



ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ
ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

А.БАЙТҰРСЫНОВ АТЫНДАҒЫ
ҚОСТАНАЙ Өңірлік Университеті



СУЛТАНҒАЗИН ОҚУЛАРЫ

«ҚАЗІРГІ БІЛІМ БЕРУДІ ДАМУДЫҢ
ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ»

ХАЛЫҚАРАЛЫҚ
ҒЫЛЫМИ-ПРАКТИКАЛЫҚ
КОНФЕРЕНЦИЯ

МАТЕРИАЛДАРЫ

СУЛТАНҒАЗИНСКИЕ ЧТЕНИЯ

МАТЕРИАЛЫ

МЕЖДУНАРОДНОЙ
НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ
КОНФЕРЕНЦИИ
«АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ
РАЗВИТИЯ СОВРЕМЕННОГО
ОБРАЗОВАНИЯ»



УДК 378 (094)
ББК 74.58
Қ 22

РЕДАКЦИЯ АЛҚАСЫ/ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Куанышбаев Сеитбек Бекенович, А.Байтұрсынов атындағы Қостанай өңірлік университетінің Басқарма Төрағасы – Ректоры, география ғылымдарының докторы, Қазақстан Педагогикалық Ғылымдар Академиясының мүшесі; / Председатель Правления – Ректор Костанайского регионального университета имени А.Байтұрсынова, доктор географических наук, член Академии Педагогических Наук Казахстана;

Жарлыгасов Женис Бахытбекович, А.Байтұрсынов атындағы Қостанай өңірлік университетінің Зерттеулер, инновация және цифрландыру жөніндегі проректоры, ауыл шаруашылығы ғылымдарының кандидаты, қауымдастырылған профессор / проректор по исследованиям, инновациям и цифровизации Костанайского регионального университета им. А.Байтұрсынова, кандидат сельскохозяйственных наук, ассоциированный профессор;

Хуснутдинова Ляйля Гельсовна, тарих ғылымдарының кандидаты, «Мәскеу политехникалық университеті» Федералды мемлекеттік автономды жоғары білім беру мекемесінің доценті, Ресей / кандидат исторических наук, доцент Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский политехнический университет», Россия;

Сухов Михаил Васильевич, техника ғылымдарының кандидаты, Оңтүстік- Орал мемлекеттік университетінің (ООМУ) доценті, Челябині, Ресей/кандидат технических наук, доцент Южно-Уральского государственного университета (ЮУрГУ), г. Челябинск, Россия;

Радченко Татьяна Александровна, жаратылыстану ғылымдарының магистрі, А.Байтұрсынов атындағы Қостанай өңірлік университетінің «Физика, математика және цифрлық технологиялар» кафедрасының меңгерушісі / магистр естественных наук, заведующая кафедрой «Физики, математики и цифровых технологий» Костанайского регионального университета им. А.Байтұрсынова;

Алимбаев Алибек Алпысбаевич, PhD докторы, А.Байтұрсынов атындағы Қостанай өңірлік университетінің «Физика, математика және цифрлық технологиялар» кафедрасының қауымдастырылған профессорының м.а. / доктор PhD, и.о.ассоциированного профессора кафедры «Физики, математики и цифровых технологий» Костанайского регионального университета им. А.Байтұрсынова;

Телегина Оксана Станиславовна, А.Байтұрсынов атындағы Қостанай өңірлік университетінің «Физика, математика және цифрлық технологиялар» кафедрасының аға оқытушысы / старший преподаватель кафедры «Физики, математики и цифровых технологий» Костанайского регионального университета им. А.Байтұрсынова;

Шумейко Татьяна Степановна, педагогика ғылымдарының кандидаты, А.Байтұрсынов атындағы Қостанай өңірлік университетінің «Физика, математика және цифрлық технологиялар» кафедра профессорының м.а. / кандидат педагогических наук, и.о. профессора кафедры «Физики, математики и цифровых технологий» Костанайского регионального университета им. А.Байтұрсынова

Қ 22

«Қазіргі білім беруді дамытудың өзекті мәселелері»: «СҰЛТАНҒАЗИН ОҚУЛАРЫ-2023» Халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференцияның материалдары, 2023 жылдың 15 наурызы. Қостанай: А.Байтұрсынов атындағы Қостанай өңірлік университеті, 2023. – 427 б.

«Актуальные вопросы развития современного образования»: Материалы международной научно-практической конференции «СУЛТАНГАЗИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2023», 15 марта 2023 года. Костанай: Костанайский региональный университет имени А.Байтұрсынова, 2023. – 427 с.

