



BAITURSYNULY
UNIVERSITY

«АХМЕТ БАЙТҰРСЫНҰЛЫ
АТЫНДАҒЫ ҚОСТАНАЙ ӨңІРЛІК
УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ



ҚМПИ ЖАРШЫСЫ

КӨПСАЛАЛЫ
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ
МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

№ 2
2024

ISSN 2310-3353



PUBLISHINGS
K S P I



Қ М П И
ЖАРШЫСЫ

ВЕСТНИК
К Г П И

2024 ж., сәуір, №2 (74)
Журнал 2005 ж. қаңтардан бастап шығады
Жылына төрт рет шығады

Құрылтайшы: *Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті*

Бас редактор: *Қуанышбаев С. Б.*, география ғылымдарының докторы, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы ҚӨУ, Қазақстан.

Бас редактордың орынбасары: *Жарлыгасов Ж.Б.*, ауыл шаруашылығы ғылымдарының кандидаты, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы ҚӨУ, Қазақстан.

РЕДАКЦИЯ АЛҚАСЫ

Әлімбаев А.Е., философия докторы (PhD), А.К. Құсайынов атындағы Еуразия гуманитарлық институты, Қазақстан.

Емин Атасой, PhD докторы, Улудаг университеті, Бурса қ., Түркия.

Зоя Микниене, докторы, (PhD) Литва денсаулық туралы ғылым университеті, Каунас қ., Литва Республикасы.

Качев Д.А., философия ғылымдарының кандидаты, тарих магистрі, «Челябі мемлекеттік университеті» ЖББ ФМБББМ Қостанай филиалы, Қазақстан.

Ксембаева С.К., педагогика ғылымдарының кандидаты, «Торайғыров университеті» КЕАҚ, Қазақстан.

Лина Анастасова, әлеуметтану ғылымдарының докторы, Бургас еркін университеті, Бургас қ., Болгария.

Медетов Н.А., физика-математика ғылымдарының докторы, «Ш. Уалиханов атындағы Көкшетау университеті» КЕАҚ, Қазақстан.

Мишулина О.В., экономика ғылымдарының докторы, «Челябі мемлекеттік университеті» ЖББ ФМБББМ Қостанай филиалы, Қазақстан.

Соловьев С.А., биология ғылымдарының докторы, Новосібір мемлекеттік экономика және басқару университеті, Ресей.

Скороходов Д.М., техника ғылымдарының кандидаты, «Ресей мемлекеттік аграрлық университеті – К.А. Тимирязев атындағы Мәскеу ауыл шаруашылық академиясы» ЖББ ФМБББМ, Ресей.

Сычева И.Н., ауыл шаруашылығы ғылымдарының кандидаты, «Ресей мемлекеттік аграрлық университеті – К.А. Тимирязев атындағы Мәскеу ауыл шаруашылық академиясы» ЖББ ФМБББМ, Ресей.

Ташев А.Н., экология бойынша биология ғылымдарының кандидаты, орман шаруашылығы университеті, София қ., Болгария.

Уразбоев Г.У., физика-математика ғылымдарының докторы, Ургенч мемлекеттік университеті, Өзбекстан.

Тіркеу туралы куәлік №5452-Ж
Қазақстан Республикасының ақпарат министрлігімен 17.09.2004 берілген.
Мерзімді баспа басылымын қайта есепке алу 07.11.2023 ж.
Жазылу бойынша индексі 74081

Редакцияның мекен-жайы:

110000, Қостанай қ., Байтұрсынұлы к., 47
(Редакциялық-баспа бөлімі)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

© Ахмет Байтұрсынұлы атындағы
Қостанай өңірлік университеті

№2 (74), апрель 2024 г.
Издается с января 2005 года
Выходит 4 раза в год

Учредитель: *Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы*

Главный редактор: *Куанышбаев С.Б.*, доктор географических наук, КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы, Казахстан.

Заместитель главного редактора: *Жарлыгасов Ж.Б.*, кандидат сельскохозяйственных наук, КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы, Казахстан.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Алимбаев А.Е., доктор философии (PhD), Евразийский гуманитарный институт имени А.К.Кусаинова, Казахстан.

Емин Атасой, доктор PhD, Университет Улудаг, г. Бурса, Турция.

Зоя Микниене, доктор (PhD), Литовский университет наук здоровья, г. Каунас, Республика Литва.

Качеев Д.А., кандидат философских наук, магистр истории, Костанайский филиал ФГБОУ ВО «ЧелГУ», Казахстан.

Ксембаева С.К., кандидат педагогических наук, НАО «Торайгыров университет», Казахстан.

Лина Анастасова, доктор социологии, Бургасский свободный университет, г. Бургас, Болгария.

Медетов Н.А., доктор физико-математических наук, НАО «Кокшетауский университет им. Ш.Уалиханова», Казахстан.

Мишулина О.В., доктор экономических наук, Костанайский филиал ФГБОУ ВО «ЧелГУ», Казахстан.

Соловьев С.А., доктор биологических наук, Новосибирский государственный университет экономики и управления, Россия.

Скороходов Д.М., кандидат технических наук, ФГБОУ ВО РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, Россия.

Сычева И.Н., кандидат сельскохозяйственных наук, ФГБОУ ВО РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, Россия.

Ташев А.Н., кандидат биологических наук по экологии, Лесотехнический университет, г. София, Болгария.

Уразбоев Г.У., доктор физико-математических наук, Ургенчский государственный университет, Узбекистан.

Свидетельство о регистрации № 5452-Ж
выдано Министерством информации Республики Казахстан 17.09.2004 г.
Переучёт периодического печатного издания 07.11.2023 г.
Подписной индекс 74081

Адрес редакции:

110000, г. Костанай, ул. Байтұрсынұлы, 47
(Редакционно-издательский отдел)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

МАЙЕР, Ф.Ф.

