . В таком случае за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  из сосуда вытекает объём

$$\pi r^2 v dt = \pi r^2 \sqrt{2gh} \cdot dt. \quad (24)$$

За это же время в сосуд поступает объём жидкости  $Qdt$ . Значит, уравнение, описывающее изменение объёма жидкости в сосуде, имеет вид:

$$dV = Qdt - \pi r^2 \sqrt{2gh} \cdot dt. \quad (25)$$

Для цилиндра  $dV = \pi R^2 dh$ , благодаря чему получаем:

$$\pi R^2 \frac{dh}{dt} = Q - \pi r^2 \sqrt{2gh}. \quad (26)$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int_0^h \frac{dh}{Q - \pi r^2 \sqrt{2gh}} = \int_0^t \frac{dt}{\pi R^2}. \quad (27)$$

Воспользуемся табличным интегралом:

$$\int \frac{dx}{a - b\sqrt{x}} = -\frac{2}{b^2} \left[ a \ln(a - b\sqrt{x}) + b\sqrt{x} \right] + const. \quad (28)$$

После интегрирования имеем:

$$t = \frac{R^2}{g\pi r^4} \left( Q \ln \frac{Q}{Q - \pi r^2 \sqrt{2gh}} - \pi r^2 \sqrt{2gh} \right). \quad (29)$$

Это уравнение позволяет отыскать время подъёма уровня до некоторой высоты  $h$ . Как легко увидеть, уравнение имеет смысл, если выполняется условие

$$Q > \pi r^2 \sqrt{2gh}, \quad (30)$$

в противном случае уровень  $h$  не может быть достигнут. Уравнение (29) трансцендентно относительно  $h$  и может быть решено с помощью  $W$ -функции. Для этого придадим уравнению вид:

$$-\frac{\pi r^4 gt}{QR^2} = \ln \left( 1 - \frac{\pi r^2 \sqrt{2gh}}{Q} \right) + \frac{\pi r^2 \sqrt{2gh}}{Q}. \quad (31)$$

Вычтем из обеих частей равенства единицу, а затем потенцируем:

$$e^{-1 - \frac{\pi r^4 gt}{QR^2}} = \left( 1 - \frac{\pi r^2 \sqrt{2gh}}{Q} \right) e^{\frac{\pi r^2 \sqrt{2gh}}{Q} - 1}. \quad (32)$$

Умножив обе части на  $-1$ , получим:

$$-e^{-1 - \frac{\pi r^4 gt}{QR^2}} = \left( \frac{\pi r^2 \sqrt{2gh}}{Q} - 1 \right) e^{\frac{\pi r^2 \sqrt{2gh}}{Q} - 1}. \quad (33)$$

Применим определение  $W$ -функции Ламберта:

$$\frac{\pi r^2 \sqrt{2gh}}{Q} - 1 = W \left( -e^{-1 - \frac{\pi r^4 gt}{QR^2}} \right). \quad (34)$$

Окончательно искомая зависимость уровня жидкости от времени выглядит так:

$$h = \frac{Q^2}{2g\pi^2 r^4} \left[ W \left( -e^{-1 - \frac{\pi r^4 gt}{QR^2}} \right) + 1 \right]^2. \quad (35)$$

**Испарение жидкости в сосуде.** Жидкость с молярной массой  $M$  и плотностью  $\rho$  частично заполняет закрытый цилиндрический сосуд сечением  $S$ , остальная часть которого содержит воздух объёмом  $V$ . В начальный момент времени пары жидкости в воздухе отсутствуют. Установим закон испарения жидкости, то есть зависимость массы пара от времени. Температура системы постоянна и равна  $T$ , давление насыщенных паров жидкости при данной температуре  $p_n$ . Будем также считать начальную массу жидкости достаточно большой, чтобы она не испарилась полностью.

