АХМЕТ БАЙТУРСЫНОВ АТЫНДАҒЫ
ҚОСТАНАЙ МЕМЛЕКЕТТІК УНИВЕРСИТЕТІ

Мамыр 2002 ж.
№ 6-2

А. Байтұрсынов атындағы
Қостанай мемлекеттік
университетінің

ҒЫЛЫМИ ХАБАРШЫСЫ

Жаратылыстану-техникалық ғылымдар сериясы

ВЕСТНИК НАУКИ

Костанайского государственного
университета
имени А. Байтурсынова

**Серия
естественно-технических
наук**

Қостанай
2002 жыл

ҒЫЛЫМИ ХАБАРШЫСЫ * ВЕСТНИК НАУКИ

Регистрационный № 986-Ж
1999 жылы құрылған
Основан в 1999 году

№ 6-2, май 2002 г.
Жылына 2 рет шығады
Выходит 2 раза в год

А. Байтұрсынов атындағы
Қостанай мемлекеттік университетінің
ҒЫЛЫМИ ХАБАРШЫСЫ

Жаратылыстану-техникалық ғылымдар сериясы

ВЕСТНИК НАУКИ
Костанайского государственного университета имени А. Байтурсынова

Серия естественно-технических наук

Бас редакторы - Главный редактор
Х.Х.Валиев

чтобы минимизировать задержку доступа к информационным ресурсам при фиксированной пропускной способности каналов связи.

УДК 517.54

Майер Ф.Ф.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ, ВЫПУКЛЫХ В НАПРАВЛЕНИИ МНИМОЙ ОСИ

Рассмотрим класс C(α), $0<\alpha\le 1$, аналитических в круге E={z: $|z|<1$} функций $w=f(z)=z+a_2 z^2+\ldots$, удовлетворяющих условию

$$\left|\arg\left[(1-z^2)f'(z)\right]\right| < \alpha\frac{\pi}{2}, z\in E \qquad (1)$$

Класс C(α) является подклассом класса K(α) почти выпуклых порядка α функций f(z)[1], [2], выделяемых условием

$$\left|\arg\frac{f'(z)}{g'(z)}\right| < \alpha\frac{\pi}{2}, z\in E, \qquad (2)$$

где w=g(z) произвольная выпуклая в E функция, так как при $g(z)=g_0(z)=\ln[(1+z)/(1-z)]$ из (2) получается условие (1). Поэтому все функции класса C(α), 0<α≤1, являются однолистными и почти выпуклыми в E [3].

Пусть $f(z)\in C(\alpha)$. Рассмотрим сложную функцию $F(w)=f[g_0^{-1}(w)]$, аналитическую в полосе D={w: $|Jmw|<\pi/2$}. Тогда в силу услвоия (1) $|\arg F'(w)|<\alpha\pi/2, w\in D$. На основании этого нетрудно установить (см., напр., [4]), что область f(E)=F(D) достижима извне углами раствора $(1-\alpha)\pi$ с биссектрисами, паралельными мнимой оси. В частности, C(α)∈C(1), а класс C(1) совпадает с классом функций [5], выпуклых в направлении мнимой оси.

Из (1) следует, что для функций f(z)∈C(α) имеет место интегральное представление

$$f(z)=\int_0^z \frac{P^\alpha(t)}{1-t^2}dt, \qquad (3)$$

причем P(z)∈P, где P-класс аналитических в E функций, удовлетворяющих условию P(0)=1, ReP(z)>0, z∈E.

Теорема 1. Если f(z)∈C(α), 0<α≤1, то в круге $|z|\le r$ имеют место оценки

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\alpha \frac{1}{1+r^2} \le |f'(z)| \le \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{1-r^2}, \qquad (4)$$

$$|f(z)| \le \frac{1}{2(\alpha+1)}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha+1}-1\right], \qquad (5)$$

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2z^2}{1-z^2}\right| \le \frac{2\alpha r}{1-r^2}. \qquad (6)$$

Оценки точные и достигаются для функции

$$f(z)=\frac{1}{2(\alpha+1)}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha+1}-1\right]$$

Доказательство. В силу (3) $(1-z^2)\cdot f'(z)=P^\alpha(z)$. Так как $P(z)\in P$, то имеет место подчиненность ([6], с.356) $P(z)\prec(1+z)/(1-z)$.

