ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

А.БАЙТҰРСЫНОВ АТЫНДАҒЫ ҚОСТАНАЙ ӨҢІРЛІК УНИВЕРСИТЕТІ

СҰЛТАНҒАЗИН ОҚУЛАРЫ

«ҚАЗІРГІ БІЛІМ БЕРУДІ ДАМЫТУДЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ»
ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҒЫЛЫМИ-ПРАКТИКАЛЫҚ КОНФЕРЕНЦИЯ

МАТЕРИАЛДАРЫ

СУЛТАНГАЗИНСКИЕ ЧТЕНИЯ

МАТЕРИАЛЫ

МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ РАЗВИТИЯ СОВРЕМЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ»

Қостанай, 2023

УДК 378 (094)
ББК 74.58
Қ 22

Қ 22

«Қазіргі білім беруді дамытудың өзекті мәселелері»: «СҰЛТАНҒАЗИН ОҚУЛАРЫ-2023» Халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференцияның материалдары, 2023 жылдың 15 наурызы. Қостанай: А.Байтұрсынов атындағы Қостанай өңірлік университеті, 2023. – 427 б.

«Актуальные вопросы развития современного образования»: Материалы международной научно-практической конференции «СУЛТАНГАЗИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2023», 15 марта 2023 года. Костанай: Костанайский региональный университет имени А.Байтурсынова, 2023. – 427 с.

ISBN 978-601-356-257-5

«Сұлтанғазин оқулары-2023» халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясының «Заманауи білім беруді дамытудың өзекті мәселелері» жинағында жаратылыстану-ғылыми білім берудің мәселелері мен болашағына арналған ғылыми мақалалар жинақталған, жалпы және кәсіптік білім берудің психологиялық-педагогикалық аспектілері қарастырылған, педагогикалық білім берудің ақпараттандыру және дамытудың қазіргі тенденциялары мен технологиялары мәселелері қозғалады.

Осы жинақтың материалдары ғалымдар мен жоғары оқу орындарының оқытушыларына, магистранттар мен студенттерге пайдалы болуы мүмкін.

В сборнике Международной научно-практической конференции «Султангазинские чтения-2023» «Актуальные вопросы развития современного образования»: представлены научные статьи по проблемам и перспективам естественно-научного образования, рассматриваются психолого-педагогические аспекты общего и профессионального образования, затронуты вопросы информатизации и современных тенденций и технологий развития педагогического образования.

Материалы данного сборника могут быть интересны ученым, преподавателям высших учебных заведений, магистрантам и студентам.

ISBN 978-601-356-257-5

9 786013 562575

УДК 378 (094)
ББК 74.58

зрения: «Зачем читать литературные произведения, когда полную информацию можно получить из интернета… так же проще и быстрее…». Хотя мы неоднократно слышали о том, что книга – это не только источник знаний, но и залог хорошей речи, что читать книги необходимо для того, чтобы не только увеличить свой словарный запас, но и научиться красиво, лаконично, доступно излагать свои мысли. К сожалению, в наше время, слыша разговоры подростков, понимаешь, что их речь на восемьдесят процентов состоит из слов – паразитов, сленга и мата. Какой шок испытали бы некоторые классики нашей многонациональной литературы, услышав речь молодёжи двадцать первого века. Быть культурным человеком в наше время просто необходимо, ибо, потеряв её, мы можем превратиться в животных. Нужно возрождать те духовные ценности, которые недавно были обязательными атрибутами в воспитании подрастающего поколения. Конечно, не вся молодежь соответствует вышеперечисленному описанию. В последнее время очень радуют молодые представители различных волонтерских движений. Эти люди заслуживают глубокого уважения. Именно их нужно приводить в пример подрастающему поколению, именно у них нужно учиться таким качествам как сострадание, уважение, взаимовыручка, понимание, добро. Нужно создавать общества по интересам, где могли бы собираться люди разных национальностей, вероисповедовании, из разных социальных слоев, где их объединяло бы желание общаться, знакомиться с другими традициями, делиться жизненным опытом, искать пути выхода из трудной ситуации. Все это, конечно же, есть в нынешнее время, скажете вы, но большая часть этих обществ находится в бесконечных просторах интернета, а нужно учить общаться подрастающее поколение вживую.

Быть терпимыми друг к другу, уважать традиции, знать родословную, уметь найти подход к каждому человеку, повышать свой интеллектуальный уровень, шагать в ногу со временем, преумножая свои знания - именно к этим качествам должен стремиться молодой человек двадцать первого века. Понятие таких слов как «духовность» и «культура» - многогранно. Но мы, поколение новых технологий и быстроразвивающегося научного прогресса, должны понять то, что, несмотря на технические новшества, именно духовное развитие формирует наш «человеческий облик». Нельзя не вспомнить слова русского классика А.П.Чехова, которые должны звучать как девиз: «В человеке все должно быть прекрасно: и лицо, и одежда, и душа, и мысли».

Список литературы:

1. Андриенко О.А К проблеме этнической толерантности студентов // Диалог культур в глобализирующемся мире: Материалы IIIВсероссийской научно-практической конференции (с международным участием) / Под ред. В.Э. Манаповой. – Махачкала: АЛЕФ, 2020. – С. 36-38.
2. Волосков И. В. Особенности социализации учащейся молодежи // Социологические исследования. - 2009. -№ 6. - С. 107 - 109.
3. Джерелиевская М.А. Тренинг конфликтной компетентности как процесс трансляции мировоззренческих установок на сотрудничество. //Актуальные проблемы исследования массового сознания: Материалы Международной научно-практической конференции. Пенза, 14-15 марта 2013 года /Ответственный редактор В. В. Константинов – Пенза: ПИ ПГУ, 2013. - С. 46-49.
4. Тимофеева Е.А. Обеспечение развития менталитета личности и социума в образовательном процессе вуза // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. – 2008. - №77. – С.410-414.
5. Габдрафиков И.М., Хуснутдинова Л.Г. Социально-экономическая ситуация и миграционные установки граждан по результатам массового опроса населения в Республике Башкортостан //Вестник Российского университета кооперации. № 4 (46). 2021. С. 9-15.