Скорость испарения жидкости определяется по формуле Герца – Кнудсена:

$$\frac{dm}{dt} = \alpha S (p_n - p) \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}}, \quad (36)$$

где  $\alpha$  – коэффициент испарения жидкости ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ), который будем полагать известным,  $p$  – парциальное давление пара над поверхностью жидкости [9, с. 203]. Это давление может быть рассчитано по закону Менделеева – Клапейрона:

$$p = \frac{mRT}{MV_{\text{п}}}, \quad (37)$$

где  $m$  – масса пара,  $V_{\text{п}}$  – объём, занимаемый паром. Учтём, что при испарении жидкости массой  $m$  объём сосуда, доступный пару, становится равен

$$V_{\text{п}} = V + \frac{m}{\rho}. \quad (38)$$

Объединяя уравнения (36)–(38), получим:

$$\frac{dm}{dt} = k \left( p_{\text{н}} - \frac{\rho RT}{M} \frac{m}{m + \rho V} \right), \quad (39)$$

где для краткости введено обозначение

$$k = \alpha S \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}}. \quad (40)$$

Разделим переменные и интегрируем:

$$\int_0^m \frac{(m + \rho V) dm}{m(p_{\text{н}} M - \rho RT) + p_{\text{н}} M \rho V} = \int_0^t \frac{k}{M} dt. \quad (41)$$

Воспользуемся табличным интегралом:

$$\int \frac{(x + a) dx}{bx + c} = \frac{(ab - c) \ln(bx + c) + bx}{b^2} + const. \quad (42)$$

Тогда после интегрирования:

$$m(p_{\text{н}} M - \rho RT) - \rho^2 VRT \ln \left( 1 + \frac{m(p_{\text{н}} M - \rho RT)}{p_{\text{н}} M \rho V} \right) = \frac{k(p_{\text{н}} M - \rho RT)^2 t}{M}. \quad (43)$$

Поделим обе части уравнения на  $p_{\text{н}} M \rho V$  и прибавим к обеим частям единицу:

$$1 + \frac{m(p_{\text{н}} M - \rho RT)}{p_{\text{н}} M \rho V} - \frac{\rho RT}{p_{\text{н}} M} \ln \left( 1 + \frac{m(p_{\text{н}} M - \rho RT)}{p_{\text{н}} M \rho V} \right) = 1 + \frac{k(p_{\text{н}} M - \rho RT)^2 t}{p_{\text{н}} M^2 \rho V}. \quad (44)$$

Если обозначить подлогарифмическое выражение буквой  $A$ , а правую часть уравнения – буквой  $B$ , получим:

$$A - \frac{\rho RT}{p_{\text{н}} M} \ln A = B. \quad (45)$$

Потенцируем уравнение:

$$A^{\frac{\rho RT}{p_{\text{н}} M}} e^A = e^B. \quad (46)$$

Возведём обе части в степень  $-\rho_{\text{н}} M / \rho RT$  и затем умножим на такой же коэффициент:

$$-\frac{A p_{\text{н}} M}{\rho RT} e^{-\frac{A p_{\text{н}} M}{\rho RT}} = -\frac{p_{\text{н}} M}{\rho RT} e^{-\frac{B p_{\text{н}} M}{\rho RT}}. \quad (47)$$

Тогда из определения  $W$ -функции Ламберта следует:

$$-\frac{A p_{\text{н}} M}{\rho RT} = W \left( -\frac{p_{\text{н}} M}{\rho RT} e^{-\frac{B p_{\text{н}} M}{\rho RT}} \right). \quad (48)$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим закон испарения:

$$m = \frac{p_n M \rho V}{\rho RT - p_n M} \left[ 1 + \frac{\rho RT}{M} W \left( -\frac{p_n M}{\rho RT} e^{-\frac{p_n M}{\rho RT} \left( 1 + \alpha S \sqrt{\frac{M}{2\pi RT} \frac{(p_n M - \rho RT)^2 t}{p_n M^2 \rho V}} \right)} \right) \right]. \quad (49)$$

#### Список использованных источников:

1. Corless R. M., Gonnet G.H., Hare D. E. J. et al. On the Lambert  $W$  function. // Adv. Comput. Math. 1996. Vol. 5. – p. 329–359. URL: <https://cs.uwaterloo.ca/research/tr/1993/03/W.pdf> (дата обращения: 01.10.2024).
2. Weisstein E.W. Lambert  $W$ -Function. From MathWorld – A Wolfram Web Resource. URL: <https://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html> (дата обращения: 01.10.2024).
3. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К.  $W$ -функция Ламберта и её применение в математических задачах физики. – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006. – 160 с.
4. Banwell T. C., Jayakumar A. Exact Analytical Solution for Current Flow Through Diode with Series Resistance. – Electronics Lett., 2000. Vol. 36. – p. 291–292.
5. Packel E., Yuen D. Projectile Motion with Resistance and the Lambert  $W$  Function. – College Math. J. 2004. Vol. 35. – p. 337–350.
6. Fries N., Dreyer M. An Analytic Solution of Capillary Rise Restrained by Gravity. – Journal of Colloid and Interface Science 2008. Vol. 320 No. 1. – p. 259–263.
7. Котельников И.А., Ступаков Г.В. Лекции по физике плазмы. – Новосибирск: НГУ, 1996. – 136 с.
8. Diener equation. – Oxford Reference. URL: <https://www.oxfordreference.com/display/10.1093/oi/authority.20110803095717529>.
9. Kolasinski K.W. Surface Science: Foundations of Catalysis and Nanoscience. – John Wiley & Sons Ltd, 2012. – 562 p.