БЕЛГІЛІ БІР БАҒЫТТА ДӨҢЕСКЕ ЖАҚЫН ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ БІР КЛАСЫ ТУРАЛЫ

Белгілі бір бағытта дөңес функциялар көптеген авторлардың назарын аударады, ең алдымен олардың мәндерінің домендері өзіндік геометриялық қасиеттерге ие. Мақалада ойдан шығарылған ось бағытында дөңес немесе нақты осьтің оң бағытында дөңес функцияларға жақын функциялар класы енгізіліп, зерттеледі.

Бұл сыныпта бұрмаланудың нақты теоремалары алынды және дөңес радиустары табылды. Мақаланың нәтижелері жалпыланады және ерекше жағдайларда қиял осі бағытында дөңес функциялар үшін, сондай-ақ қиял осі бағытында дөңеске жақын функциялар класы үшін бұрын белгілі нәтижелерді толықтырады.

Сондай-ақ, нақты осьтің оң бағытында дөңес болатын функцияларға жақын функциялар үшін жаңа нәтижелер алынды.

Алынған нәтижелер жұлдыз тәрізді функциялардың кейбір кластарына қарапайым ауысуға мүмкіндік береді.

Кілт сөздер: дөңес функциялар, бағытта дөңес функциялар, аналитикалық функцияларды бағалау, дөңес радиустар.

MAIYER, F.F.

ABOUT ONE CLASS OF FUNCTIONS THAT ARE CLOSE TO CONVEX FUNCTIONS IN A CERTAIN DIRECTION

The concept of functions convex in a particular direction has garnered attention from numerous authors, primarily due to the distinctive geometric characteristics of their value ranges. By introducing and examining approaches to define classes of functions akin to specified functions, this article introduces and explores a class of functions resembling those convex along the imaginary axis or in the positive direction of the real axis. Within this class, precise distortion theorems are derived, and exact convexity radii are determined, which generalize and, in specific cases, supplement previously established findings for functions convex along the imaginary axis, as well as for the class of functions resembling those convex along the imaginary axis. Additionally, new findings are uncovered for functions similar to those convex in the positive direction of the real axis. These results facilitate a straightforward transition to certain classes of functions resembling starlike functions.

Key words: close-to-convex functions, functions convex in the direction, estimates of analytical functions, radii of convexity.

УДК 517.54

Майер, Ф.Ф.,

кандидат физико-математических наук,
доцент, и.о. профессора
кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Казахстан

**ОЦЕНКИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ
В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

Аннотация

Пусть $\mathcal{A}_n(a, b, \gamma)$ – класс аналитических в единичном круге функций $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots, n \geq 1$, с положительной вещественной частью, область значений которых содержится в области специального вида, заданного неравенством $|w^{1/\gamma} - a| \leq b, 0 < \gamma \leq 1, a - b > 0, b > 0$.

В статье найдены точные оценки $|\varphi(z)|$ и модуля логарифмической производной $|z \varphi'(z)/\varphi(z)|$ в классе $\mathcal{A}_n(a, b, \gamma)$. Полученные оценки обобщают либо дополняют целый ряд ранее известных результатов, в том числе и ставших уже классическими.

Применение полученных в статье точных оценок является перспективным, так как позволяет в дальнейшем решить целый ряд экстремальных задач на различных классах аналитических функций.

Ключевые слова: геометрическая теория функций, аналитические функции, оценки аналитических функций.

1 Введение

Обозначим через \mathcal{A}_n класс аналитических в круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функций $\varphi(z)$, имеющих разложение в ряд вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots, n \geq 1, z \in E$, а через \mathcal{N}_n – класс нормированных аналитических в E функций $f(z)$ вида $f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \dots, n \geq 1, z \in E$.

Решение многих задач геометрической теории функций [1] на классах \mathcal{M}_n функций $f(z)$ из \mathcal{N}_n может быть сведено к задачам максимизации или минимизации некоторых функционалов вида $|\varphi(z)|, \operatorname{Re} \varphi(z), z\varphi'(z), z\varphi'(z)/\varphi(z)$ на подклассах функций $\varphi(z)$ из \mathcal{A}_n , связанных с \mathcal{M}_n .

Поэтому нахождение оценок указанных выше функционалов на различных классах функций $\varphi(z)$ из \mathcal{A}_n имеет большое значение не только для исследования соответствующих подклассов \mathcal{M}_n , но и представляет значительный интерес как самостоятельная задача.

Точные оценки $|\varphi(z)|$ и $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$ для классов функций $\varphi(z) \in \mathcal{A}_n$ при $n = 1$, удовлетворяющих в E одному из условий $\operatorname{Re} \varphi(z) \geq 0$ или $|\varphi(z) - 1| \leq 1$, а также для произвольного $n \geq 1$ при условии $\operatorname{Re} \varphi(z) \geq 0$ впервые были получены Т.МакГреггором в [2-4]. Позже для более общего случая, когда функция $\varphi(z)$ из \mathcal{A}_1 удовлетворяет условию $|\varphi(z) - a| \leq a, a > 1/2, z \in E$, оценки этих функционалов были найдены Р.Гоелом [5] и обобщены на случай $n \geq 1$ Д.Шаффером [6].

На протяжении полувека оценки из [2-6] применяются многими авторами при исследовании различных подклассов однолистных функций.

В статье [7] точная оценка $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$ получена для класса функций $\varphi(z)$ из \mathcal{A}_1 , удовлетворяющих условию $|\varphi^2(z) - 1| \leq 1, z \in E$. Развивая данные идеи, совсем недавно в статье [8] исследовался класс функций $\varphi(z) \in \mathcal{A}_n, n \geq 1$, удовлетворяющих условию $|\varphi^{1/\gamma}(z) - a| \leq a, 0 < \gamma \leq 1, a > 1/2, z \in E$, и в данном классе найдена точная оценка $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$, обобщающая аналогичные оценки из статей [2-8].