УДК 510.21, 517.13

ОБ ОБОСНОВАНИИ АНАЛИЗА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ВЕЛИЧИН

Демисенов Берик Нуртазинович, кандидат физико-математических наук, и.о. ассоциированного профессора кафедры физики, математики и цифровых технологий, Костанайский пелагогический институт им.У.Султангазина, г.Костанай, Казахстан, E-mail: demissenov@mail.ru

Аңдатпа

Мақалада «шексіз аз шама» ұғымының интерпретациясы алынған, интерпретация осы ұғымның барлық қасиеттеріне толық сәйкес келетін ұқсастығы келтірілген. Осылайша, шексіз аз шамаларды талдау алгебралық негізделеді.

Түйін сөздер: шексіз азды талдау, реттілік, сақина, өріс, идеал.

Аннотация

В статье получена интерпретация понятия «бесконечно малая величина», проведена аналогия того, что интерпретация полностью соответствует всем свойствам этого понятия. Таким образом, алгебраически обоснован анализ бесконечно малых величин.

Ключевые слова: анализ бесконечно малых величин, последовательность, кольцо, поле, идеал.

Abstract

In the article, an interpretation of the concept of "infinitely small quantity" is obtained, an analogy is drawn that the interpretation fully corresponds to all the properties of this concept. Thus, the analysis of infinitesimal quantities is algebraically justified.

Keywords: analysis of infinitesimal quantities, sequence, ring, field, ideal.

Обоснование математики лежит через обоснование анализа бесконечно малых величин. По крайней мере, без этого обоснования невозможно обосновать математику. Начну с примера, который заинтересует читателя.

Когда я спрашиваю у студентов и школьников-олимпиадников, с которыми занимаюсь много лет, верно ли равенство $0,(9) = 1$, *практически всегда отвечают, что нет. Тогда я спрашиваю, как выглядит дробь* $\frac{1}{3}$ *в десятичной записи? Ответ, конечно,* $\frac{1}{3} = 0,(3)$. *А если умножим обе части на 3? Тогда вроде верно, но уже возникают сомнения: а верно ли второе равенство? В кольце сходящихся числовых последовательностей* P *разность* $1 - 0,(9)$ *можно интерпретировать как последовательность* $(0{,}1; 0{,}01; \dots ; 0{,}0\dots01; \dots)$, *общий член которой имеет вид* 10^{-n} *при неограниченном увеличении* n. *Но в кольце частных* $S^{-1}P$, *где* S *состоит из сходящихся последовательностей с положительными членами, последовательность* $(0{,}1; 0{,}01; \dots ; 0{,}0\dots01; \dots)$ *обратима, в отличие от последовательности, состоящей из одних нулей. То есть уже отличается чем-то. В поле вещественных чисел это (эквивалентное) равенство верно, так как осуществляется предельный переход (как бы перепрыгиваем через бесконечно малую величину вида* $0,(0)1$, *если применить не совсем корректную, но очень красноречивую запись, где* 1 *идет после неограниченного количества нулей). В работе «Теория неограниченностей»* (см.[1]) *всё это рассмотрено более аккуратно.*

Выделим среди числовых последовательностей фундаментальные. Согласно критерию Коши: всякая сходящаяся числовая последовательность фундаментальна и всякая фундаментальная числовая последовательность сходится, то есть имеет конечный предел. Отчасти в обозначениях и в терминологии будем придерживаться учебника для вузов [2]. Все необходимые понятия, определения и свойства числовых последовательностей можно найти там же. Вкратце здесь приведу только самое нужное.

Пусть имеются сходящиеся последовательности $\{a_n\} = (a_1, a_2, \dots , a_n, \dots)$ и$\{b_n\} = (b_1, b_2, \dots , b_n, \dots)$, где $n = 1,2,3 \dots$. Далее n специально описывать не будем. Определим почленно сумму и произведение сходящихся последовательностей:$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$и$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$. Определим умножение последовательности на действительное число, как умножение всех его членов на это число. Заметим, что сумма, произведение и умножение на число сходящихся последовательностей, определенных таким образом, будет сходящейся последовательностью. Причем, если последовательности имели пределы соответственно a и b, то сумма последовательностей будет сходиться к числу $a + b$, произведение – к $a \cdot b$, а последовательность, умноженная на действительное число α:$\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\}$– к $\alpha \cdot a$. Для каждого вещественного a во множестве последовательностей, сходящихся к a, есть последовательность $\{a_n\} = \{a\}$ (все члены последовательности совпадают с пределом этой последовательности), которую называют стационарной.Теперь операцию умножения на действительное число α, можно представлять, при необходимости, как умножение на стационарную последовательность$\{\alpha\}$. Две последовательности называются равными, если их разность есть стационарная последовательность $\{0\}$, если же их разность есть последовательность, сходящаяся к нулю, то будем называть эти последовательности эквивалентно равными. На множестве сходящихся последовательностей определим частичный порядок: $\{a_n\} > \{b_n\} \Leftrightarrow$, когда все члены разности$\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\}$, начиная с некоторого конечного индекса строго больше нуля. Определить на множестве сходящихся последовательностей, какой-либо разумный линейный порядок, согласованный с обычным порядком конечных вещественных чисел, к которым они сходятся, не представляется возможным. Например, две последовательности $\{a_n\}$и $\left\{a_n + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ имеют разность $\{a_n\} - \left\{a_n + \frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{a_n - a_n - \frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$, которая не дает возможность говорить, что одна из них больше другой.

Множество всех сходящихся последовательностей с определенными таким образом операциями сложения и умножения, как легко видеть, образуеткоммутативное ***кольцо***P, в котором множество всех последовательностей, сходящихся к нулю, образует **идеал**I. В частности, последовательность, состоящая из одних нулей –стационарная последовательность $\{0\}$, также принадлежит этому идеалу и является нейтральным элементом по сложению в кольцеP, по умножению нейтральным элементом является стационарная последовательность $\{1\}$.