ISBN 978-601-356-257-5

«Сұлтанғазин оқулары-2023» халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясының «Заманауи білім беруді дамытудың өзекті мәселелері» жинағында жаратылыстану-ғылыми білім берудің мәселелері мен болашағына арналған ғылыми мақалалар жинақталған, жалпы және кәсіптік білім берудің психологиялық-педагогикалық аспектілері қарастырылған, педагогикалық білім берудің ақпараттандыру және дамытудың қазіргі тенденциялары мен технологиялары мәселелері қозғалады.

Осы жинақтың материалдары ғалымдар мен жоғары оқу орындарының оқытушыларына, магистранттар мен студенттерге пайдалы болуы мүмкін.

В сборнике Международной научно-практической конференции «Султангазинские чтения-2023» «Актуальные вопросы развития современного образования»: представлены научные статьи по проблемам и перспективам естественно-научного образования, рассматриваются психолого-педагогические аспекты общего и профессионального образования, затронуты вопросы информатизации и современных тенденций и технологий развития педагогического образования.

Материалы данного сборника могут быть интересны ученым, преподавателям высших учебных заведений, магистрантам и студентам.

ISBN 978-601-356-257-5



9|786013|562575|

УДК 378 (094)
ББК 74.58

© А.Байтұрсынов атындағы Қостанай өңірлік университеті, 2023
© Костанайский региональный университет имени А.Байтұрсынова, 2023



УДК 512.5

ЦЕПОЧКА ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ ГРУПП ВЫЧЕТОВ Z_{2^n}

Альмухамбетова Айгуль Ахметовна, г. Костанай, Казахстан, E-mail: al.amina0510@mail.ru
Демисенов Берик Нуртазинович, кандидат физико-математических наук, и.о. ассоциированного профессора кафедры физики, математики и цифровых технологий КРУ им. А. Байтурсынова, г.Костанай, Казахстан, E-mail: demissenov@mail.ru

Аңдатпа

Автоморфизмдер математикалық объектілердің маңызды сипаттамалары болып табылады. Сондықтан автоморфизм топтарын зерттеу математикадағы өзекті мәселе болып табылады. Мақсат Z_2, Z_4, Z_8, Z_{16} мысалында, Z_{2^n} шегерімдер тобының автоморфизм топтарының тізбегін зерттеу, және оларды тұрақтандыру гипотезасын тексеру

Түйінді сөздер: автоморфизм топтары, тұрақтандыру.

Аннотация

Автоморфизмы являются важными характеристиками математических объектов. Поэтому изучение групп автоморфизмов – это актуальная задача в математике. Целью является исследование цепочек групп автоморфизмов группы вычетов Z_{2^n} , на примере Z_2, Z_4, Z_8, Z_{16} , и проверка гипотезы по их стабилизации.

Ключевые слова: группы автоморфизмов, группы, стабилизация.

Abstract

Automorphisms are important characteristics of mathematical objects. Therefore, the study of automorphism groups is an actual problem in mathematics. The aim is to study chains of automorphism groups of the residue group Z_{2^n} , using the example of Z_2, Z_4, Z_8, Z_{16} , and to test the hypothesis of their stabilization.

Keywords: automorphism groups, stabilization.

Группа автоморфизмов группы вычетов Z_n изоморфна группе Z_n^* : $Aut Z_n \cong Z_n^*$. Далее, рассматриваем группу автоморфизмов от полученной группы автоморфизмов: $Aut (Aut Z_n) \cong Aut (Z_n^*)$. Продолжая процесс построения групп автоморфизмов от полученных групп автоморфизмов, получаем цепочку групп автоморфизмов группы вычетов Z_n . В исследованных нами примерах, цепочка групп автоморфизмов групп вычетов Z_n стабилизируется, то есть, начиная с некоторого шага, каждая следующая группа автоморфизмов будет изоморфна предыдущей. Возникает гипотеза о том, что всякая такая цепочка стабилизируется. Кроме того, прослеживается тенденция (в процессе построения групп автоморфизмов от групп автоморфизмов) уменьшения (возможно, не сразу) порядков групп этой цепочки, вплоть до стабилизации, иногда до стабилизации на тождественном автоморфизме. Так на Международной научно-практической конференции «Алтынсаринские чтения-2023» нами была представлена статья [1], в которой на примере групп вычетов Z_5, Z_6 было показано, что цепочка групп автоморфизмов стабилизируется на тождественном автоморфизме.