Следовательно,

$$(1-z^2)f'(z) \prec \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} \tag{7}$$

Отсюда для всех $z, |z| \le r$, имеем оценку

$$\left|(1-z^2)f'(z)\right| \le \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha}.$$

Так как $|1-z^2| \ge 1-|z|^2$, то получаем правую из оценок (4). В силу подчиненности (7) в круге $|z| \le r$ имеем

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha} \le \left|(1-z^2)f'(z)\right| \le (1+r^2)\left|f'(z)\right|$$

Отсюда получаем левую из оценок (4). Оценка (5) получается из оценки (4) интегрированием по отрезку радиуса от 0 до r.

В силу представления (3)

$$z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2z^2}{1-z^2} = \alpha z \frac{P'(z)}{P(z)} \tag{8}$$

Поскольку $P(z) \prec [(1+z)/(1-z)]$, то имеем

$$\ln P(z) = \ln\frac{1+w(z)}{1-w(z)},$$

где w(z) удовлетворяет условиям лемма Шварца.

Отсюда

$$z\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{2zw'(z)}{1-w^2(z)}$$

В силу неравенства [7] $|w'(z)| \le [1-|w(z)|^2]/(1-|z|^2)$ для всех $z, |z| \le r$, получаем

$$\left|z\frac{P'(z)}{P(z)}\right| \le \frac{2r}{1-r^2},$$

откуда на основании равенства (8) получаем оценку (6). Неулучшаемость оценок устанавливается простой проверкой.

Оценка (6) позволяет легко найти радиус выпуклости класса C(α). Известно, что радиусом выпуклости r^0 некоторого класса A аналитических функций f(z) называется наибольшее из чисел r (0<r<1) таких, что для каждой функции f(z)∈A образ любой окружности $|z| = r, 0 < r < r^0$, есть выпуклая кривая.

Теорема 2. Радиус выпуклости r^0 класса C(α) определяется как наименьший положительный корень уравнения

$$r^4 - 2\alpha r^3 - 2r^2 - 2\alpha r + 1 = 0 \tag{9}$$

Доказательство. В силу оценки (6) получаем

$$\left|\operatorname{Re}\left[z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2z^2}{1-z^2}\right]\right| \le \frac{2\alpha r}{1-r^2},$$

отсюда для всех z, $|z| \le r$,

$$\operatorname{Re} z\frac{f''(z)}{f'(z)} \ge \min_{|z|\le r}\operatorname{Re}\frac{2z^2}{1-z^2} - \frac{2\alpha r}{1-r^2}$$

$$= -\frac{2r^2}{1+r^2} - \frac{2\alpha r}{1-r^2} = -\frac{2r^2-2r^4+2\alpha r+2\alpha r^3}{1-r^4} = -1,$$

если $|r| \le r$, где $r = r^0$ – наименьший положительный корень уравнения (9), т.е. в круге $|r| \le r^0$ выполняется условие выпуклости функции f(z).

Покажем, что радиус выпуклости является точным.

Для функции

$$f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{\alpha} \frac{dz}{1-z^2} \in C(\alpha)$$

имеем

$$z\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} = \frac{2z^2}{1-z^2} + \frac{2i\alpha z}{1+z^2}.$$

Поэтому, в точке $z = ir^0$ получаем

$$z\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} = -\frac{2r^2}{1+r^2} - \frac{2\alpha r}{1-r^2} = -1,$$

т.е. радиус выпуклости улучшить нельзя.