Основное множество кольца сходящихся последовательностей разбивается на классы эквивалентности, по отношению «сходиться к конечным вещественным числам». Все последовательности, сходящиеся к одному и тому же вещественному числу a, составляют один смежный класс.Операции на классах эквивалентности вводятся стандартно: $(\{a_n\} + I) + (\{b_n\} + I) = \{a_n + b_n\} + I$,$(\{a_n\} + I) \cdot (\{b_n\} + I) = \{a_n \cdot b_n\} + I$.Нетрудно показать корректность введенных таким образом операций на классах эквивалентности кольца сходящихся последовательностей, то есть независимость от выбора представителя класса эквивалентности. Сведения о коммутативных кольцах можно найти в [3] и [4].

Рассмотрим факторкольцо P/I. Нейтральным классом в этом факторкольце по сложению является идеал I, по умножению – класс последовательностей, сходящихся к единице. Действительно, в силу корректности определений суммы и произведения классов, достаточно рассмотреть в качестве представителей этих классов стационарные последовательности $\{0\}$ и $\{1\}$ соответственно:
$(\{a_n\} + I) + (\{0\} + I) = \{a_n + 0\} + I = \{a_n\} + I$,$(\{a_n\} + I) \cdot (\{1\} + I) = \{a_n \cdot 1\} + I = \{a_n\} + I$.

Два смежных класса факторкольца P/Iназываются **взаимно обратными**, если произведение любых двух представителей, взятых по одному из каждого класса, есть последовательность, принадлежащая нейтральному по умножению классу. Покажем, что любой класс, не представляющий ноль – обратим, то есть имеет обратный. Каждому смежному классу последовательностей сходящихся к действительному числу $a \neq 0$, обратным будет смежный класс последовательностей сходящихся к действительному числу$\frac{1}{a}$. Действительно, произведение любых двух последовательностей, взятых по одному из этих классов, будет сходиться к произведению $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Мы доказали, что факторкольцо P/Iявляется полем. Если рассмотреть отображение $P/I \to R$, где R – поле вещественных чисел, по правилу: каждому смежному классу последовательностей ставится в соответствие предел, к которому эти последовательности стремятся, то, очевидно, получим изоморфизм. Итак, нами получена

Теорема 1. *ФакторкольцоP/I изоморфно полю вещественных чисел.*

Таким образом, этим изоморфизмом ноль (как число или как точка) представляется идеалом I, соответственно всякое вещественное число a – смежным классом $\{a_n\} + I$, где $\{a_n\}$ произвольная сходящаяся кaпоследовательность. Смежные классы будем обозначать также$[\{a_n\}] = \{a_n\} + I$, или $[a]$.

Определение. *Сходящаяся последовательность называется обратимой, если она принадлежит обратимому смежному классу.*

Следствие из теоремы 1. *Идеал I максимален, кольцо P локально и идеал I содержит все собственные идеалы кольца P.*

Доказательство. Любая последовательность из множества $P \setminus I$(разность основных множеств кольца P и идеала I) сходится к некоторому $a \neq 0$, а значит, принадлежит обратимому смежному классу, то есть и сама является обратимой. Согласно предложению 1.6 пункт 1 из [3] на странице 13, P локальное кольцо и Iего максимальный идеал.А так как всякий идеал, не совпадающий с самим кольцом, содержится в некотором максимальном идеале, получаем, что идеал I содержит все собственные идеалы кольцаP.

В кольце Pрассмотрим идеал J,состоящий из всех последовательностей, в которых содержится лишь конечное число ненулевых членов. Это означает, что каждая последовательностьиз этого идеала, начиная с некоторого натурального индекса (для каждой последовательности свой индекс), состоит из членов равных нулю:

$$J = \{\{c_n\} | \text{существует } k, \text{такое, что } c_m = 0, \text{при } m > k, c_n \in R, k, m \in N\}.$$

По следствию из теоремы 1, идеал J содержится в идеале I. Стандартно строим факторкольцо кольца P по идеалу J, индуцируя операции из кольца P на смежные классы. Факторкольцо $P/J = P_J$состоит из смежных классов, таких, что разность между двумя последовательностями из одного класса принадлежит идеалу J. Другими словами, две последовательности из одного смежного класса отличаются лишь конечным числом членов или, грубо говоря, имеют одинаковый «**хвост**». Элементами факторкольца P_J являются классы $\{a_n\} + J$. Кроме того, заметим, что в каждом смежном классе $\{a_n\} + J$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность $\{b_n\}$, что если последовательности из$\{a_n\} + J$ сходятся кa, то $|b_n - a| < \varepsilon$для всех $n = 1,2,3, \dots$. Другими словами, можно считать, что элементы из факторкольца P_J находятся «внутри» любой наперед заданной окрестности соответствующего числа.

Теперь, используя стандартный изоморфизм (см. [5], с. 148, теорема 5) $R \cong P/I \cong {}^{(P/J)}\!/_{(I/J)} = P_J/I_J$, где $I_J = I/J$ (напомним, что$J \subset I$) мы можем «копаться» внутри идеалов, рассматривая соответствующие классы, представляющие точки вещественной прямой. Элементами факторкольца P_J/I_J являются классы $(\{a_n\} + J) + I_J$. Каждая сходящаяся последовательность изP попадает в один из этих смежных классов, как по идеалу J, так и по идеалу I_J.