В данной статье рассматриваются цепочки групп автоморфизмов групп вычетов вида Z_{2^n} , то есть по модулю $m = 2^n$, $n \in N$. Проверим нашу гипотезу на примерах групп автоморфизмов групп вычетов Z_2, Z_4, Z_8, Z_{16} . Итак, для первой группы вычетов Z_2 , $n = 1$, имеем $Z_2 \rightarrow Aut Z_2 = Z_2^* \cong \{e\}$. Для $Z_4 \rightarrow Z_2^*$. Следующую цепочку групп автоморфизмов группы вычетов Z_8 разберём подробнее, и покажем, что здесь также происходит стабилизация. Количество автоморфизмов определяется функцией Эйлера: $|Aut Z_8| = \varphi(2^3) = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$, которая позволяет находить количество

вычетов, взаимно простых с модулем меньших его [1, с. 5]. В «Таблице 1» приведены композиции 4-х автоморфизмов группы вычетов Z_8 .

«Таблица 1» – Композиции автоморфизмов φ группы вычетов Z_8

•	φ_1	φ_3	φ_5	φ_7
φ_1	φ_1	φ_3	φ_5	φ_7
φ_3	φ_3	φ_1	φ_7	φ_5
φ_5	φ_5	φ_7	φ_1	φ_3
φ_7	φ_7	φ_5	φ_3	φ_1

Порядки элементов $|\varphi_1| = 1$; $|\varphi_3| = 2$; $|\varphi_5| = 2$; $|\varphi_7| = 2$. Элементы при автоморфизме могут переходить только в элементы того же самого порядка. В качестве порождающих элементов [2, с. 7] возьмём элементы φ_3 и φ_5 ; поскольку они порождают все элементы группы. Так, $\varphi_3 \cdot \varphi_5 = \varphi_7$; $\varphi_3^2 = \varphi_1 = \varphi_5^2$.

В «Таблице 2» видим группу из 6-ти автоморфизмов $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6$ группы $Aut Z_8$.

«Таблица 2» – Группа автоморфизмов Ψ группы $Aut Z_8$

	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6
φ_1	φ_1	φ_1	φ_1	φ_1	φ_1	φ_1
φ_3	φ_3	φ_5	φ_7	φ_3	φ_5	φ_7
φ_5	φ_5	φ_3	φ_3	φ_7	φ_7	φ_5
φ_7	φ_7	φ_5	φ_5	φ_5	φ_3	φ_3

Составим композиции отображений $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6$ и сведём полученные данные в «Таблице 3».

«Таблица 3» – Композиции отображений (автоморфизмов) Ψ группы $Aut Z_8$

•	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6
Ψ_1	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6
Ψ_2	Ψ_2	Ψ_1	Ψ_4	Ψ_3	Ψ_6	Ψ_5
Ψ_3	Ψ_3	Ψ_6	Ψ_5	Ψ_2	Ψ_1	Ψ_4
Ψ_4	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3
Ψ_5	Ψ_5	Ψ_4	Ψ_1	Ψ_6	Ψ_3	Ψ_2
Ψ_6	Ψ_6	Ψ_3	Ψ_2	Ψ_5	Ψ_4	Ψ_1

Порядки элементов $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6$: $|\Psi_1| = 1$; $|\Psi_2| = 2$; $|\Psi_3| = 3$; $|\Psi_4| = 2$; $|\Psi_5| = 3$; $|\Psi_6| = 2$. Для нахождения групп автоморфизмов τ от полученной группы автоморфизмов, в качестве порождающих элементов возьмём элементы Ψ_2, Ψ_3 . Учитывая $\tau(\Psi_4) = \tau(\Psi_2 \cdot \Psi_3)$; $\tau(\Psi_5) = \tau(\Psi_3^2)$; $\tau(\Psi_6) = \tau(\Psi_2 \cdot \Psi_3^2)$, построим все автоморфизмы группы. Полученные результаты приведём в «Таблице 4».

«Таблица 4» – Группа автоморфизмов τ группы автоморфизмов $Aut (Aut Z_8)$

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6
Ψ_1	Ψ_1	Ψ_1	Ψ_1	Ψ_1	Ψ_1	Ψ_1
Ψ_2	Ψ_2	Ψ_2	Ψ_4	Ψ_4	Ψ_6	Ψ_6
Ψ_3	Ψ_3	Ψ_5	Ψ_3	Ψ_5	Ψ_3	Ψ_5
Ψ_4	Ψ_4	Ψ_6	Ψ_6	Ψ_2	Ψ_2	Ψ_4
Ψ_5	Ψ_5	Ψ_3	Ψ_5	Ψ_3	Ψ_5	Ψ_3
Ψ_6	Ψ_6	Ψ_4	Ψ_2	Ψ_6	Ψ_4	Ψ_2

Результаты композиций отображений $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6$, отразим в «Таблице 5».