В настоящей статье исследуется класс функций $\varphi(z) \in \mathcal{A}_n, n \geq 1$, заданный условием $|\varphi^{1/\gamma}(z) - a| \leq b, 0 < \gamma \leq 1, 0 < b < a > 0$. В данном классе найдены точные оценки $|\varphi(z)|$ и $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$, обобщающие либо дополняющие целый ряд ранее известных результатов, в том числе и ставших уже классическими.

2 Материалы и методы

Будем также считать, что функция $\varphi(z)$ из \mathcal{A}_n принадлежит классу $\mathcal{A}_n(a, b, \gamma)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$|\varphi^{1/\gamma}(z) - a| \leq b, 0 < \gamma \leq 1, a > b > 0, z \in E. \quad (1)$$

В статье на основе метода подчиненности аналитических функций [1] в классе $\mathcal{A}_n(a, b, \gamma)$ найдены точные оценки $|\varphi(z)|, |z\varphi'(z)/\varphi(z)|$, обобщающие результаты статей [2-7], допускающие широкие применения при решении экстремальных задач в различных классах аналитических функций.

При этом, аналитическая в круге E функция $\varphi(z)$ называется подчиненной однолистной в круге E функции $\varphi_0(z)$ и пишут $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, если $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ и $\varphi(0) = \varphi_0(0)$. В случае однолистной функции $\varphi_0(z)$ подчиненность $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$ означает, что существует функция $\omega(z), \omega(0) = 0, |\omega(z)| \leq 1$, такая, что $\varphi(z) = \varphi_0(\omega(z))$.

Для дальнейшего нам потребуется следующая

Лемма [1]. Пусть функция $\omega(z) + 1 \in \mathcal{A}_n$ и $|\omega(z)| \leq 1$ в круге E . Тогда при любом $r, 0 < r < 1$, в круге $E_r = \{z: |z| \leq r\}$ выполняются точные оценки

$$|\omega(z)| \leq r^n, \tag{2}$$

$$\frac{|\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2} \leq \frac{nr^{n-1}}{1-r^{2n}}. \tag{3}$$

Экстремальная функция имеет вид $\omega(z) = \varepsilon z^n$, причем знаки равенства достигаются только при $|\varepsilon| = 1$.

3-4 Результаты и обсуждение

Обозначим

$$c = 1 + \frac{[b-(b^2-a^2+a)](b+a-1)}{b(b^2-a^2+1)}, \tag{4}$$

$$\varphi_0(z) = \left(\frac{b+(b^2-a^2+a)z}{b+(1-a)z} \right)^\gamma. \tag{5}$$

Теорема 1. Пусть $\varphi(z) \in \mathcal{A}_n(a, b, \gamma)$. Тогда при $|z| = r, 0 \leq r < 1$, имеет место оценка

$$\left(\frac{b-(b^2-a^2+a)r^n}{b-(1-a)r^n} \right)^\gamma \leq |\varphi(z)| \leq \left(\frac{b+(b^2-a^2+a)r^n}{b+(1-a)r^n} \right)^\gamma, \tag{6}$$

Кроме того, в круге $|z| \leq r_0, 0 < r_0 \leq 1$, где $r_0 = (c - \sqrt{c^2 - 1})^{1/n}, |c| \geq 1$, имеют место оценки:

при $b^2 - a^2 + 1 > 0$

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{\gamma b(b^2-(a-1)^2)nr^n}{[b-(b^2-a^2+a)r^n][b-(1-a)r^n]}, \tag{7}$$

при $b^2 - a^2 + 1 < 0$

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{\gamma b(b^2-(a-1)^2)nr^n}{[b+(b^2-a^2+a)r^n][b+(1-a)r^n]}. \tag{8}$$

Оценки (6)-(8) точные и достигаются для функции $\varphi(z) = \varphi_0(z^n)$, где $\varphi_0(z)$ задается посредством (5).

Доказательство. Заметим, что из условия (1) сразу вытекает неравенство $|a - 1| < b$, которым мы воспользуемся ниже.

Условие (1) на языке подчиненности означает, что $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, где функция $\varphi_0(z)$ определена по формуле (5) и однолистно отображает круг E на область $\{w: |w^{1/\gamma} - a| < b\}$.

С учетом выпуклости функции $\varphi_0^{1/\gamma}(z) = w_0(z)$ и свойства ее симметрии относительно действительной оси из подчиненности

$$\varphi^{1/\gamma}(z) \prec w_0(z) = \frac{b + (b^2 - a^2 + a)z}{b + (1 - a)z}$$

следует, что при любом $r, 0 < r < 1$, выполняется условие $\varphi^{1/\gamma}(|z| \leq r) \subset w_0(|z| \leq r^n)$. Поэтому $w_0(-r^n) \leq |\varphi^{1/\gamma}(z)| \leq w_0(r^n)$, то есть

$$\frac{b - (b^2 - a^2 + a)r^n}{b - (1 - a)r^n} \leq |\varphi(z)|^{1/\gamma} \leq \frac{b + (b^2 - a^2 + a)r^n}{b + (1 - a)r^n},$$

откуда следует оценка (6).

Для доказательства оценок (7)-(8) рассмотрим два случая.