Лемма 1. *Если последовательность $\{a_n\}$изP сходится к числу $a > 0$, то эта последовательность содержит лишь конечное число нулевых и отрицательных членов. И, наоборот, если последовательность содержит лишь конечное число нулевых и отрицательных членов, и, кроме того, сходится, то к неотрицательному числу.*

Доказательство. Если бы это было не так, то последовательность содержала бы неограниченное число неположительных членов, а значит и подпоследовательность состоящую из неположительных членов, которая не может сходиться к $a > 0$, а значит, и последовательность не может сходиться к$a > 0$. Противоречие. Наоборот, если последовательность содержит лишь конечное число нулевых и отрицательных членов, то начиная с некоторого конечного индекса все ее члены положительны, откуда, в силу того, что последовательность по условию является сходящейся, следует справедливость утверждения.

Ситуация симметрична для последовательностей сходящихся к отрицательному числу.

Будем находиться в факторкольце P_J/I_J, рассматривая $\{a_n\} + J$ – смежныеклассыпоследовательностей по идеалу J, как **выделенные** представители (элементы) тех или иных смежных классов по идеалу I_J, то есть $(\{a_n\} + J) + I_J$. Выделим множество S_J всех смежных классов последовательностей по идеалу J, представители которых, содержат конечное число неположительных членов, оно мультипликативно замкнуто.Само множество представителей – множество сходящихсяпоследовательностей, содержащих лишь конечное число неположительных членов обозначим черезS_+. По лемме 1, в смежных классах множестваS_J содержатся все последовательности сходящиеся к положительным числам. Кроме них, в смежных классах S_J содержатсявсе последовательности, которые сходятся к нулю (представители из факторидеала$I_J = I/J$) и имеют лишь конечное число неположительных членов. Других последовательностей в смежных классах множества S_J нет. Обозначим множество всех последовательностей, которые сходятся к нулю и имеют лишь конечное число неположительных членов через $U (U \subset S_+)$.Множество смежных классов по идеалу J, которым принадлежат последовательности из U обозначим черезU_J. Заметим, что каждое из множеств U и U_J, аддитивно и мультипликативно замкнуты. Более того, являются аддитивными и мультипликативными полугруппами, а относительно обеих операций полукольцами.

Определение. *Полукольцом называется аддитивная полугруппа, замкнутая по умножению, для которой справедливы законы дистрибутивности.*

Элементы из U_J идеала I_Jпри необходимости будем выделять формальной записью из множества $U_J + I_J$, то есть запись $(\{a_n\} + J) + I_J \in U_J + I_J$, означает, что $\{a_n\} + J \in U_J$, которое возможно только в случае, когда $\{a_n\} \in U$. Это удобно и позволит в дальнейшем сохранить единство записи, при определении частичной операции деления на элементы изU_J.

Для каждой последовательности $\{\alpha_n\}$ изU, являющейся представителем смежного класса по идеалу J в идеале I_J, в том же смежном классе (по идеалу J), которому она принадлежит, найдется последовательность$\{\tilde{\alpha}_n\}$, которая состоит только из положительных членов (но «хвосты» у них одинаковы). Например, если все неположительные члены последовательности $\{\alpha_n\}$ заменить на любые положительные, (положим, на число 1). Вообще, любой конечный начальный «кусок» можно заменить на нужные нам члены, и мы все равно останемся в смежном классе $\{\alpha_n\}+J$. Множество таких последовательностей с положительными членами $\{\widetilde{\alpha_n}\}$, обозначим через $\widetilde{U}$. Аналогично, для последовательностей $\{s_n\}$ из $S_+ \setminus U$ (теоретико-множественная разность), обозначим через $\widetilde{S_+ \setminus U}$множество последовательностей $\{\widetilde{s_n}\}$, состоящих только из положительных членов. Каждая из них принадлежит какому-то смежному классу из$S_J \setminus U_J$.

Теперь можно определить частичную операцию деления в факторкольце P_J/I_J на элементы из мультипликативного моноида S_J. Рассмотрим два случая:

1.Если $\in P$, $\in S_+ \setminus U$, $\in \widetilde{S_+ \setminus U}$, то

$$\frac{+J)+I_J}{+J)+I_J} = \left(\frac{\{a_n\}+J}{\{s_n\}+J}\right) + I_J = \left(\frac{\{a_n\}}{\{\widetilde{s_n}\}}+J\right) + I_J = \left(\left\{\frac{a_n}{\widetilde{s_n}}\right\}+J\right) + I_J \quad ;$$

2.Если $\in P$, $\{\alpha_n\} \in U$ $\} \in \widetilde{U}$, то

$$\frac{(\{a_n\}+J)+I_J}{(\{\alpha_n\}+J)+I_J} = \left(\frac{\{a_n\}+J}{\{\alpha_n\}+J}\right) + I_J = \left(\frac{\{a_n\}}{\{\widetilde{\alpha_n}\}}+J\right) + I_J = \left(\left\{\frac{a_n}{\widetilde{\alpha_n}}\right\}+J\right) + I_J.$$

В последовательности $\left\{\frac{a_n}{\widetilde{\alpha_n}}\right\}$ нас на самом деле интересует лишь отношение в «хвосте», и то, является ли она сходящейся. ***Деление определено лишь в том случае, когда в результате такого деления получаем сходящуюся последовательность.*** Очевидно, чтобы в результате деления получить сходящуюся последовательность во втором случае необходимо, но недостаточно, чтобы $\{a_n\} \in I$ или $(\{a_n\}+J) \in I_J$. В первом случае операция деления определена для всех $\{a_n\} \in P$ и для всех $\{s_n\} \in S_+ \setminus U$.

На самом деле, частичная операция деления проводится не в кольце P_J/I_J, так как тогда эту операцию мы должны были бы определить на смежных классах изP_J/I_J. В первом случае она, действительно, определена на классах – деление не зависит от выбора представителя из соответствующих классов, то есть определено корректно. А вот во втором случае, частичное деление определено лишь на элементы из U_J кольца P_J (а это лишь часть идеала I_J, то есть часть смежного класса), и только потом уже определяется в каком смежном классе по идеалу I_J факторкольца P_J/I_J оказался (если оказался) результат этого деления. Результат деления во втором случае для $\{a_n\} \in I$ полностью зависит от выбора представителей из U_J, поэтому не может быть определен для всего смежного класса I_J, хотя бы, потому, что не может быть определен для последовательностей с неограниченным числом нулевых членов.

