



Мамыр 2002 ж.
№ 6-2

А. Байтұрсынов атындағы
Қостанай мемлекеттік
университетінің

ҒЫЛЫМИ ХАБАРШЫСЫ

Жаратылыстану-техникалық
ғылымдар сериясы



ВЕСТНИК НАУКИ

Костанайского государственного
университета
имени А. Байтурсынова

Серия
естественно-технических
наук

Қостанай
2002 жыл

ҒЫЛЫМИ ХАБАРШЫСЫ * ВЕСТНИК НАУКИ

Регистрационный № 986-Ж
1999 жылы құрылған
Основан в 1999 году

№ 6-2, май 2002 г.
Жылына 2 рет шығады
Выходит 2 раза в год

А. Байтұрсынов атындағы
Қостанай мемлекеттік университетінің
ҒЫЛЫМИ ХАБАРШЫСЫ

*Жаратылыстану-техникалық
ғылымдар сериясы*



ВЕСТНИК НАУКИ

*Костанайского государственного университета
имени А. Байтұрсынова*

*Серия
естественно-технических
наук*

Бас редакторы - Главный редактор
Х.Х.Валиев

Редакция алкасы:

Бас редакторы:

доктор технических наук, профессор, академик МИА
Валиев Х.Х.

Бас редактордың орынбасары:

доктор технических наук, профессор, академик Каз МАИН
Баймухамедов М.Ф.

Шығарылымға жауапты:

кандидат химических наук, профессор
Снеговских Н.Б.

Редакция алкасының мүшелері:

- Ахметов И.С. - д.т.н., профессор, Рудненский индустриальный институт
- Бледных В.В. - д.т.н., профессор, Челябинский государственный агроинженерный университет
- Попов В.М. - д.т.н., профессор, Челябинский государственный агроинженерный университет
- Кипнис М.М. - д.ф.-м.н., профессор, Челябинский государственный педагогический университет
- Брызгалов А.Н. - д.ф.-м.н., профессор, Челябинский государственный педагогический университет
- Шипкова Д.З. - д.биол.н., профессор, Челябинский государственный педагогический университет
- Пугачев П.Г. - д.биол.н., профессор, Костанайский государственный университет им. А.Байтурсынова
- Шахбазян В.В. - д.т.н., профессор, Государственный инженерный институт Армении
- Арзуманян А.М. - д.т.н., профессор, Государственный инженерный институт Армении
- Майер Ф.Ф. - к.ф.-м.н., профессор, Костанайский государственный университет им. А.Байтурсынова
- Калаков Б.А. - к.ф.-м.н., доцент, Костанайский государственный университет им. А.Байтурсынова

чтобы минимизировать задержку доступа к информационным ресурсам при фиксиро-

ванной пропускной способности каналов связи.

УДК 517.54

Майер Ф.Ф.

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ, ВЫПУКЛЫХ В НАПРАВЛЕНИИ
МНИМОЙ ОСИ**

Рассмотрим класс $C(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, аналитических в круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функций $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, удовлетворяющих условию

$$|\arg[(1-z^2)f'(z)]| < \alpha \frac{\pi}{2}, z \in E \quad (1)$$

Класс $C(\alpha)$ является подклассом класса $K(\alpha)$ почти выпуклых порядка α функций $f(z)$ [1], [2], выделяемых условиями

$$\left| \arg \frac{f'(z)}{g'(z)} \right| < \alpha \frac{\pi}{2}, z \in E, \quad (2)$$

где $w = g(z)$ произвольная выпуклая в E функция, так как при $g(z) = g_0(z) = \ln[(1+z)/(1-z)]$ из (2) получается условие (1). Поэтому все функции класса $C(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, являются однолиственными и почти выпуклыми в E [3].

Пусть $f(z) \in C(\alpha)$. Рассмотрим сложную функцию $F(w) = f[g_0^{-1}(w)]$, аналитическую в полосе $D = \{w: |\operatorname{Im} w| < \pi/2\}$. Тогда в силу условия

$$(1) \quad |\arg F'(w)| < \alpha \pi/2, w \in D. \quad \text{На}$$

основании этого нетрудно установить (см., напр., [4]), что область $f(E) = F(D)$ достижима извне углами раствора $(1-\alpha)\pi$ с биссектрисами, параллельными мнимой оси. В частности, $C(\alpha) \in C(\alpha)$, а класс $C(\alpha)$ совпадает с классом функций [5], выпуклых в направлении мнимой оси.