1. Пусть $b^2 - a^2 + 1 > 0$. Рассмотрим функции

$$\Phi(z) = \ln \varphi(z), \Phi_0(z) = \ln \varphi_0(z) = \gamma \ln \frac{b + (b^2 - a^2 + a)z}{b + (1 - a)z}.$$

Поскольку $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, то $\Phi(z) \prec \Phi_0(z)$. Поэтому существует аналитическая в круге E функция $\omega(z)$ такая, что $\omega(0) = 0, |\omega(z)| \leq 1$ и для нее $\Phi(z) = \Phi_0(\omega(z))$. Тогда

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \equiv \Phi'(z) = \Phi'_0(\omega(z))\omega'(z).$$

Из (3) следует, что

$$|\omega'(z)| \leq \frac{nr^{n-1}}{1-r^{2n}}(1-|\omega(z)|^2), \text{ поэтому } \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{nr^n}{1-r^{2n}} |\Phi'_0(\omega(z))| (1-|\omega(z)|^2).$$

Вычисления дают, что

$$\Phi'_0(\omega(z)) = \frac{\gamma b(b^2 - (a-1)^2)}{(b + (b^2 - a^2 + a)\omega(z)) \cdot (b + (1-a)\omega(z))}.$$

Поскольку $b^2 - (a-1)^2 > 0$, что следует из условия $|a-1| < b$, то находим

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{\gamma b(b^2 - (a-1)^2)nr^n}{1-r^{2n}} \frac{1-|\omega(z)|^2}{|(b + (b^2 - a^2 + a)\omega(z)) \cdot (b + (1-a)\omega(z))|}. \quad (9)$$

Пусть $a > 1$. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & |[b + (b^2 - a^2 + a)\omega(z)] \cdot [b + (1-a)\omega(z)]| = \\ & = |b^2 + b(b^2 - a^2 + 1)\omega(z) + (b^2 - a^2 + a)(1-a)\omega^2(z)|. \end{aligned}$$

Поскольку $b^2 - a^2 + 1 > 0$ и $(b^2 - a^2 + a)(1-a) < 0$, то

$$\begin{aligned} & |[b + (b^2 - a^2 + a)\omega(z)] \cdot [b + (1-a)\omega(z)]| \geq \\ & \geq b^2 - b(b^2 - a^2 + 1)|\omega(z)| + (b^2 - a^2 + a)(1-a)|\omega^2(z)| = \\ & = [b - (b^2 - a^2 + a)|\omega(z)|] \cdot [b - (1-a)|\omega(z)|]. \end{aligned}$$

Если $a \leq 1$, то с учетом неравенства $b^2 - a^2 + 1 > 0$ в этом случае получаем

$$\begin{aligned} |[b + (b^2 - a^2 + a)\omega(z)][b + (1-a)\omega(z)]| &= \left| \frac{b + (b^2 - a^2 + a)\omega(z)}{b + (1-a)\omega(z)} [b + (1-a)\omega(z)]^2 \right| \geq \\ &\geq \frac{b - (b^2 - a^2 + a)|\omega(z)|}{b - (1-a)|\omega(z)|} |b + (1-a)\omega(z)|^2 \geq \\ &\geq \frac{b - (b^2 - a^2 + a)|\omega(z)|}{b - (1-a)|\omega(z)|} [b - (1-a)|\omega(z)|]^2 = \\ &= [b - (b^2 - a^2 + a)|\omega(z)|] \cdot [b - (1-a)|\omega(z)|]. \end{aligned}$$

Таким образом, независимо от условий $a > 1$ или $a \leq 1$, в случае 1, когда $b^2 - a^2 + 1 > 0$, получаем, что

$$\begin{aligned} & |[b + (b^2 - a^2 + a)\omega(z)] \cdot [b + (1-a)\omega(z)]| \geq \\ & \geq [b - (b^2 - a^2 + a)|\omega(z)|] \cdot [b - (1-a)|\omega(z)|]. \end{aligned} \quad (10)$$

Применяя оценку (10) к неравенству (9), окончательно получаем

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{\gamma b(b^2 - (a-1)^2)nr^n}{1-r^{2n}} \frac{1-|\omega(z)|^2}{[b - (b^2 - a^2 + a)|\omega(z)|] \cdot [b - (1-a)|\omega(z)|]}$$

или

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{\gamma b(b^2 - (a-1)^2)nr^n}{1-r^{2n}} F(x), \quad (11)$$

где

$$F(x) = \frac{1-x^2}{[b - (b^2 - a^2 + a)x] \cdot [b - (1-a)x]}, \quad x = |\omega(z)| \in [0,1].$$

Вычисления дают:

$$F'(x) = \frac{b^2 - a^2 + 1}{b[b - (b^2 - a^2 + a)x]^2 [b - (1-a)x]^2} (x^2 - 2cx + 1),$$

где c определяется по формуле (4) и выражение перед квадратным трехчленом $x^2 - 2cx + 1$ является положительным.

Учитывая, что $a - b > 0, b > 0, |a - 1| < b, b^2 - a^2 + 1 > 0$, нетрудно установить, что в формуле (4) выражение

$$\frac{[b - (b^2 - a^2 + a)](b + a - 1)}{b(b^2 - a^2 + 1)} \geq 0$$

и поэтому $c \geq 1$. В силу этого одним из двух корней уравнения $F'(x) = 0$ будет корень $x_0 = c - \sqrt{c^2 - 1}$, принадлежащий отрезку $[0,1]$. При этом, $F'(x) > 0$ на промежутке $[0, x_0)$ и $F'(x) < 0$ на промежутке $(x_0, 1]$.

Поскольку $x = |\omega(z)| \leq r^n$ в силу неравенства (1) и $F(x)$ возрастает на $[0, x_0)$ то

$$F(x) = F(|\omega(z)|) \leq F(r^n) = \frac{1 - r^{2n}}{[b - (b^2 - a^2 + a)r^n] \cdot [b - (1 - a)r^n]}$$

для $r^n \leq x_0 = c - \sqrt{c^2 - 1}$.

Поэтому в силу (11) в круге $|z| \leq r_0$, где $r_0 = (c - \sqrt{c^2 - 1})^{1/n}$, получаем оценку

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{\gamma b(b^2 - (a - 1)^2)nr^n}{1 - r^{2n}} F(|\omega(z)|) \leq \frac{\gamma b(b^2 - (a - 1)^2)nr^n}{[b - (b^2 - a^2 + a)r^n] \cdot [b - (1 - a)r^n]}$$

то есть оценка (7) доказана.