Обозначим через M(α) класс аналитических в E функций *w=F(z), F(0)=0,* $F'(0)=1$, таких, что $F(z) = zf'(z)$, где функция $f(z) \in C(\alpha), 0 < \alpha \le 1$. Заметим, что класс $M(\alpha) \subset M(1)$, где $M(1) = \left\{F(z): \operatorname{Re}\frac{1-z^2}{z}F(z) > 0, z \in E\right\}$ и M(1) совпадает с классом типично вещественных функций. Для этого класса радиус звездообразности определен в работе Р.Либера [7]. Используя известную связь между выпуклыми и звездообразными функциями, выражающуюся соотношением

$$f(z) \in S^0 \Leftrightarrow F(z) = z \cdot f'(z) \in S^{\bullet},$$

получаем, что радиус звездообразности класса M(α) определяется уравнением (9), а при α=1 получаем известный результат Р.Либера [7].

$$r^{\bullet} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1-\sqrt{2\left(\sqrt{5}+1\right)}\right) \approx 0{,}345$$

Теорему 2 можно уточнить, если известно, что разложение функции f(z) в ряд Тейлора имеет пропуски членов, в частности, если $a_2 = 0$. Тогда $f'(z) = 1 + 3a_3 z^2 + \ldots$ и $P(z) = \left[f'(z) \cdot (1 - z^2)\right]^{1/\alpha} = 1 + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots, z \in E.$ Отсюда в силу подчиненность $P(z) \prec (1+z)/(1-z)$ с учетом разложения P(z) получаем оценки

$$|P(z)| \le \frac{1+r^2}{1-r^2}, \qquad \left| z\frac{P'(z)}{P(z)} \right| \le \frac{4r^2}{1-r^4},$$

$|z| \le r.$

В силу данных оценок получаем следующее усиление теоремы 2.

Теорема 3. Если функция $f(z) = z + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \ldots$ аналитична в круге E и $f(z) \in C(\alpha)$, то функция f(z) выпукла в круге $|z| \le r^0$, где

$$r^0 = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\alpha+1-2\sqrt{\alpha(\alpha+2)}}{1-4\alpha}}, & \alpha \ne \dfrac{1}{4} \\ \sqrt{3}/3, & \alpha = \dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad (10)$$

Радиус выпуклости является точным.

Доказательство. В силу приведенных выше оценок получаем

$$\operatorname{Re} z\frac{f''(z)}{f'(z)} \ge -\frac{2r^2}{1+r^2} - \frac{4\alpha r^2}{1-r^4} \ge -1$$

для всех z, $|z| \le r^0$, где r^0 – наименьший положительный корень уравнения

? $$(1-4\alpha) \cdot r^4 - 2(2\alpha+1)r^2 + 1 = 0,$$

т.е. f(z) выпукла в круге $|z| \le r^0$.

Для экстремальной функции

$$f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)^{\alpha} \frac{dz}{1-z^2} = z + a_3 z^3 + \ldots \in C(\alpha)$$

в точках $z = ir, 0 < r < 1$, имеем

$$z\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)}\Big|_{z=ir} = -\frac{2r^2}{1+r^2} - \frac{4\alpha r^2}{1-r^4} = -1$$

при $r = r^0$,

т.е. радиус выпуклости является точным.

Следствие 1. Если функция f(z) ∈C(α) и f(z) является нечетной в круге E, то она выпукла в круге $|z| \le r^0$, где r^0 определяется по формуле (10), и радиус выпуклости является точным.

Следствие 1 вытекает из теоремы 3 в силу того, что для нечетных функций все коэффициенты $a_{2k} = 0$ при k=1, 2, 3, ...

Литература

1. Reade M. The coefficiente of close-to-convex functions. -Duke Math. J., 1956, V.23, №3, p.459-462.
2. Renyi A. Some remarks on univalent functions. Изв., Матем. Ин-т Бълг. АН, 1959, т.3, №2, с.111-121.
3. Kaplan W. Close-to-convex schlicht functions.- Mich. Math. J., V.1, №2, 1952, p.169-185.
4. Аксентьев Л.А., Шабалин П.Л. Условия однолистности с квазиконформным продолжением и их применение. – Изв. вузов, Математика, 1983, №2, с.5-14.
5. Robertson M.S. Amer. Journ. of Math., V. LVIII, 1936, p.465-472.
6. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.- М.: Наука, 1966.- 628 с.
7. Libera R.J. Some radius of convexity problems. Duke Math. J., V.31, №1, 1964, p.143-158.

Мазмұны-Содержание

Жаратылыстану-техникалық ғылымдар
Естественно-технические науки

1. Математика, экономика, информатика және жаңашыл технология - Математика, экономика, информатика и современные технологии

2. Физика, химия, биология, техника