УДК 74.2

## РАСШИРЕНИЕ ПОЛЕЙ

Пономаренко Болат Михайлович  
Учитель математики, педагог  
КГУ «Общеобразовательная школа №23 имени  
М.Козыбаева отдела образования  
города Костаная» управления  
образования Костанайской области  
г.Костанай, Казахстан  
E-mail: [bolat15102002@mail.ru](mailto:bolat15102002@mail.ru)

### Аңдатпа

Бұл жұмыстың негізгі мақсаты-алгебрадағы өрістерді кеңейту тұжырымдамасын зерттеу. Өрістерді кеңейту сандар теориясы мен алгебралық геометриядағы өрістердің құрылымы мен олардың қасиеттерін түсінуді тереңдетудің маңызды құралы болып табылады. Мақалада кеңейтудің негізгі түрлері, олардың мысалдары мен қосымшалары және оларды зерттеу үшін қолданылатын әдістер қарастырылады.

**Түйінді сөздер:** өрістерді кеңейту, алгебра, сандар теориясы, алгебралық геометрия.

### Аннотация

Ключевая цель данной работы — исследование концепции расширения полей в алгебре. Расширение полей является важным инструментом в теории чисел и алгебраической геометрии, позволяющим углубить понимание структуры полей и их свойств. В статье рассматриваются основные виды расширений, их примеры и приложения, а также методы, используемые для их изучения.

**Ключевые слова:** расширение полей, алгебра, теория чисел, алгебраическая геометрия.

### Abstract

The key objective of this paper is to investigate the concept of field extensions in algebra. Field extensions are an important tool in number theory and algebraic geometry to deepen the understanding of

## МАЗМҰНЫ

## СОДЕРЖАНИЕ

### ПЛЕНАРЛЫҚ ОТЫРЫС

#### ПЛЕНАРНОЕ ЗАСЕДАНИЕ

<i>Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университетінің Әлеуметтік-тәрбие жұмыстары жөніндегі проректоры, техника ғылымдарының кандидаты Темирбеков Нұрлыхан Мұқанұлы</i> <b>Алғы сөз / Проректор по социально-воспитательной работе Костанайского регионального университета имени Ахмет Байтұрсынұлы, кандидат технических наук Темирбеков Нұрлыхан Мұқанұлы. Приветственное слово</b>	3
<i>Жампеисова Корлан Кабыкеновна, д.п.н., профессор, Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан.</i> <b>Инновационные методологии в высшем образовании</b>	4
<i>Усольцев Александр Петрович, д.п.н., профессор, Уральский государственный педагогический университет, г. Екатеринбург, Россия.</i> <b>Реализация принципа наглядности при обучении физике в современных условиях</b>	7
<i>Эндерс Петер, д.ф.-м.н., заочный доцент, Университет прикладных наук, г. Вильдау, Германия.</i> <b>Использование оригинальных текстов ведущих мастеров, чтобы очевиднее выявить связи между областями физики</b>	10

#### СЕКЦИЯ 1

#### ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУДАҒЫ ЖАҢА ӘДІСТЕР МЕН ТЕХНОЛОГИЯЛАР: ТӘЖІРИБЕ, ПРАКТИКА ЖӘНЕ ПЕРСПЕКТИВАЛАР