Комментарий. В силу вышесказанного, на самом деле, выражение $\frac{(\{a_n\}+J)+I_J}{(\{\alpha_n\}+J)+I_J}$ выглядит несколько странным, в силу того, что $(\{\alpha_n\}+J) \in I_J$ и, поэтому получается, что $(\{\alpha_n\}+J)+I_J = I_J$, если подходить аддитивно. Но, исходя из равенств $kI_J = I_J$, при любых конечных вещественных $k \neq 0$, получается, чтокак бы «отношение» $\frac{I_J}{I_J} = k$ означает неопределенность (может равняться любому, отличному от нуля, конечному вещественному числу). В математическом анализе эта неопределенность (правда, предполагается, что k может быть и бесконечным) называется неопределенностью ноль на ноль и обозначается $\left(\frac{0}{0}\right)$. Получается, что, если мы имеем выделенные в I_J представители, то это отношение может стать вполне определенным (сравните теоремы 2 и 3). Можно было бы рассмотреть лишь отношение представителей $\frac{(\{a_n\}+J)}{(\{\alpha_n\}+J)}$ (иногда так и будем рассматривать), но хотелось (как бы) все время оставаться в факторкольце P_J/I_J,изоморфном полю вещественных чисел, поэтому была использована формальная приписка $+I_J$, не меняющая сути, но дающая нам такую (эфемерную) возможность, к тому же сохраняющая единство записей в первом и во втором случаях. **Хотя именно это вводило в заблуждение, что, находя пределы при $\Delta x \to 0$ в знаменателе, мы думали, что все время находимся в поле вещественных чисел.**

Нам удобно находиться в кольце P_J, разбитом на смежные классы, по идеалу I_J, работая со смежными классами по идеалу J(элементамикольца P_J), чтобы следить за тем, где (в каком классе) окажется результат операций уже в факторкольце P_J/I_J. При этом представители $\{\alpha_n\}+J$ из U_J идеала I_J, которые мы назвали ***выделенными*** и, которые формально обозначены $\{\overline{\alpha}_n\}+I_J = (\{\alpha_n\}+J)+I_J \in U_J + I_J$, интерпретируют то, что называют бесконечно малыми величинами.

Напомним, что для каждого выделенного элемента $\{\propto_n\} + J$ из U_J, и для любого вещественного $\varepsilon > 0$, найдется последовательность $\{\beta_n\} \in \bar{U}$ такая, что выполняется неравенство $\beta_n < \varepsilon$, при всех $n = 1,2,3,\dots$. Действительно, для любого вещественного $\varepsilon > 0$ и произвольного выделенного элемента $\{\propto_n\} + J$, найдется индекс k, такой, что $\propto_m < \varepsilon$, при $m > k$. Заменив в последовательности $\{\propto_n\}$, первые k членов на положительные вещественные, меньшие ε, получим искомую последовательность $\{\beta_n\} \in \bar{U}$.

Проведем теперь аналогии с бесконечно малыми величинами (см. Таблицу 1):

Таблица 1– Аналогия с бесконечно малыми величинами

Положительные бесконечно малые величины	**элементы из U_J («хвосты» классов неограниченно малых последовательностей по идеалу J)**
Положительные величины, меньше любой конечной положительной величины	Каждый смежный класс из U_J представлен последовательностями $\{\propto_n\} \in U$, которые имеют положительный «хвост». Таким образом, каково бы ни было маленьким вещественное число $\varepsilon > 0$, любая последовательность, сходящаяся к ε, будет больше любой последовательности из U, так как их разность будет сходиться к ε (в соответствии с введенным выше частичным порядком для сходящихся последовательностей).
Сумма конечного числа бесконечно малых величин – бесконечно малая величина	аддитивная замкнутость U_J: если $\{\beta_n\}, \{\propto_n\} \in U$, то $\left((\{\beta_n\}+J)+I_J\right)+\left((\{\propto_n\}+J)+I_J\right) = \left((\{\beta_n\}+J)+(\{\propto_n\}+J)\right)+I_J = (\{\beta_n\}+\{\propto_n\}+J)+I_J = (\{\beta_n+\propto_n\}+$ $J)+I_J \in U_J + I_J$, так как $\{\beta_n+\propto_n\} \in U$
Произведение положительного конечного числа на бесконечно малую величину – бесконечно малая величина	Произведение любой последовательности сходящейся к положительному числу, на последовательность из U принадлежит U, а значит, одному из смежных классов из $U_J \subset I_J$: если $\{a_n\} \in S_+ \setminus U$, $\{\propto_n\} \in U$, то $\left((\{a_n\}+J)+I_J\right)\cdot\left((\{\propto_n\}+J)+I_J\right) = \left((\{a_n\}+J)\cdot(\{\propto_n\}+J)\right)+I_J = (\{a_n\}\cdot\{\propto_n\}+J)+I_J = (\{a_n \propto_n\}+J)+$ $I_J \in U_J + I_J$, так как $\{a_n \propto_n\} \in U$
Сумма конечного числа и бесконечно малой величины равна этому конечному числу	Сумма любой сходящейся последовательности $\{a_n\}$ и любой последовательности сходящейся к нулю, в том числе и из U, сходится к тому же числу, что и $\{a_n\}$: $\{a_n\}+\{\propto_n\} = \{a_n+\propto_n\} \approx \{a_n\}$ (то есть $\{a_n\}$ и $\{a_n\}+\{\propto_n\}$ принадлежат одному классу). Таким образом, для любого элемента $(\{a_n\}+J)+I_J \in P_J/I_J$ и любого элемента $(\{\propto_n\}+J)+I_J \in U_J+I_J$ получаем следующее: $\left((\{a_n\}+J)+I_J\right)+\left((\{\propto_n\}+J)+I_J\right) == \left((\{a_n\}+J)+(\{\propto_n\}+J)\right)+I_J = \left((\{a_n\}+\{\propto_n\})+J\right)+I_J =$ $(\{a_n+\propto_n\}+J)+I_J = (\{a_n\}+J)+I_J$
Произведение бесконечно малых величин – бесконечно малая величина	Мультипликативная замкнутость U_J: если $\{\beta_n\}, \{\propto_n\} \in U$, то $\left((\{\beta_n\}+J)+I_J\right)\cdot\left((\{\propto_n\}+J)+I_J\right) = \left((\{\beta_n\}+J)\cdot(\{\propto_n\}+J)\right)+I_J = (\{\beta_n\}\cdot\{\propto_n\}+J)+I_J = (\{\beta_n \propto_n\}+J)+$ $I_J \in U_J + I_J$, так как $\{\beta_n \propto_n\} \in U$