2. Пусть теперь $b^2 - a^2 + 1 < 0$. В этом случае аналогично предыдущему можно установить, что в круге $|z| \leq r_0$, $r_0 = (-c - \sqrt{(-c)^2 - 1})^{1/n}$, где c определяется по формуле (4) и $c \leq -1$, имеет место точная оценка (8).

Для доказательства точности оценок (6)-(8) рассмотрим экстремальную функцию

$$\varphi(z) = \varphi_0(z^n) = \left(\frac{b + (b^2 - a^2 + a)z^n}{b + (1 - a)z^n} \right)^\gamma,$$

где $\varphi_0(z)$ задается по формуле (5). Для нее

$$z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\gamma b(b^2 - (a - 1)^2)nz^n}{[b + (b^2 - a^2 + a)z^n][b + (1 - a)z^n]}$$

и в точках $z = \sqrt[n]{-1}r$ и $z = r$ имеем

$$\left. z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right|_{z=\sqrt[n]{-1}r} = - \frac{\gamma b(b^2 - (a - 1)^2)nr^n}{[b - (b^2 - a^2 + a)r^n][b - (1 - a)r^n]},$$

$$\left. z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right|_{z=r} = \frac{\gamma b(b^2 - (a - 1)^2)nr^n}{[b + (b^2 - a^2 + a)r^n][b + (1 - a)r^n]},$$

что доказывает точности оценок (7)-(8).

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим некоторые следствия из теоремы 1.

Пусть $b = a$. Тогда условие $b^2 - a^2 + 1 > 0$ является тривиальным, $c = 1$ и $r_0 = 1$.

Следствие 1. Пусть функция $\varphi(z) \in \mathcal{A}_n(a, a, \gamma)$, то есть удовлетворяет условию

$$|(\varphi(z))^{1/\gamma} - a| \leq a, a > 1/2, 0 < \gamma \leq 1, z \in E. \tag{12}$$

Тогда в круге $|z| \leq r, 0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки

$$\left(\frac{1-r^n}{1+(1-1/a)r^n} \right)^\gamma \leq |\varphi(z)| \leq \left(\frac{1+r^n}{1-(1-1/a)r^n} \right)^\gamma \tag{13}$$

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{\gamma(2-1/a)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-1/a)r^n)} \tag{14}$$

Экстремальная функция задается по формуле

$$\varphi(z) = \left(\frac{1 + z^n}{1 - (1 - 1/a)z^n} \right)^\gamma.$$

Примечание 1. Оценка (14) получена нами другим способом в [8]. При $\gamma = n = 1$ оценки (13)-(14) установлены в [5, лемма 2.1], а при $\gamma = 1, n \geq 1$ совпадают с оценками из статьи [6].

При $\gamma = n = 1$ случай $a \rightarrow \infty$, когда класс функций $\mathcal{A}_n(\infty, \infty, 1)$ задается условием $Re \varphi(z) \geq 0$, и случай $a = 1$, когда класс функций $\mathcal{A}_n(1,1,1)$ задается условием $|\varphi(z) - 1| \leq 1$, а также для произвольного $n \geq 1$ в классе функций, заданном условием $Re \varphi(z) \geq 0$, получаем соответственно оценки МакГрегора из [4-6]:

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{2r}{1-r^2}, \quad \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{r}{1-r}, \quad \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{2nr^n}{1-r^{2n}}.$$

Для случая $\gamma = 1/2$, $a = 1$ при $n = 1$ оценка (14) получена в [7].

Следствие 2. Если $\varphi(z) \in \mathcal{A}_n$ и удовлетворяет условию

$$\left| (\varphi(z))^{-\frac{1}{\gamma}} - \frac{1}{2\beta} \right| \leq \frac{1}{2\beta}, \quad 0 \leq \beta < 1, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad z \in E, \quad (15)$$

то в круге $|z| \leq r$, $0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки

$$\left(\frac{1-(1-2\beta)r^n}{1+r^n} \right)^\gamma \leq |\varphi(z)| \leq \left(\frac{1+(1-2\beta)r^n}{1-r^n} \right)^\gamma, \quad (16)$$

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{2\gamma(1-\beta)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-2\beta)r^n)}, \quad (17)$$

которые достигается для функции

$$\varphi_0(z) = \left(\frac{1+(1-2\beta)z^n}{1-z^n} \right)^\gamma. \quad (18)$$

Доказательство. Зафиксируем в теореме 1 $a - b = \beta$, где $\beta - const$, $0 \leq \beta < 1$, и пусть $b \rightarrow \infty$. Тогда условие (1) преобразуется к виду (15). Нетрудно сосчитать, что если $b \rightarrow \infty$, то $c \rightarrow -1$, $r_0 \rightarrow 1$, экстремальная функция $\varphi(z) = \varphi_0(z^n)$, где $\varphi_0(z)$ задается посредством (5), преобразуется к функции (18), а оценки (6), (8) приобретают вид (16)-(17).

Примечание 2. При $\gamma = 1$ получаем класс функций $\varphi(z) \in \mathcal{A}_n$, удовлетворяющих условию $Re \varphi(z) \geq \beta$, и из (17) получаем оценку $|z \varphi'(z)/\varphi(z)|$, ранее установленную в [6-9]. При $\gamma = 1$, $\beta = 0$ следствие 2 дает оценки из [4] для класса функций с положительной вещественной частью, а при $n = 1$, $0 \leq \beta < 1$ – оценки из [10] и [11, для случая $\beta = 1/2$].

5 Выводы

В статье получены точные оценки в некоторых классах аналитических функций, обобщающие ранее известные результаты. Полученные оценки могут найти широкое применение при исследовании экстремальных задач на различных подклассах однолистных функций или функций, в определенном смысле близких к однолистным, например, почти звездообразных, дважды почти выпуклых и др.