#### НОВЫЕ МЕТОДЫ И ТЕХНОЛОГИИ В ПРЕПОДАВАНИИ ФИЗИКИ: ОПЫТ ПРАКТИКА И ПЕРСПЕКТИВЫ

<i>Акмагамбетова Г.К.</i> Физика пәніне арналған жиынтық бағалау тапсырмаларын сабақ уақытында пайдаланудың тиімді әдістері	13
<i>Белгибаева А.Ж., Кульгускина Е.О.</i> Преимущества и трудности в проведении лабораторных работ по физике	18
<i>Гаппаров Ж.А.</i> Жобалау негіздері мен жасанды интеллект және SMART-технологияларының физика пәнін оқытудағы үйлесімді көрінісі	20
<i>Жусупов К.С.</i> Роль физики в подготовке специалистов новых профессий nanoиндустрии	25
<i>Касымова А.Г., Туктубаева С.А., Курмангалиева А.А.</i> Внедрение проблемного обучения и CLIL на уроках физики как средство развития исследовательских навыков учащихся	28
<i>Коновалюк А.Ю., Дёмина Д.С., Касымова А.Г.</i> Исследование опыта использования современных технологий обучения учителями физики в Костанайской области	35
<i>Курмангалиева А.А., Туктубаева С.А.</i> Анализ уровня подготовки учащихся 12-х классов к работе с экспериментальными данными и графиками на уроках физики: оценка навыков расчета погрешностей и построения графиков	38
<i>Омарова А.К., Калакова Г.К.</i> Как оценивать знания и навыки учеников на уроках физики: современные стратегии и практические советы	43
<i>Омырали А.К., Телегина О.С.</i> Физический эксперимент в школе: этапы развития и его роль в учебном процессе	47

<i>Пепке В.С., Телегина О.С.</i> Особенности преподавания физики для одаренных детей	50
<i>Телягисова М.Т., Калакова Г.К.</i> Проблемное обучение на уроках физики в современной школе	52
<i>Фазылахметова А.Б., Нупирова А.М.</i> Физиканы оқытуда эксперименттік тапсырмаларды зерттеу әдісін қолдана отырып білім алушылардың функционалды сауаттылығын дамыту	56
<i>Ховалкина А., Телегина О.С.</i> Методические особенности и реализации коллаборативного подхода в процессе обучения физике	58
<i>Шмулова А.В., Калакова Г.К.</i> Цифровые образовательные ресурсы на уроках физики	63
<i>Шолпанбаева Г.А.</i> Физикалық ұғымды қалыптастыру ерекшеліктері	67

## СЕКЦИЯ 2

### МАТЕМАТИКА: ЗЕРТТЕУ ЖӘНЕ ОҚЫТУ МӘСЕЛЕЛЕРІ



#### МАТЕМАТИКА: ПРОБЛЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ПРЕПОДАВАНИЯ

<i>Тохметова М.Б., Орумбаева Н.Т.</i> Влияние системы динамической геометрии Geogebra на понимание геометрического смысла определенного интеграла	70
<i>Москаленко А.Т.</i> Применение $W$ -функции Ламберта в решении физических задач	73
<i>Пономаренко Б.М.</i> Расширение полей	79
<i>Муратбек Р., Сәтбаева А.Ф.</i> Цифрлық ресурстарды қолдану арқылы оқушы деңгейін қалай көтеруге болады?	82
<i>Хасенова Г.Б.</i> Математиканы оқытудағы сараланған тәсілді зерттеу	85
<i>Рихтер Т.В., Ломова Л.А.</i> Электронные образовательные ресурсы как средство формирования профессиональных компетенций студентов, обучающихся по профессии «Мастер по лесному хозяйству» (на примере математики)	89
<i>Мирланұлы А.</i> Мектеп математика курсына тригонометриялық теңдеулер жүйесін шешу әдістерін қолдану	93
<i>Тапал У.Б., Бисебаева А.К.</i> Современные методы преподавания математики: от традиционного к интерактивному обучению	98
<i>Каиржанова А.К., Асканбаева Г.Б.</i> Математикалық сауаттылықта стереометрия бөлімін оқыту ерекшеліктері	104
<i>Асканбаева Г.Б., Алимбаев А.А.</i> Геометрияның кейбір теоремаларын олимпиадалық есептерді шығаруда қолдану	109
<i>Құрманбек Т.А., Асканбаева Г.Б., Алимбаев А.А.</i> Ізі 0-ге тең матрицалық жиындардағы $X^2 = A$ түріндегі теңдеуді шешу.	114
<i>Раисова Г.Т., Абилова К.А.</i> Планиметрические задачи на построение в курсе геометрии 7 класса	120
<i>Демисенова Ж.С., Жақсыбай Н.Ж.</i> Бесінші сынып оқушыларына бөлшектерді оқытуда функционалды сауаттылықты өмірлік мысалдармен қалыптастыру	124
<i>Абилова К.А., Захаров С.З.</i> Проблемы преподавания алгебры и начала анализа в школе: пути решения	127
<i>Демисенова Ж.С., Амирова Н.К.</i> Использование современных технологий для развития критического мышления на уроках алгебры в 8 классе как способ повышения мотивации к обучению	130
<i>Шулғауова С.Ж., Нурмагамбетова Б.С.</i> Бағдарланған есептерді оқыту арқылы оқушылардың сыни ойлау қабілетін дамыту	133
<i>Фазылова А.А., Алдамбергенова К.Т.</i> Командное обучение и применение коллаборативных технологий в алгебре 8 класса	136