Из (1) следует, что для функций $f(z) \in C(\alpha)$ имеет место интегральное представление

$$f(z) = \int_0^z \frac{P^\alpha(t)}{1-t^2} dt, \quad (3)$$

причем $P(z) \in P$, где P -класс аналитических в E функций, удовлетворяющих условию $P(0) = 1, \operatorname{Re} P(z) > 0, z \in E$.

Теорема 1. Если $f(z) \in C(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, то в круге $|z| \leq r$ имеют место оценки

$$\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\alpha \frac{1}{1+r^2} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^\alpha \cdot \frac{1}{1-r^2}, \quad (4)$$

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2(\alpha+1)} \left[\left(\frac{1+r}{1-r} \right)^{\alpha+1} - 1 \right], \quad (5)$$

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2z^2}{1-z^2} \right| \leq \frac{2\alpha r}{1-r^2}. \quad (6)$$

Оценки точные и достигаются для функции

$$f(z) = \frac{1}{2(\alpha+1)} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\alpha+1} - 1 \right]$$

Доказательство. В силу (3) $(1-z^2) \cdot f'(z) = P^\alpha(z)$. Так как $P(z) \in P$, то имеет место подчиненность ([6], с.356) $P(z) < (1+z)/(1-z)$.

Следовательно,

$$(1-z^2)f'(z) < \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha \quad (7)$$

Отсюда для всех $z, |z| \leq r$, имеем оценку

$$\left| (1-z^2)f'(z) \right| \leq \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\alpha$$

Так как $|1-z^2| \geq 1-|z|^2$, то получаем правую из оценок (4). В силу подчиненности (7) в круге $|z| \leq r$ имеем

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\alpha \leq |(1-z^2)f'(z)| \leq (1+r^2)|f'(z)|$$

Отсюда получаем левую из оценок (4). Оценка (5) получается из оценки (4) интегрированием по отрезку радиуса от 0 до r .

В силу представления (3)

$$z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2z^2}{1-z^2} = \alpha z \frac{P'(z)}{P(z)} \quad (8)$$

Поскольку $P(z) < [(1+z)/(1-z)]$, то имеем

$$\ln P(z) = \ln \frac{1+w(z)}{1-w(z)},$$

где $w(z)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца.

Отсюда

$$z \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{2zw'(z)}{1-w^2(z)}$$

В силу неравенства [7]

$$|w'(z)| \leq [1-|w(z)|^2]/(1-|z|^2) \quad \text{для всех}$$

$z, |z| \leq r$, получаем

$$\left| z \frac{P'(z)}{P(z)} \right| \leq \frac{2r}{1-r^2},$$

откуда на основании равенства (8) получаем оценку (6). Неулучшаемость оценок устанавливается простой проверкой.

Оценка (6) позволяет легко найти радиус выпуклости класса $C(\alpha)$. Известно, что радиусом выпуклости r^0 некоторого класса A аналитических функций $f(z)$ называется наибольшее из чисел r ($0 < r < 1$)

таких, что для каждой функции $f(z) \in A$ образ любой окружности $|z|=r, 0 < r < r^0$, есть выпуклая кривая.

Теорема 2. Радиус выпуклости r^0 класса $C(\alpha)$ определяется как наименьший положительный корень уравнения

$$r^4 - 2\alpha r^3 - 2r^2 - 2\alpha r + 1 = 0 \quad (9)$$

Доказательство. В силу оценки (6) получаем

$$\left| \operatorname{Re} \left[z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2z^2}{1-z^2} \right] \right| \leq \frac{2\alpha r}{1-r^2},$$

отсюда для всех $z, |z| \leq r$,

$$\operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \geq \min_{|z| \leq r} \operatorname{Re} \frac{2z^2}{1-z^2} - \frac{2\alpha r}{1-r^2} = -\frac{2r^2}{1+r^2} - \frac{2\alpha r}{1-r^2} = -\frac{2r^2 - 2r^4 + 2\alpha r + 2\alpha r^3}{1-r^4} = -1,$$

если $|r| \leq r$, где $r = r^0$ — наименьший положительный корень уравнения (9), т.е. в круге $|r| \leq r^0$ выполняется условие выпуклости функции $f(z)$.