Комментарий. Можно было разделить понятие «бесконечно малой величины» на «аддитивные бесконечно малые величины» (вместе с нулем) и«мультипликативные бесконечно малые величины» (без нуля, на которые можно частично делить, чтобы получать в результате в пределе конечные значения). Далее, интерпретировать «аддитивные бесконечно малые величины» как «хвосты» неограниченно малых последовательностей, допуская неограниченное количество (кроме положительных) нулевых и отрицательных членов. А «мультипликативные бесконечно малые величины», как «хвосты» неограниченно малых последовательностей с конечным числом нулевых членов. «Мультипликативные бесконечно малые величины»являются «аддитивными бесконечно малыми величинами», обратно нет. То же верно и для интерпретаций. «Хвосты» неограниченно малых последовательностей («аддитивные бесконечно малые величины») замкнуты по сложению и умножению, а хвосты» неограниченно малых последовательностей с конечным числом нулевых членов («мультипликативные бесконечно малые величины») только по умножению. Элементы же из U_J («хвосты» классов неограниченно малых последовательностей по идеалу J) образуют, как уже отмечалось, полукольцо относительно сложения и умножения. Поэтому такому изложению было отдано предпочтение.

Смежные классы по идеалуJопределяются «хвостами», то есть с точностью до произвольных значений любого начального отрезка последовательностей, которые нивелируются факторизацией по идеалу J. Причем заметим, что последовательности $\{a_n\} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ и $\{a_{k+n}\} = (a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+n}, \dots)$, k –фиксированное натуральное число, если они не стабилизирующиеся, относятся к разным смежным классам, так как у них разные «хвосты». То есть, заменяя члены начального отрезка последовательностей, согласно факторизации по идеалу J, чтобы остаться в том же смежном классе, необходимо не изменять количество заменяемых членов (тем самым, не изменять индексацию сдвигами). Сколько было членов в начальном отрезке, столько должно и остаться. Индексация «хвоста» остается неизменной.

Для большей наглядности рассмотрим один из смежных классов изU_Jпо идеалу J, например, $\left\{\frac{1}{n}\right\} + J$. Он состоит из последовательностей вида

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$a_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$a_1, a_2, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$a_1, a_2, a_3, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$\dots, \dots, \dots;$$
$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$\dots, \dots, \dots,$$

где$a_i, i = 1,2,3, \dots$ – произвольные вещественные числа. В частности, этот смежный класс содержит последовательности:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$0, 0, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$0, 0, 0, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$\dots, \dots, \dots;$$
$$0, 0, 0, \dots, 0, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$\dots, \dots, \dots,$$

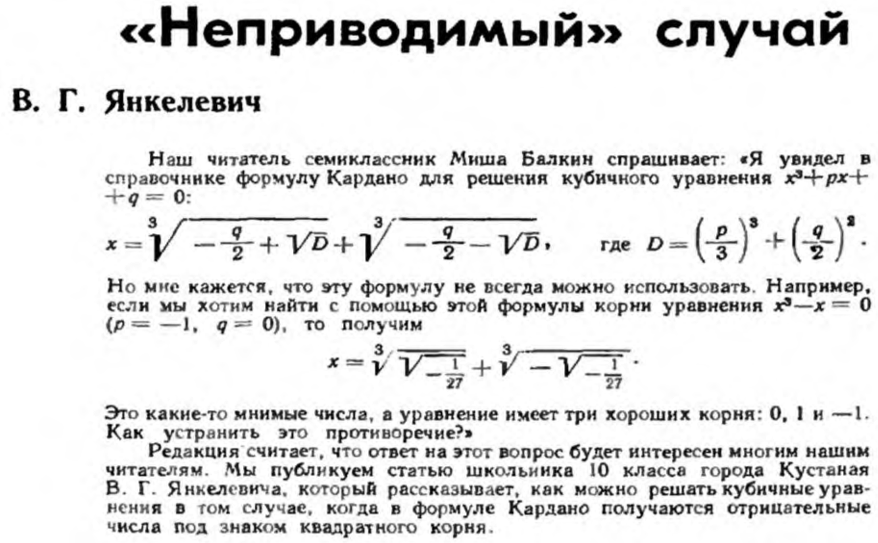
Каждая из этих последовательностей содержит конечное число нулей, подряд идущих с самого начала, однако в совокупности, для любого конечного индекса, найдется неограниченное число последовательностей, имеющих бо́льшее число нулей в начальной части. Таким образом, для данной совокупности и в целом для смежного класса, «хвост» начинается с неопределенного индекса или лучше сказать, что «хвост» не имеет начала, но он (ненулевой «хвост») существует, так как построенный идеал J, отличен от идеала I, а рассматриваемый смежный класс по идеалу J не содержит стационарной (или стабилизирующейся) последовательности, состоящей из одних нулей (их разность не принадлежит идеалу J).Идеал I кольца P сходящихся последовательностей не является идеалом в расширении $\bar{P}$кольца P, в отличие от идеала J, который является идеалом и в P и в $\bar{P}$. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$, неограниченное число последовательностей этой совокупности, а значит, и этого смежного класса, состоят из членов, меньших ε, то есть можно считать, что члены «хвоста», заведомо меньше любого положительного числа. Такая вот, **неограниченная конечность** нулей. В итоге, диалектический переход количества в новое качество, здесь реализован идеально (то есть с помощью идеалов): с одной стороны, все последовательности совокупности отличны от стационарной (или стабилизирующейся) нулевой, с другой стороны неограниченно, в совокупности, близки к ней, так как содержат неограниченное в совокупности, но каждый раз конечное число нулей в начальной части. Это переходное состояние между конечными состояниями, поэтому оно носит неопределенный характер («хвост» не имеет определенного начала). Да и конца «хвост» тоже не имеет. Как это похоже на то, что у всего сущего нет ни начала, ни конца. Между любыми двумя вещественными числами всегда есть вещественные числа, нет соседних вещественных чисел. Как же тогда осуществляется непрерывная связь между ними? Она осуществляется как раз за границей того, что может быть выражено числовыми величинами.От числовых величин требуют однозначности, а на самом деле в соответствие с изоморфизмом поля вещественных чисел R и факторкольца P_J/I_J, они определяются на вещественной прямой с точностью до неограниченно малых последовательностей.*Это потому, что вместо каждого смежного класса (при естественном гомоморфизме), берется* ***только один представитель*** *из того же смежного класса, а их неограниченно много и они отличаются друг от друга в некотором расширении кольца P, например, в $\bar{P}$.* Пока рассматриваются сумма или произведение конечного числа слагаемых или сомножителей, то мы остаемся в границах неограниченно малой ошибки. Но когда число участвующих в операции неограниченно, то можем иметь второй замечательный предел: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, хотя $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, а единица в любой степени равна единице. При этом $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = 1$, где k – фиксированное натуральное число.