<i>Фазылова А.А., Ибрагимова Н.Е.</i> Электрондық білім беру ресурстарын оқушылардың математикалық ойлауындамыту үшін пайдалану	139
<i>Альмухамбетова А.А., Туматаев Д.Ж., Демисенов Б.Н.</i> Об изоморфизме классических алгебр Ли $B_2$ и $C_2$	142
<i>Байзахова Г.Р., Шунгулова З.И.</i> Негізгі мектепте геометрияны оқыту процесінде оқушылардың зерттеу дағдыларын қалыптастырудың педагогикалық шарттары	146

### СЕКЦИЯ 3

#### ИНФОРМАТИКА ҒЫЛЫМ РЕТІНДЕ: ТАРИХ, ҚАЗІРГІ ЖАҒДАЙ ЖӘНЕ ДАМУ ПЕРСПЕКТИВАЛАРЫ



#### ИНФОРМАТИКА КАК НАУКА: ИСТОРИЯ, СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ

<i>Акжигитов Е.М., Ерсұлтанова З.С.</i> Влияние нейросетей на музыку: новые возможности и вызовы	150
<i>Асембекова А.К.</i> Информатика ғылым ретінде: тарих, қазіргі жағдай және даму перспективалары	153
<i>Байғужина М.С.</i> Информатика как наука: история, современное состояние и перспективы развития	157
<i>Даулетбаева Г.Б., Қостанай Е., Даулетбаева А.</i> Роботтың сызық бойымен қозғалысының «Толқын» алгоритмі	161
<i>Даулетбаева Г.Б., Келебаева А., Ошанова К.</i> LEGO роботының сызық бойымен қозғалуға арналған «Зигзаг» алгоритмін іске асыру	164
<i>Ерсұлтанова З.С., Келебаева А.М., Ошанова К.Қ.</i> Веб сайттарды жасау технологияларын дамыту	168
<i>Занегина С.И.</i> Интернет-торговля в Казахстане: как защитить свои права	171
<i>Иксанова Н.Т., Радченко Т.А.</i> «Основы машинного обучения» в образовании	174
<i>Исабаев А. Б., Жарлыкасов Б.Ж., Абдуллина Д.М.</i> Иммерсивные технологии в образовании как новые возможности для преподавания естественных наук	177
<i>Куракина Е.В., Герасёва И.М.,</i> Использование технологий в обучении: как цифровые инструменты способствуют развитию интеллектуальных способностей	181
<i>Қазбекқызы Қ., Даулетбаева Г.Б.</i> Жасанды интеллект: тарихы, мүмкіндіктері және болашағы	184
<i>Молдабекова А. Ж.</i> Влияние искусственного интеллекта на будущее образования Республики Казахстан	187
<i>Мякушева Д.П., Архипова Г.Ю., Нуркенова Н. А.</i> Интерактивный рабочий лист как средство организации формативного оценивания на уроках информатики	190
<i>Орлов М.В., Радченко П.Н.</i> Адаптивная технология Scrum как инструмент достижения образовательных целей	194
<i>Оспанова Ш.Б.</i> Развитие навыков создания алгоритмов для решения практических задач у учащихся с использованием метода проблемного обучения	196
<i>Радченко Т.А., Калинин А.Е., Халезина К.Д.</i> Подход к обучению информатике через геймификацию процесса	199
<i>Радченко Т.А., Радченко П.Н.</i> Искусственный интеллект в образовании: трансформация учебного процесса через инновационные технологии и онлайн-форматы	202
<i>Сафронов А.В.</i> Об использовании искусственного интеллекта (ИИ) в образовательном процессе и о возможной замене традиционной подачи материала	205
<i>Серикбаев Б.Б., Ерсұлтанова З.С.</i> Особенности разработки мобильных приложений в обучении программированию	209
<i>Серикбаева А.Б., Даулетбаев Т.Н.</i> Кохоненнің өзін-өзі ұйымдастыратын карталары	213