Покажем, что радиус выпуклости является точным.

Для функции

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{(1+iz)^\alpha}{(1-iz)} \frac{dz}{1-z^2} \in C(\alpha)$$

имеем

$$z \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} = \frac{2z^2}{1-z^2} + \frac{2i\alpha z}{1+z^2}.$$

Поэтому, в точке $z = ir^0$ получаем

$$z \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} = -\frac{2r^2}{1+r^2} - \frac{2\alpha r}{1-r^2} = -1,$$

т.е. радиус выпуклости улучшить нельзя.

Обозначим через $M(\alpha)$ класс аналитических в E функций $w=F(z)$, $F(0)=0$, $F'(0)=1$, таких, что $F(z) = zf'(z)$, где функция $f(z) \in C(\alpha), 0 < \alpha \leq 1$. Заметим, что класс $M(\alpha) \subset M(1)$, где

$$M(1) = \left\{ F(z) : \operatorname{Re} \frac{1-z^2}{z} F(z) > 0, z \in E \right\} \quad \text{и}$$

$M(1)$ совпадает с классом типично вещественных функций. Для этого класса ра-

диус звездообразности определен в работе Р.Либеры [7]. Используя известную связь между выпуклыми и звездообразными функциями, выражающуюся соотношением

$f(z) \in S^0 \Leftrightarrow F(z) = z \cdot f'(z) \in S^*$,
получаем, что радиус звездообразности класса $M(\alpha)$ определяется уравнением (9), а при $\alpha=1$ получаем известный результат Р.Либеры [7].

$$r^* = \frac{1}{2} \left(\sqrt{5} + 1 - \sqrt{2(\sqrt{5} + 1)} \right) \approx 0,345$$

Теорему 2 можно уточнить, если известно, что разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора имеет пропуски членов, в частности, если $a_2 = 0$. Тогда

$$f'(z) = 1 + 3a_3 z^2 + \dots \quad \text{и}$$

$$P(z) = \left[f'(z) \cdot (1 - z^2) \right]^{1/\alpha} \quad \text{Отсюда в силу}$$

$$= 1 + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots, z \in E.$$

подчиненность $P(z) \prec (1+z)/(1-z)$ с учетом разложения $P(z)$ получаем оценки

$$|P(z)| \leq \frac{1+r^2}{1-r^2}, \quad \left| z \frac{P'(z)}{P(z)} \right| \leq \frac{4r^2}{1-r^4},$$

$$|z| \leq r.$$

В силу данных оценок получаем следующее усиление теоремы 2.

Теорема 3. Если функция $f(z) = z + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots$ аналитична в круге E и $f(z) \in C(\alpha)$, то функция $f(z)$ выпукла в круге $|z| \leq r^0$, где

$$r^0 = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\alpha + 1 - 2\sqrt{\alpha(\alpha + 2)}}{1 - 4\alpha}}, & \alpha \neq \frac{1}{4} \\ \sqrt{3}/3, & \alpha = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (10)$$

Радиус выпуклости является точным.

Доказательство. В силу приведенных выше оценок получаем

$$\operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \geq -\frac{2r^2}{1+r^2} - \frac{4\alpha r^2}{1-r^4} \geq -1$$

для всех z , $|z| \leq r^0$, где r^0 — наименьший положительный корень уравнения

$$(1-4\alpha) \cdot r^4 - 2(2\alpha+1)r^2 + 1 = 0,$$

т.е. $f(z)$ выпукла в круге $|z| \leq r^0$.

Для экстремальной функции

$$f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{1+z^2}{1-z^2} \right)^\alpha \frac{dz}{1-z^2} = z + a_3 z^3 + \dots \in C(\alpha)$$

в точках $z = ir, 0 < r < 1$, имеем

$$z \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} \Big|_{z=ir} = -\frac{2r^2}{1+r^2} - \frac{4\alpha r^2}{1-r^4} = -1$$

при $r = r^0$,

т.е. радиус выпуклости является точным.