Теперь понятно, почему «приращения», дифференциалы аддитивно ведут себя как нули (пренебрежительно малы) – последовательности из U,из которых состоят смежные классыиз U_J кольца P_J, интерпретирующие понятие «бесконечно малая величина», при прибавлении к любой сходящейся последовательности, представляющую некоторое число, ***оставляют эту последовательность в том же классе*** (хотя саму последовательность меняют), а значит, их сумма представляет то же самое число. Более того, теперь понятно, что такое приращение – это небольшое «*возмущение*» с помощью элементов из U_J ***внутри точки***, представленной смежным классом сходящихся последовательностей. Кроме того, в кольцеP_J, определено (частичная операция) деление на элементы из множества U_J, смежные классы последовательностей которого, являясь частью идеала I_J (в факторкольце P_J/I_J), представляют число ноль. То есть в идеале I_J, представляющем число ноль при данном изоморфизме, есть элементы, которые аддитивно ведут себя как нейтральные элементы (нули), а мультипликативно – как элементы, на которые, в отдельных случаях, можно делить (то есть для них определена частичная операция деления в фактор-кольцеP_J, а результат попадает в один из классов факторкольца P_J/I_J). В частности, в кольце частных $S_J^{-1}P_J$, так как $U_J \in S_J$, обратимы.С дифференциалами, интерпретированными в виде «хвостов» классов неограниченно малых последовательностей изU_J можно обращаться как с обычными числами. При этом никакой актуализации нет. Актуализация бесконечно малых величин, вокруг которой (так или иначе) проходила дискуссия студента Н.Н. Лузина и профессора Б.К. Млодзеевского приводит к противоречиям. (см. [6], с.120-121)

Для наглядности приведем простой пример. Рассмотрим Z_5 – поле вычетов по модулю 5. Оно состоит из пяти классов $\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$. Класс $\bar{0}$ представляют целые числа, кратные пяти: $5n$, где n пробегает целые числа. Класс $\bar{0}$ является идеалом в кольце целых чисел. Выделим в нем элемент $5+\bar{0}$ и разделим на него (считая, что частичную операцию деления мы уже ввели, аналогично той, которую мы рассмотрели для последовательностей) такой же класс с выделенным элементом $15+\bar{0}$: $\frac{15+\bar{0}}{5+\bar{0}}+\bar{0} = \frac{15}{5}+\bar{0} = 3+\bar{0} = \bar{3}$. Ясно, что деление не может проходить в поле Z_5, оно проходит в кольце целых чисел Z, мы лишь следим за тем, в каком классе поля Z_5 окажется результат деления после факторизации. Здесь также деление является частичной операцией – на класс $0+\bar{0}$ с выделенным элементом 0, делить нельзя. Или, если будем делить, например, $\frac{15+\bar{0}}{20+\bar{0}}+\bar{0}=\frac{15}{20}+\bar{0}=\frac{3}{4}+\bar{0}$, то деление осуществляется в поле Q, а результат формально не принадлежит полю Z_5, хотя можно определить, что $\frac{3}{4}\equiv 2\ (mod\ 5)$, учитывая, что $4\cdot 4\equiv 1\ (mod\ 5)$.

Таким образом, получена интерпретация понятия «бесконечно малая величина», представленная элементами множества U_J («хвостами» неограниченно малых последовательностей) при соответствующем изоморфизме. Математический анализ, построенный на понятии бесконечно малых, получил свое полное обоснование. Слова из книги Куранта Р., Роббинса Г. «Что такое математика?» ([7], с. 463) о том, что « *… «дифференциалы» в качестве бесконечно малых величин из математического обихода изгнаны теперь окончательно, и не без позора …*», потеряли свою актуальность. Более чем трехсотлетняя эпопея, связанная с обоснованием понятия бесконечно малой величины, завершена.