<i>Соловьева С.В.</i> Совершенствование средств обучения информатике в школе через разработку мобильных приложений	217
<i>Удербаета Н.К., Жарлыкасов Б.Ж.</i> Использование иммерсивных технологий для обучения цифровой грамотности младших школьников	222
<i>Хакимова Т., Спабекова Ж., Закарянова Н.</i> Биткойн криптовалюта және блокчейн технологиясы: олардың ерекшеліктері	225
<i>Шәкімов А.М.</i> Внедрение искусственного интеллекта в школьную образовательную программу	229

## СЕКЦИЯ 4

### КӘСІПТІК БІЛІМ БЕРУДІҢ МӘСЕЛЕЛЕРІ МЕН ПЕРСПЕКТИВАЛАРЫ



#### ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

<i>Абатов Н.Т.</i> Білім беру жүйесіне реформа жасау – уақыт талабы	232
<i>Абдигалпарова Г.М.</i> Ахмет Байтұрсынұлының ағартушылық мұрасы	235
<i>Андрюенко О.А.</i> О необходимости подготовки студентов к организации методической работы в условиях комплексного центра социального обслуживания населения	238
<i>Архипова К.Г., Колисниченко Ю.Г.</i> Проблемы и перспективы профессионального образования Казахстана в сфере искусства	242
<i>Архипова К.Г., Нарбек М.Б.</i> Развитие творческого воображения с использованием нетрадиционных техник рисования	246
<i>Ахметжанова Б.Ж., Жаксыбаев Е.Е., Майленова А.А.</i> Командообразование в современной школе в контексте повышения эффективности образовательной деятельности	248
<i>Бабич С.С.</i> Проблемы и перспективы подготовки руководителей хореографических коллективов в высших учебных заведениях	253
<i>Белогурова Н.С., Власова Е.В.</i> Lesson Study как ресурс для решения проблемы функциональной грамотности у учащихся на уроках математики, информатики и физики	256
<i>Буркулова М.С.</i> Формирование математических знаний у детей дошкольного возраста посредством метода сторителлинг	259
<i>Валиуллина А., Телегина О.С., Касымова А.Г.</i> Педагогическая поддержка учеников с интеллектуальными нарушениями в процессе обучения	262
<i>Дементей А.Г., Ли Е.Д., Байжанова С.</i> Мнемотаблицы как средство развития связной речи у детей дошкольного возраста	266
<i>Емельянова Л.А.</i> К проблеме профессиональной социализации студентов на этапе вузовского образования	269
<i>Ерденова Н.Б., Федулова Т.Б.</i> Организация внутришкольного контроля	272
<i>Есионова А.Н.</i> STEM-компетенции как первый этап профессионального образования школьников	277
<i>Жусупова Д.Ж., Лапикова М.С.</i> Занятия керамикой как способ развития творческих способностей у учащихся в учреждениях дополнительного образования	281
<i>Жусупова Д.Ж., Луковенко О.С.</i> Интеграция искусства в профессиональном обучении: новые горизонты для будущих учителей художественного труда	284
<i>Задорожная С.Н.</i> Профессиональная подготовка будущих учителей музыки в вузе на основе преподавания музыкально-теоретических дисциплин	288
<i>Қайпбаева А., Нурсейтова А.А.</i> Әбіш Кекілбаев шығармаларының ерекшеліктері	293
<i>Калиева С.А., Загородняя О.Ф.</i> Особенности билингвального обучения в контексте применения игровых модулей обучения русскому языку и литературе в общеобразовательных школах	296
<i>Калиниченко О.В., Назмутдинов Р.А., Ахметбекова З.Д.</i> Application of Distanced Education Technologies	301