Следствие 1. Если функция $f(z) \in C(\alpha)$ и $f(z)$ является нечетной в круге E , то она выпукла в круге $|z| \leq r^0$, где r^0 определяется по формуле (10), и радиус выпуклости является точным.

Следствие 1 вытекает из теоремы 3 в силу того, что для нечетных функций все коэффициенты $a_{2k} = 0$ при $k=1, 2, 3, \dots$

Литература

1. Reade M. The coefficiente of close-to-convex functions. -Duke Math. J., 1956, V.23, №3, p.459-462.
2. Renyi A. Some remarks on univalent functions. Изв., Матем. Ин-т Бълг. АН, 1959, т.3, №2, с.111-121.
3. Kaplan W. Close-to-convex schlicht functions.- Mich. Math. J., V.1, №2, 1952, p.169-185.
4. Аксентьев Л.А., Шабалин П.Л. Условия однолиственности с квазиконформным продолжением и их применение. - Изв. вузов, Математика, 1983, №2, с.5-14.
5. Robertson M.S. Amer. Journ. of Math., V. LVIII, 1936, p.465-472.
6. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.- М.: Наука, 1966.- 628 с.
7. Libera R.J. Some radius of convexity problems. Duke Math. J., V.31, №1, 1964, p.143-158.

Мазмұны-Содержание
Жаратылыстану-техникалық ғылымдар
Естественно-технические науки

1. Математика, экономика, информатика және жаңашыл технология - Математика, экономика, информатика и современные технологии	
<i>Абылхасенова Д.К., Токтаров Т.С.</i> Мониторинг в корпоративных сетях.....	3
<i>Аракелян А.Л., Оганесян В.М.</i> О необходимости и путях реинтеграции постсоветских республик.....	10
<i>Байманкулов А.Т., Бермагамбетов А.К., Калаков Б.А., Лифенко В.М.</i> Реализация лабораторного физического практикума посредством компьютерной графики на базе визуального языка программирования VISUAL FOXPRO 5.0.....	12
<i>Байманкулов А.Т., Исмаилов А.О., Калаков Б.А., Лифенко В.М.</i> Дидактическое обеспечение физпрактикума по механике в системе MATH-CAD.....	19
<i>Баймухамедова Г.С.</i> Оценка экономической эффективности деятельности системы оптовых производственно-технических рынков.....	24
<i>Баймухамедова Г.С.</i> Обоснование состава задач АСУ системы ОПТР.....	28
<i>Баймухамедов М.Ф., Баюк О.А.</i> К вопросу о технологии создания компьютерных обучающих систем на базе учебных структур знаний.....	31
<i>Бекенова А.Б., Вебер С.В., Баюк О.А.</i> Об организации образовательного мониторинга в регионе.....	34
<i>Вебер С.В.</i> INTERNET-технологии в дистанционном образовании.....	36
<i>Вебер С.В.</i> Компьютерное тестирование.....	40
<i>Еслямов С.Г., Серикбаев В.Б.</i> Расчет топологии сети, выбор каналов связи для республиканской информационно-телекоммуникационной сети.....	46
<i>Майер Ф.Ф.</i> Геометрические свойства некоторых классов аналитических в круге функций, выпуклых в направлении мнимой оси.....	48
<i>Муканов Т.Л.</i> Криптографические методы защиты информации.....	51
<i>Оганесян Г.А.</i> Применение пятидиагональных матриц при решении некоторых задач математической физики.....	54
<i>Рубаева О.Д., Суворова Е.В.</i> Мотивационный механизм как компонент управления сельскохозяйственными предприятиями племенного молочного скотоводства.....	57
<i>Савушкина Н.Б.</i> Обобщенная теорема Вильсона.....	62
<i>Цыганова А.Д.</i> Преподавание профильных курсов информатики в соответствии с государственным образовательным стандартом Республики Казахстан.....	63
2. Физика, химия, биология, техника	
<i>Арзуманян А.М., Минасян З.А.</i> Метод расчета температур при прерывистом резании материалов.....	67
<i>Арутюнян С.Л.</i> Влияние кулоновской щели на тонкую структуру фундаментального влияния края поглощения в полупроводниках типа A ^{III} B ^V условиях слабого легирования и слабой компенсации.....	69