«Таблица 5» – Композиции автоморфизмов группы автоморфизмов $Aut(Aut Z_8)$

•	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6
τ_1	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6
τ_2	τ_2	τ_1	τ_4	τ_3	τ_6	τ_5
τ_3	τ_3	τ_6	τ_5	τ_2	τ_1	τ_4
τ_4	τ_4	τ_5	τ_6	τ_1	τ_2	τ_3
τ_5	τ_5	τ_4	τ_1	τ_6	τ_3	τ_2
τ_6	τ_6	τ_3	τ_2	τ_5	τ_4	τ_1

Порядки элементов: $|\tau_1| = 1$; $|\tau_2| = 2$; $|\tau_3| = 3$; $|\tau_4| = 2$; $|\tau_5| = 3$; $|\tau_6| = 2$.

Полученная «Таблица 5» композиций группы автоморфизмов группы $Aut Z_8$ идентична «Таблице 3» предыдущей группе автоморфизмов группы вычетов Z_8 . Это значит, что эти группы изоморфны: $Aut(Aut Z_8) \cong Aut Z_8$ и, что следующая группа автоморфизмов также будет изоморфна предыдущей группе автоморфизмов и содержать 6 элементов. Таким образом, возникла стабилизация в цепочке групп автоморфизмов группы вычетов Z_8 (по модулю $m = 2^3$):

$$Aut Z_8 \cong Z_8^* \text{ (4 элемента)}$$

$$Aut(Aut Z_8) \cong Aut Z_8^* \text{ (6 элементов)}$$

$$Aut(Aut(Aut Z_8)) \cong Aut(Aut Z_8^*) \cong Aut Z_8^* \text{ (6 элементов) и так далее.}$$

Цепочка групп автоморфизмов группы вычетов $Z_{2^4} = Z_{16}$ также стабилизируется на определенном шаге. Вычисления по нахождению групп автоморфизмов от групп автоморфизмов аналогичны вычислениям в группе вычетов Z_8 . В «Таблице 6» мы видим композиции автоморфизмов группы автоморфизмов Z_{16}^* группы вычетов Z_{16} .

«Таблица 6» – Композиции автоморфизмов φ группы вычетов Z_{16}

•	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8
φ_2	φ_2	φ_5	φ_8	φ_3	φ_6	φ_1	φ_4	φ_7
φ_3	φ_3	φ_8	φ_5	φ_2	φ_7	φ_4	φ_1	φ_6
φ_4	φ_4	φ_3	φ_2	φ_1	φ_8	φ_7	φ_6	φ_5
φ_5	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_6	φ_6	φ_1	φ_4	φ_7	φ_2	φ_5	φ_8	φ_3
φ_7	φ_7	φ_4	φ_1	φ_6	φ_3	φ_8	φ_5	φ_2
φ_8	φ_8	φ_7	φ_6	φ_5	φ_4	φ_3	φ_2	φ_1

$$Aut Z_{16} \cong Z_{16}^* \text{ (8 элементов)}$$

Порядки элементов: $|\varphi_1| = 1$; $|\varphi_2| = 4$; $|\varphi_3| = 4$; $|\varphi_4| = 2$; $|\varphi_5| = 2$; $|\varphi_6| = 4$; $|\varphi_7| = 4$; $|\varphi_8| = 2$. В качестве порождающих элементов можем взять φ_2 и φ_3 . И в следующей «Таблице 7» показаны 8 автоморфизмов группы автоморфизмов группы $Aut Z_{16}$.

«Таблица 7» – Группа автоморфизмов Ψ группы автоморфизмов $Aut Z_{16}$

	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6	Ψ_7	Ψ_8
φ_1	φ_1	φ_1	φ_1	φ_1	φ_1	φ_1	φ_1	φ_1
φ_2	φ_2	φ_3	φ_2	φ_3	φ_7	φ_7	φ_6	φ_6
φ_3	φ_3	φ_2	φ_7	φ_6	φ_2	φ_6	φ_3	φ_7
φ_4	φ_4	φ_4	φ_8	φ_8	φ_8	φ_4	φ_8	φ_4
φ_5	φ_5	φ_5	φ_5	φ_5	φ_5	φ_5	φ_5	φ_5
φ_6	φ_6	φ_7	φ_6	φ_7	φ_3	φ_3	φ_2	φ_2
φ_7	φ_7	φ_6	φ_3	φ_2	φ_6	φ_2	φ_7	φ_3
φ_8	φ_8	φ_8	φ_4	φ_4	φ_4	φ_8	φ_4	φ_8

Получая композиции отображений $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6, \Psi_7, \Psi_8$, составим «Таблицу 8».