<i>Касымова С.И.</i> Исследование договорного права в республике Казахстан. Актуальное состояние и перспективы на 2024 год	304
<i>Койшыгулова Д.Ж.</i> Ыбырай Алтынсариннің халық ағарту саласындағы қызметі	307
<i>Кулмагамбетова Б.Ж.</i> Ыбырай Алтынсаринның эпистолярлық мұрасы	310
<i>Куракина Е.В., Герасёва И.М.</i> Использование технологий в обучении: как цифровые инструменты способствуют развитию интеллектуальных способностей	314
<i>Логвиненко П.А.</i> Внедрение технологии прототипирования на базе научно-производственной лаборатории университета	318
<i>Луковенко Т.Г.</i> Экологическое воспитание детей: основы формирования ответственного отношения к природе с дошкольного возраста	321
<i>Нарумова М.В., Руш Т.А.</i> Современные практические приемы моделирования казахской национальной одежды	324
<i>Наумова Л.В., Ли Е.Д., Байжанова С.А.</i> Формирование национальных ценностей у дошкольников на основе реализации программы «Біртұтас тәрбие»	328
<i>Оканова А.Т.</i> Саморазвитие личности через проблемы образования в Казахстане на современном этапе и пути их решения	331
<i>Оспанова Ш.Ж., Шарипов А.С.</i> Қазақстан республикасы мен оңтүстік корей арасындағы өзара қатынастарының дамуы	333
<i>Сералиев А.Б., Алиаскаров Д.Т., Бактыбеков М.Б.</i> Преподавание региональной географии: развитие глобальной компетенции учащегося	335
<i>Тимофеева Н.С.</i> Рефлексивная компетентность будущих педагогов-психологов	339
<i>Турлубаева Д.К.</i> Перспективы и проблемы музыкального образования в условиях современного общества	344
<i>Тупиков И.Ю.</i> Исследование причин иммиграции тюрок на территорию Ближнего Востока	347
<i>Чикова И.В.</i> Полисубъектный подход в образовании: развитие и проявление субъектности в условиях высшей школы	350
<i>Чикова И.В.</i> К проблеме сближения ценностей субъектов образовательного пространства высшей школы	354
<i>Швацкий А.Ю.</i> Формирование профессионального сознания в структуре вузовской подготовки педагогических кадров	358
<i>Шумейко Т.С., Зубко Н.Н.</i> Реализация STEM-подхода в дополнительном техническом образовании детей	362

**«ҚАЗІРГІ БІЛІМ БЕРУДІ ДАМЫТУДЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ» АТТЫ  
СҰЛТАНҒАЗИН ОҚУЛАРЫ ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҒЫЛЫМИ–ПРАКТИКАЛЫҚ КОНФЕРЕНЦИЯ  
МАТЕРИАЛДАРЫ**

**МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО–ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ  
СУЛТАНГАЗИНСКИЕ ЧТЕНИЯ «АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ РАЗВИТИЯ СОВРЕМЕННОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ»**

---

**Материалдар жинағын  
Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай  
өңірлік университеті  
Ө.Сұлтанғазин атындағы  
Педагогикалық институтының  
физика, математика және цифрлық  
технологиялар кафедрасында  
теріліп, беттелді**

**Сборник материалов набран и сверстан  
кафедрой физики, математики и цифровых  
технологий  
Педагогического института  
им. У.Султангазина  
Костанайского регионального университета  
имени Ахмет Байтұрсынұлы**

**Компьютерлік беттеу:  
Шумейко Т.С., Радченко Т.А.**

**Компьютерная верстка:  
Шумейко Т.С., Радченко Т.А.**

**Мекенжай:  
110000, Қостанай қ., Байтұрсынов көш. 47  
(Пединститут ғимараты, Тәуелсіздік к-сі  
118, 419 каб.).  
Тел.: 8 (7142) 54-83-44 (ішкі 115)**

**Адрес:  
110000, г. Костанай, ул. Байтұрсынова 47  
(корпус Пединститута, ул.Тәуелсіздік  
118, каб. 419).  
Тел.: 8 (7142) 54-83-44 (вн.115)**

**Пішімі 60\*84/18.  
Көлемі 23,2 б.т.  
Электронды нұсқасы университеттің  
ksu.edu.kz сайтында орналастырылған  
желтоқсан, 2024 жыл**

**Формат 60\*84/18.  
Объем 23,2 п.л.  
Электронный вариант размещен на сайте  
университета ksu.edu.kz  
декабрь 2024 года**