Список литературы

1. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М: Наука, 1966. – 628 с.
2. MacGregor T.H. Functions whose derivative has a positive real part // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 104. – P.532–537. doi: <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1962-0140674-7>
3. MacGregor, T.H. A class of univalent functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1964. – Vol. 15. – P.311-317.
4. MacGregor T.H. The radius of univalence of certain analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1963. – Vol. 14. – P.514-520.
5. Goel R.M. A class of close-to-convex functions // Czechoslovak Math. J. – 1968. – Vol. 18, № 93. – P.104-116. doi: <https://doi.org/10.21136/CMJ.1968.100815>.
6. Shaffer D.B. Distortion theorems for a special class of analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – Vol. 39, № 2. – P.281–287. doi: <https://doi.org/10.2307/2039632>.
7. Rosihan M. Ali, Ravichandran V., Sharma K. Starlikeness of analytic functions with subordinate ratios // Hindawi J. of Math. – 2021. – Vol. 2021. – Article ID 8373209. – P.1–8. doi: <https://doi.org/10.1155/2021/8373209>.
8. Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Байманкулов А.Т. Об обобщении некоторых классов почти выпуклых и типично вещественных функций // Вестник ТГУ. Серия «Математика и механика». Томск. – 2023. – № 84. – С.147–156. doi: <https://doi.org/10.1155/2021/8373209>.
9. Shah G.M. On the univalence of some analytic functions // Pacific J. Math. – 1972. – Vol. 43, № 1. – P.239–250. doi: <https://doi.org/10.2140/pjm.1972.43.239>.
10. Shaffer D.B. On bounds for the derivative of analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – Vol.37. – P.517-520. doi: <http://dx.doi.org/10.11568/kjm.2021.29.4.785>.

11. Causey W.M., Merkes E.P. Radii of starlikeness of certain classes of analytic functions // J. Math. Anal. Appl. – 1970. – Vol.31. – P.579-586. doi: <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-64-03114-X>

МАЙЕР, Ф.Ф.

АНАЛИТИКАЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ КЕЙБІР КЛАСТАРЫНДАҒЫ ЛОГАРИФМДІК ТУЫНДЫНЫ БАҒАЛАУ

Функциялары $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots, n \geq 1$, бірлік шеңберде аналитикалық болсын және олардың мәндер аймағы теңсіздігімен берілген аймақта болсын $|w^{1/\gamma} - a| \leq b, 0 < \gamma \leq 1, a - b > 0, b > 0$.

Берілген функциялар класындағы мақалада $|\varphi(z)|$ және логарифмдік туынды модулінің $|z \varphi'(z)/\varphi(z)|$ нақты бағалары табылды. Алынған бағалар бұрын белгілі болған бірқатар нәтижелерді, соның ішінде классикалық нәтижелерді жалпылайды немесе толықтырады.

Мақалада алынған нақты бағаларды қолдану перспективалы болып табылады, өйткені ол болашақта аналитикалық функциялардың әртүрлі сыныптарында бірқатар экстремалды мәселелерді шешуге мүмкіндік береді.

Кілт сөздер: функциялардың геометриялық теориясы, аналитикалық функциялар, аналитикалық функцияларды бағалау.

MAIYER, F.F.

ESTIMATES OF THE LOGARITHMIC DERIVATIVE IN SOME CLASSES OF ANALYTICAL FUNCTIONS

Let $\mathcal{A}_n(a, b, \gamma)$ be a class of analytic functions in the unit circle $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots, n \geq 1$, with a positive real part, the range of values of which is contained in the domain of a special kind set by the inequality $|w^{1/\gamma} - a| \leq b, 0 < \gamma \leq 1, a - b > 0, b > 0$.

The exact estimates of $|\varphi(z)|$ and the modulus of the logarithmic derivative $|z \varphi'(z)/\varphi(z)|$ are found in the class $\mathcal{A}_n(a, b, \gamma)$. The estimates obtained generalize or complement a number of previously known results, including those that have already become classical.

The application of the exact estimates showcased in the article is promising, as it allows us to solve further a number of extremum problems in various classes of analytical functions.

Key words: geometric theory of functions, analytical functions, estimates of analytical functions.

УДК 371.3

Методьева, Н.К.,
студент ОП ПИМНО, 3 курс,
г. Костанай, Казахстан

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ПРОЕКТОВ
НА УРОКЕ МАТЕМАТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ**

Аннотация

Статья рассматривает актуальность использования метода проектов на уроках математики в начальной школе с целью развития личности и познавательных способностей детей. Авторы анализируют проблемы внедрения проектно-исследовательской деятельности в образовательный процесс начальной школы и освещают нехватку практического материала по этой теме, особенно в контексте математического образования. Описываются основные личностные качества, формируемые учащимися при использовании метода проектов, а также рассматриваются педагогические условия его успешного применения. В статье представлены различные точки зрения на применение метода проектов и его соответствие современным образовательным задачам.

МАЗМҰНЫ**ГУМАНИТАРЛЫҚ ЖӘНЕ ӨНЕР ҒЫЛЫМДАРЫ**

<i>Арутюнян, А.В.</i> Александр Евлаховтың әңгімелерінің поэтикасы және чехов прозасының.....	3
<i>Бекбосынова, А.Х., Мешітбай, А.Қ.</i> Зейнолла Шүкіров шығармаларындағы табиғат көрінісі	7
<i>Қожанұлы, М.</i> Қазақтың күлдіргі әзіл-әңгімелеріндегі этнонимдер туралы бірер сөз	11
<i>Оспанұлы, С., Мырзағалиева, К.</i> Серік Макпырұлы еңбектерінің мұғалімдерге, оқытушыларға, студенттерге танымдық- тағылымдық әсері.....	18
<i>Шолпанбаева Г.А., Адилова, Ж.Е.</i> Есімдердің өзге тілдерде қолданылатын ерекшеліктері.....	24