«Таблица 8» – Композиции автоморфизмов Ψ группы автоморфизмов $Aut Z_{16}$

\cdot	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6	Ψ_7	Ψ_8
Ψ_1	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6	Ψ_7	Ψ_8
Ψ_2	Ψ_2	Ψ_1	Ψ_5	Ψ_7	Ψ_3	Ψ_8	Ψ_4	Ψ_6
Ψ_3	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_6	Ψ_5	Ψ_8	Ψ_7
Ψ_4	Ψ_4	Ψ_3	Ψ_6	Ψ_8	Ψ_1	Ψ_7	Ψ_2	Ψ_5
Ψ_5	Ψ_5	Ψ_7	Ψ_2	Ψ_1	Ψ_8	Ψ_3	Ψ_6	Ψ_4
Ψ_6	Ψ_6	Ψ_8	Ψ_4	Ψ_3	Ψ_7	Ψ_1	Ψ_5	Ψ_2
Ψ_7	Ψ_7	Ψ_5	Ψ_8	Ψ_6	Ψ_2	Ψ_4	Ψ_1	Ψ_3
Ψ_8	Ψ_8	Ψ_6	Ψ_7	Ψ_5	Ψ_4	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_1

В данной группе автоморфизмов порядка элементов следующие: $|\Psi_1| = 1; |\Psi_2| = 2; |\Psi_3| = 2; |\Psi_4| = 4; |\Psi_5| = 4; |\Psi_6| = 2; |\Psi_7| = 2; |\Psi_8| = 2$. В качестве порождающих можно взять Ψ_4 и Ψ_2 . Снова аналогичным образом, задавая на порождающих элементах отображения, получаем 8 автоморфизмов, которые приведены в «Таблице 9». В «Таблице 10» приводятся композиции данных отображений.

«Таблица 9» – Группа автоморфизмов τ группы автоморфизмов $Aut(Aut Z_{16})$

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8
Ψ_1	Ψ_1	Ψ_1	Ψ_1	Ψ_1	Ψ_1	Ψ_1	Ψ_1	Ψ_1
Ψ_2	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_7	Ψ_7	Ψ_6	Ψ_6
Ψ_3	Ψ_3	Ψ_2	Ψ_7	Ψ_6	Ψ_2	Ψ_6	Ψ_3	Ψ_7
Ψ_4	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_5	Ψ_4	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_5	Ψ_4
Ψ_5	Ψ_5	Ψ_4	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_5	Ψ_4	Ψ_4	Ψ_5
Ψ_6	Ψ_6	Ψ_7	Ψ_6	Ψ_7	Ψ_3	Ψ_3	Ψ_2	Ψ_2
Ψ_7	Ψ_7	Ψ_6	Ψ_3	Ψ_2	Ψ_6	Ψ_2	Ψ_7	Ψ_3
Ψ_8	Ψ_8	Ψ_8	Ψ_8	Ψ_8	Ψ_8	Ψ_8	Ψ_8	Ψ_8

«Таблица 10» – Композиции автоморфизмов τ группы автоморфизмов $Aut(Aut Z_{16})$

\cdot	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8
τ_1	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8
τ_2	τ_2	τ_1	τ_4	τ_3	τ_7	τ_8	τ_5	τ_6
τ_3	τ_3	τ_5	τ_1	τ_6	τ_2	τ_4	τ_8	τ_7
τ_4	τ_4	τ_7	τ_2	τ_8	τ_1	τ_3	τ_6	τ_5
τ_5	τ_5	τ_3	τ_6	τ_1	τ_8	τ_7	τ_2	τ_4
τ_6	τ_6	τ_8	τ_5	τ_7	τ_3	τ_1	τ_4	τ_2
τ_7	τ_7	τ_4	τ_8	τ_2	τ_6	τ_5	τ_1	τ_3
τ_8	τ_8	τ_6	τ_7	τ_5	τ_4	τ_2	τ_3	τ_1

Порядки элементов:

$|\tau_1| = 1; |\tau_2| = 2; |\tau_3| = 2; |\tau_4| = 4; |\tau_5| = 4; |\tau_6| = 2; |\tau_7| = 2; |\tau_8| = 2$. Порождающими элементами будут τ_3 и τ_5 , на которых будем задавать следующие группы автоморфизмов. В «Таблице 11», «Таблице 12» аналогичным образом получены группы автоморфизмов от группы автоморфизмов, взяты их композиции. Они содержат также 8 элементов.