Интересно, что город Костанай (в советскую пору чаще назывался **Кустанай**) уже имел успешный опыт в решении одной достаточно старой ***известной проблемы*** со времен появления формул Тартальи-Кардано (XVI век) для поиска корней алгебраического уравнения третьей степени с целыми коэффициентами – это так называемый **неприводимый случай**. Это случай, когда все три корня этого уравнения – вещественные, а их поиск проходил по формулам с использованием дискриминанта с извлечением радикалов из мнимых чисел. Позволю себе сделать вставку из журнала «Квант» №11, 1971 год (см. Рисунок 1).[8]



«Неприводимый» случай

В. Г. Янкелевич

Наш читатель семиклассник Миша Балкин спрашивает: «Я увидел в справочнике формулу Кардано для решения кубичного уравнения $x^3+px+q=0$:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}},\qquad \text{где } D=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Но мне кажется, что эту формулу не всегда можно использовать. Например, если мы хотим найти с помощью этой формулы корни уравнения $x^3-x=0$ ($p=-1$, $q=0$), то получим

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}.$$

Это какие-то мнимые числа, а уравнение имеет три хороших корня: 0, 1 и —1. Как устранить это противоречие?»

Редакция считает, что ответ на этот вопрос будет интересен многим нашим читателям. Мы публикуем статью школьника 10 класса города Кустаная В. Г. Янкелевича, который рассказывает, как можно решать кубичные уравнения в том случае, когда в формуле Кардано получаются отрицательные числа под знаком квадратного корня.

Рисунок 1 – Вставка из журнала «Квант» №11, 1971 год

Владимир Григорьевич Янкелевич тогда учился в средней школе №1 города Кустаная с математическим уклоном. Его отец преподавал на кафедре математики в Кустанайском государственном педагогическом институте (КГПИ) имени 50-летия образования СССР (и такие имена бывали). Интересно, что старший брат Владимира Григорьевича, Леонид Григорьевич, работая в КГПИ, также на кафедре математики, вел в средней школе №9 (возле Дворца Профсоюзов), в которой я учился, по четвергам факультатив, на котором рассказывал нам про кратные интегралы (1979-1980 учебный год). Через лет 7, уже после окончания университета и прохождения службы в рядах Советской Армии (1985-1987), я стал работать на этой же кафедре, где всё это мне поведал Леонид Григорьевич.

Список литературы:

1. ДемисеновБ.Н.,Теория неограниченностей. Костанай, 2007-2021
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М: «Наука», Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989, - 736 с.
3. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972. – 160 с.
4. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: «Наука». Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 624 с.
5. Кострикин А.И. Введение в алгебру, часть 3: Основные структуры алгебры. – М.: МЦНМО, 2009. – 272 с.
6. Лузин Н.Н. О бесконечно малых величинах в преподавании и науке. // Математика в высшем образовании, 2005, №3
7. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? – М.: МЦНМО, 2007. – 568 с.

8. Янкелевич В.Г. Неприводимый случай. Квант №11, 1971, с.20-21.

УДК 373.51

О РАЗВИТИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ

*Станогина Наталья Владимировна, магистр педагогики, учитель математики КГУ «Общеобразовательная школа №22 отдела образования города Костаная» Управления образования акимата Костанайской области, г.Костанай, Казахстан, E-mail:*stnv1972@mail.ru

Аңдатпа

Оқушылардың математикалық сауаттылығын дамыту тұрғысынан оқу процесін қалай ұйымдастыруға болады? Осы бағытта нақты нәтижелерге қол жеткізу үшін мұғалімдер қандай стратегиялар мен тәсілдерді қолдануы керек? Осы және басқа да көптеген сұрақтарға мақала авторы оның жауаптарын ұсынады жұмыс тәжірибесі.

Түйінді сөздер: математикалық сауаттылық, функционалдық сауаттылық, тапсырма, математикалық модель, практикалық қолдану.

Аннотация

Как организовать учебный процесс с точки зрения развития математической грамотности учащихся? Какие стратегии и подходы должны применять педагоги, чтобы добиться ощутимых результатов в этом направлении? На эти и многие другие вопросы автор статьи предлагает ответы из своего опыт работы.

Ключевые слова: математическая грамотность, функциональная грамотность, задача, математическая модель, практическое применение.

Abstract

How to organize the educational process in terms of the development of mathematical literacy of students? What strategies and approaches should teachers apply in order to achieve tangible results in this direction? The author of the article offers answers to these and many other questions from his work experience.

Keywords: mathematical literacy, functional literacy, task, mathematical model, practical application.

В современной школе процесс обучения должен быть ориентирован на развитие компетентностей, способствующих реализации концепции «образование через всю жизнь». Уже давно установлено, что предпосылкой развития компетентности личности является наличие определенного уровня функциональной грамотности.

Одним из компонентов функциональной грамотности является математическая грамотность.

Так, в рамках исследования PISA-2022 используется следующее определение: «Математическая грамотность – это способность человека рассуждать математически и формулировать, использовать и интерпретировать математику для решения задач в различных реальных контекстах.

Она включает в себя понятия, процедуры, факты и инструменты для описания, объяснения и прогнозирования явлений. Она помогает людям понять ту роль, которую математика играет в мире, и принимать обоснованные суждения и решения, необходимые конструктивным, вовлеченным и рефлексирующим гражданам XXI века» [1; с.3].

Для того чтобы учащиеся были математически грамотными, они должны уметь, во-первых, использовать свои знания о содержании математики, чтобы распознать математическую природу ситуации (проблемы), особенно тех ситуаций, которые встречаются в реальном мире, а затем сформулировать ее в математических терминах. Эта трансформация от неоднозначной, запутанной, реальной ситуации к четко определенной математической задаче требует математических рассуждений. После успешного преобразования полученная математическая задача должна быть решена с использованием математических понятий, алгоритмов и процедур, преподаваемых в школах.

Предметная компетенция как освоенные специфические знания, умения, навыки в рамках учебного предмета отражаются в знаниевой и компетентностной подготовке обучающихся по освоению базового содержания общего среднего образования. Предметная компетенция обеспечивает умения отличать факты от домыслов, применять измерительные навыки и использовать вероятностные, статистические и иные методы познания, эффективно планировать и организовывать образовательную деятельность, владеть способами анализа и рефлексии деятельности по освоению знаний на основе требований соответствующей функциональной