ЖАРАТЫЛЫСТАНУ ҒЫЛЫМДАРЫ

<i>Ақантай, Н. Н., Тастанов, М.Г.</i> Физика олимпиадасының студенттерін даярлаудың жалпы принциптері.....	29
<i>Ахметханова, Д.О., Тастанов, М.Г.</i> Дирихле есебін шешудің математикалық әдістері.....	33
<i>Барсақбаева, М.Б.</i> Қостанай қаласының жанармай құю станцияларында мұнай өнімдерімен ластанған топырақ микрофлорасының биоремедиациялық әлеуетін бағалау ерекшеліктері.....	40
<i>Бейшов, Р.С., Жунисбеков, Н.Е.</i> Өсімдердің фитохимиялық құрамына қоршаған орта факторларының әсерін бағалау.....	47
<i>Бейшов, Р.С., Смаилова, А.И.</i> Өнеркәсіптік кәсіпорындардың табиғи ортаға экологиялық әсерін бағалау әдістері.....	50
<i>Коньсбаева, Д.Т., Рұлёва, М.М., Баубекова, Г.К.</i> Қостанай мемлекеттік педагогикалық институтының құрметті профессоры, биология ғылымдарының докторы Т.М. Брагина-ның теориялық және қолданбалы биологиясындағы ғылыми мұра кезендері.....	55
<i>Майер, Ф.Ф.</i> Белгілі бір бағытта дөңеске жақын функциялардың бір класы туралы	60
<i>Майер, Ф.Ф.</i> Аналитикалық функциялардың кейбір кластарындағы логарифмдік туындыны бағалау.....	66
<i>Мефодьева Н.К.</i> Бастауыш мектепте математика сабағында жоба әдісін қолдану	72
<i>Хырхынбай, Ж., Мұқанбетсадықова, А. Қ.</i> ЖМБ сыныптарында математикамен пәнаралық интеграция кезінде ЖИ технологияларын қолдану	75

ИНЖИНИРИНГ ЖӘНЕ ТЕХНОЛОГИЯ

<i>Нурмагамбетов, Б.Б.</i> Білім беру процесінде виртуалды шындықты қолданудың теориялық талдау (ғарышты зерттеу мысалында).....	83
<i>Савина, Д.Е.</i> 3D модельдеуді зерттеу үшін цифрлық білім беру ресурстарын салыстырмалы талдау	89

АУЫЛ ШАРУАШЫЛЫҒЫ ЖӘНЕ ВЕТЕРИНАРИЯ ҒЫЛЫМДАРЫ

<i>Бейшов, Р.С., Алитанова, М.К.</i> Шаруашылық жарамдылығын бағалау үшін дәнді және тұқым себу сапасын зерттеудің рөлі мен маңызы	97
<i>Каримова А.К.</i> Қостанай ауданының микросателитті ДНҚ-маркерлердің негізіндегі герефорд тұқымды ірі қара малдың генетикалық полиморфизмі.....	102
<i>Райымқұлова, М.Қ., Бектас, Ж.С.</i> Сірке қышқылы туындыларының ферменттерді тежеу белсенділігін зерттеу	108

ӘЛЕУМЕТТІК ҒЫЛЫМДАР

Коваль, А.П., Баяндин, М.А., Мишулина, О.В. Әлеуметтік бағдарланған сақтандыру өнімдерін дамыту контекстіндегі ҚР сақтандыру нарығының трендтері 117

Меңлікқожаева, С.Қ., Аймұратова, Т.С. Болашақ мамандарды педагогикалық іс-әрекеттегі қарым-қатынасқа баулу 124

Шамкенов, Р.Ж., Давлетбаева, Ж.Ж. Ақмола облысының туристік индустриясындағы мемлекет пен бизнестің өзара іс-қимылының тиімділігін арттыру 132

БІЗДІҢ АВТОРЛАР 140

АВТОРЛАРДЫҢ НАЗАРЫНА 147

СОДЕРЖАНИЕ**ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ И ИСКУССТВО**

<i>Арутюнян, А.В.</i> Поэтика рассказов Александра Евлахова и традиции чеховской прозы	3
<i>Бекбосынова, А.Х., Мешітбай, А.Қ.</i> Пейзаж в произведениях Зейноллы Шукурова.....	7
<i>Қожанұлы, М.</i> Несколько слов о этнонимах в казахских юмористических рассказах	11
<i>Оспанұлы, С., Мырзағалиева, К.</i> Воспитательное воздействие произведений Серика Макпырулы на учителей, преподавателей и студентов	18
<i>Шолпанбаева, Г.А., Адилова, Ж.Е.</i> Особенности употребления имен в других языках	24

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

<i>Ақантай, Н. Н., Тастанов, М.Г.</i> Общие принципы подготовки студентов физической олимпиады	29
<i>Ахметханова, Д.О., Тастанов, М.Г.</i> Математические методы решения задачи Дирихле.....	33
<i>Барсақбаева, М.Б.</i> Особенности оценки биоремедиационного потенциала микрофлоры почв, загрязненных нефтепродуктами, на заправочных станциях города Костаная	40
<i>Бейшов, Р.С., Жунисбеков, Н.Е.</i> Оценка влияния факторов окружающей среды на фитохимический состав растений	47
<i>Бейшов, Р.С., Смаилова, А.И.</i> Методы оценки экологического воздействия промышленных предприятий на природную среду	50
<i>Коньсбаева, Д.Т., Рұлєва, М.М., Баубекова, Г.К.</i> Вехи научного наследия в теоретической и прикладной биологии почетного профессора Костанайского государственного педагогического института доктора биологических наук Т.М. Брагиной	55
<i>Майер, Ф.Ф.</i> Об одном классе функций, близких к выпуклым в определенном направлении.....	60
<i>Майер, Ф.Ф.</i> Оценки логарифмической производной в некоторых классах аналитических функций	66
<i>Мефодьева, Н.К.</i> Использование метода проектов на уроке математики в начальной школе.....	72
<i>Хырхынбай, Ж., Мұқанбетсадықова, А. Қ.</i> Применение технологий ИИ при межпредметной интеграции с математикой в классах ЕМН.....	75