«Таблица 11» – Группа автоморфизмов δ группы автоморфизмов $Aut(Aut(Z_{16}))$

\cdot	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8
τ_1	τ_1	τ_1	τ_1	τ_1	τ_1	τ_1	τ_1	τ_1
τ_2	τ_2	τ_3	τ_2	τ_3	τ_7	τ_7	τ_6	τ_6
τ_3	τ_3	τ_2	τ_7	τ_6	τ_2	τ_6	τ_3	τ_7
τ_4	τ_4	τ_5	τ_5	τ_4	τ_4	τ_5	τ_5	τ_4
τ_5	τ_5	τ_4	τ_4	τ_5	τ_5	τ_4	τ_4	τ_5
τ_6	τ_6	τ_7	τ_6	τ_7	τ_3	τ_3	τ_2	τ_2
τ_7	τ_7	τ_6	τ_3	τ_2	τ_6	τ_2	τ_7	τ_3
τ_8	τ_8	τ_8	τ_8	τ_8	τ_8	τ_8	τ_8	τ_8

«Таблица 12» – Композиции автоморфизмов δ группы автоморфизмов $Aut(Aut(Z_{16}))$

\cdot	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8
δ_1	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8
δ_2	δ_2	δ_1	δ_4	δ_3	δ_7	δ_8	δ_5	δ_6
δ_3	δ_3	δ_5	δ_1	δ_6	δ_2	δ_4	δ_8	δ_7
δ_4	δ_4	δ_7	δ_2	δ_8	δ_1	δ_3	δ_6	δ_5
δ_5	δ_5	δ_3	δ_6	δ_1	δ_8	δ_7	δ_2	δ_4
δ_6	δ_6	δ_8	δ_5	δ_7	δ_3	δ_1	δ_4	δ_2
δ_7	δ_7	δ_4	δ_8	δ_2	δ_6	δ_5	δ_1	δ_3
δ_8	δ_8	δ_6	δ_7	δ_5	δ_4	δ_2	δ_3	δ_1

Порядки элементов: $|\delta_1| = 1; |\delta_2| = 2; |\delta_3| = 2; |\delta_4| = 4; |\delta_5| = 4; |\delta_6| = 2; |\delta_7| = 2; |\delta_8| = 2$.
 Данная группа автоморфизмов изоморфна предыдущей группе автоморфизмов, так как их таблицы композиций идентичны («Таблица 10» и «Таблица 12»), а это свидетельствует об окончательной стабилизации. Стабилизация возникла на 4-м шаге. Цепочка групп автоморфизмов группы вычетов Z_{16} по модулю $m = 2^4$ будет иметь такой вид.

$$\begin{aligned}
 Aut Z_{16} &\cong Z_{16}^* \quad (8 \text{ элементов}) \\
 Aut(Aut Z_{16}) &\cong Aut Z_{16}^* \quad (8 \text{ элементов}) \\
 Aut(Aut(Aut Z_{16})) &\cong Aut(Aut Z_{16}^*) \quad (8 \text{ элементов}) \\
 Aut(Aut(Aut(Aut Z_{16}))) &\cong Aut(Aut Z_{16}^*) \quad (8 \text{ элементов})
 \end{aligned}$$

Таким образом, гипотеза о стабилизации подтвердилась на примерах цепочек групп автоморфизмов групп вычетов Z_2, Z_4, Z_8, Z_{16} .

Список литературы:

1. Альмухамбетова А.А., Демисенов Б.Н. Цепочки групп автоморфизмов групп вычетов Z_5, Z_6 . // Материалы Международной научно-практической конференции «Алтынсаринские чтения-2023». – Костанай, 2023 (в печати).
2. Наурызбаев Р.Ж. Автоморфизмы свободных метабелевых алгебр Ли. // Материалы XI Международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых учёных «Ломоносов – 2015». – Астана, 2015. – С. 4 – 9.
3. Исаев А.П., Рубаков В.А. Теория групп и симметрий. Конечные группы. Группы и алгебры Ли. // Издание второе URSS. – Москва, 2018. – С. 4 – 29.