ИНЖИНИРИНГ И ТЕХНОЛОГИИ

<i>Нурмагамбетов, Б.Б.</i> Теоретический анализ использования виртуальной реальности в образовательном процессе (на примере изучения космоса).....	83
<i>Савина, Д.Е.</i> Сравнительный анализ цифровых образовательных ресурсов для изучения трехмерного моделирования.....	89

СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ, ВЕТЕРИНАРНЫЕ НАУКИ

<i>Бейшов, Р.С., Алтанова, М.К.</i> Роль и значение изучения зерна и посевных качеств семян для оценки хозяйственной пригодности.....	97
<i>Каримова, А.К.</i> Генетический полиморфизм герефордского скота на основе микросателлитных ДНК-маркеров.....	102
<i>Райымқұлова, М.Қ., Бектас, Ж.С.</i> Изучение ферментингибирующей активности производных уксусной кислоты	108

СОЦИАЛЬНЫЕ НАУКИ

<i>Коваль, А.П., Баяндин, М.А., Мишулина, О.В.</i> Тренды страхового рынка РК в контексте развития социально-ориентированных страховых продуктов	117
--	-----

<i>Меңлікөжаева, С.Қ., Аймұратова, Т.С. Привлечь будущих специалистов к взаимоотношениям в педагогической деятельности.....</i>	124
<i>Шамкенов, Р.Ж., Давлетбаева, Ж.Ж. Повышение эффективности взаимодействия государства и бизнеса в туристической индустрии Акмолинской области.....</i>	132
НАШИ АВТОРЫ	143
ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ.....	150

CONTENT

HUMANITIES AND ARTS

<i>Arutyunyan, A.V.</i> Poetic manner of Alexandr Yevlakhov's stories and the traditions of chekhovian prose.....	3
<i>Bekbosynova, A.Kh., Meshitbay, A. K.</i> Landscape in the works of Zeynolla Shukurov.....	7
<i>Kozhanuly, M.</i> A few words about ethnonyms in kazakh humorous stories.....	11
<i>Ospanuly, S., Myrzagaliyeva, K.</i> The educational impact of Serik Makpyrula's works on teachers, lecturers and students.....	18
<i>Sholpanbayeva, G. A., Adilova, Zh. Y.</i> Features of the use of names in other languages.....	24

NATURAL SCIENCES

<i>Akantai, N.N., Tastanov, M.G.</i> General principles of preparing students for the physical olympiad.....	29
<i>Akhmetkhanova, D.O., Tastanov, M.G.</i> Mathematical methods for solving the Dirichlet problem.....	33
<i>Barsakbayeva, M.B.</i> Features of the assessment of the bioremediation potential of the microflora of soils contaminated with petroleum products at gas stations in the city of Kostanay.....	40
<i>Beishov, R.S., Zhunisbekov, N.E.</i> Assessment of the influence of environmental factors on the phytochemical composition of plants.....	47
<i>Beishov, R.S., Smailova, A.I.</i> Methods for assessing the environmental impact of industrial enterprises on the natural environment.....	50
<i>Konysbaeva, D.T., Rulyova, M.M., Baubekova, G.K.</i> The scientific heritage milestones in theoretical and applied biology of T.M. Bragina, doctor of biological sciences and honorary professor of the Kostanay state pedagogical institute.....	55
<i>Maiyer, F.F.</i> About one class of functions that are close to convex functions in a certain direction.....	60
<i>Maiyer, F.F.</i> Estimates of the logarithmic derivative in some classes of analytical functions.....	66
<i>Methodieva N.K.</i> Using the project method in a math lesson in elementary school.....	72
<i>Khyrkhyrbay, Zh., Mukanbetsadykova, A. K.</i> The use of AI technologies in interdisciplinary integration with mathematics in the NMD classes.....	75

ENGINEERING AND TECHNOLOGY

<i>Nurmagambetov, B.B.</i> Theoretical analysis of the use of virtual reality in the educational process (based on the example of space study).....	83
<i>Savina D.E.</i> Comparative analysis of digital educational resources for studying 3D modeling.....	89

AGRICULTURAL, VETERINARY SCIENCES

<i>Beishov, R.S., Alitanova, M.K.</i> The role and importance of studying grain and solving qualities of seeds for assessing economic suitability.....	97
<i>Karimova, A.K.</i> Genetic polymorphism of hereford cattle based on microsatellite DNA markers.....	102
<i>Raiymkulova, M.K., Bektas, Zh.S.</i> Study of enzyme inhibitory activity of acetic acid derivatives.....	108

SOCIAL SCIENCES

<i>Koval, A.P., Bayandin, M.A., Mishulina, O.V.</i> Trends in the insurance market of the republic of Kazakhstan in the context of the development of socially oriented insurance products.....	117
---	-----

<i>Menlikozhaeva, S.K., Aimuratova, T.S.</i> Engaging future specialists in relationships in teaching activities	124
<i>Shamkenov, R.Zh., Davletbaeva, Zh. Zh.</i> Enhancing the effectiveness of state and business interaction in the tourism industry of the Akmola region	132
OUR AUTHORS	145
INFORMATION FOR AUTHORS	153

Компьютерлік беттеу: С. Красикова

Компьютерная верстка: С. Красикова

Басуға 15.04.2024 ж. берілді.
Пішімі 60x84/8. Көлемі 12,0 б.т.
Тапсырыс № 027

Подписано в печать 15.04.2024 г.
Формат 60x84/8. Объем 12,0 п.л.
Заказ № 027

Ахмете Байтұрсынұлы атындағы
Қостанай өңірлік университетіндегі
редакциялық-баспа бөлімінде басылған
Қостанай қ., Байтұрсынов к., 47

Отпечатано в редакционно-издательском отделе
Костанайского регионального университета
имени Ахмет Байтұрсынұлы
г. Костанай, ул. Байтұрсынова, 47