степенями неразрешимости относительно одно-односводимости, которые имеют название одно-одностепеней или 1-степенями и степенями неразрешимости относительно много – односводимости, которые в свою очередь имеют название много-одностепеней или m–степенями.

В настоящей работе доказаны две теоремы. В доказательстве теоремы используются известные результаты, например:

Теорема (Пост). *Множество A рекурсивно тогда и только тогда, когда как A, так и* $\overline{A}$ *рекурсивно перечислимы.*

Теорема 1. *Пусть* $A \leq_m \overline{A}$ *и A – рекурсивно перечислимое множество. Тогда A будет рекурсивным множеством.*

Доказательство. По определению *m* – сводимости найдется рекурсивная функция *f*, такая, что $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in \overline{A}$, то есть $f(A) = \overline{A}$. Так как *A* – рекурсивно перечислимое множество, то по определению найдется рекурсивная функция *g*(*x*), такая, что *Val g* = *A*. Таким образом, имеем две рекурсивные функции, такие, что $g : N \xrightarrow{на} A$, $f : A \to \overline{A}$. Отсюда можно рассмотреть композицию отображений $f \cdot g : N \to \overline{A}$; откуда следует, что $Val\, f \cdot g = \overline{A}$. Тогда, по определению, $\overline{A}$ – рекурсивно перечислимое множество, так как $f \cdot g$ – рекурсивная функция. И по теореме Поста получаем, что *A* – рекурсивное множество.

Теорема 2. *Пусть A и B – такие рекурсивно перечислимые множества, что* $A \cup B = N$, $A \cap B \neq$ Ø. *Тогда* $A \leq_m A \cap B$.

Доказательство. Так как *A* и *B* – рекурсивно перечислимые множества и существуют рекурсивные функции *f*, *g*, *h* такие, что *Val f* = *A*, *Val g* = *B*, *Val h* = = $A \cap B$. По другому определению рекурсивно перечислимого множества найдутся примитивно рекурсивные функции $f_1(x,y)$, $g_1(x,y)$ такие, что $f_1(x,y) = 0$ имеет решение $y \Leftrightarrow x \in A$ $g_1(x,y) = 0$ имеет решение $y \Leftrightarrow x \in B$.

Так как $A \cup B = N$, то функция $\varphi(x) = \mu x(f_1(x,y) \cdot g_1(x,y) = 0)$ всюду определена и, следовательно рекурсивна.

Поэтому функции
$F(x) = sg(f(x, \varphi(x)))$ и
$G(x) = sg(g(x), \varphi(x)))$ рекурсивны.

Функция

$$\varphi(x) = (h \circ f)(x) \cdot \overline{sg}(F(x)) \cdot sg(G(x)) +$$
$$+ x\overline{sg}(F(x) + G(x)) + x \cdot \overline{sg}(G(x))$$

будет рекурсивной и *m* – сводит *A* к $A \cap B$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. – М., Мир, 1972.
2. А. И. Мальцев Алгоритмы и рекурсивные функции. – М., Наука, 1986.

Лодяная Н.С., преподаватель математики,
Костанайский социально-технический колледж

ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГРУПП ГОМОМОРФИЗМОВ

Целью данной статьи автор поставил выявление связи между точными последовательностями групп гомоморфизмов и индуцированными последовательностями.

Пусть $\alpha : A \to B$ — эпиморфизм, и пусть *ker a* = *K*. Полный прообраз $\alpha^{-1}b = \{a \mid a \in A, \alpha a = b\}$ элемента $b \in B$ является смежным классом *a* + *K* в *A*.

Отсюда следует следующее утверждение:

Индуцированное эпиморфизмом α отображение $a + K \to \alpha A$ (которое не зависит от конкретного выбора представителя a смежного класса) представляет собой изоморфизм между A/K и B.

Таким же образом произвольный гомоморфизм $\alpha : A \to B$ индуцирует изоморфизм между группами $A/Ker\ \alpha$ и $Im\ \alpha$.

Гомоморфизмы группы A в группу C, образующие абелеву группу, будем называть группой гомоморфизмов группы A в группу C и обозначать $Hom\ (A,C)$. Нулем этой группы является тривиальный гомоморфизм группы А в группу C, обратный элемент $-\alpha$ для элемента $\alpha : A \to C$ переводит элемент $a \in A$ в элемент $-\alpha a \in C$.

Пример 1. Если $A = Z$, то любой гомоморфизм $\alpha: Z \to C$ вполне определяется элементом $\alpha 1 = c$ ($\in C$), причем, очевидно, для каждого элемента $c \in C$ существует такой гомоморфизм $\alpha: Z \to C$, что $\alpha 1 = c$.

Так как из $\alpha 1 = c_1$, $\beta 1 = c_2$ следует $(\alpha + \beta)1 = c_1 c_2$, то соответствие $\alpha \mapsto c$, если $\alpha 1 = c$, оказывается естественным изоморфизмом между группой $Hom\ (Z, C)$ и группой C, т. е. $Hom(Z,C) \cong C$.

Пример 2. Пусть $\varphi: Z \to Z$. Если $ker\varphi \neq Z$, тогда $ker\varphi$ – тривиальная подгруппа.

Предположим обратное, пусть $a \in Ker\varphi,\ a \neq 0$, a – минимальное.

Если a=1, то $\ker\varphi = Z$.

Если a>1, то $\ker\varphi = aZ$.

Тогда φZ циклическая группа, изоморфная Z. Но Z не содержит элементов конечного порядка. Получили противоречие.

Таким образом, $\varphi(1) = a \in Z$ однозначно определяет изоморфизм $Hom(Z,Z) \cong Z$ тогда и только тогда, когда $\forall \varphi \in Hom(Z,Z) \quad f(\varphi) = \varphi(1)$

Покажем, что последнее отображение является изоморфизмом.

$f(0) = 0(1) = 0$

$f(-\varphi) = -\varphi(1) = -f(\varphi)$

$f(\varphi+\psi) = (\varphi+\psi)\ (1) =$ (*так как* $\varphi, \psi \in Hom(Z,Z)$) $= \varphi(1)+ \psi(1)=f(\varphi)+f(\psi)$

$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in Hom(Z,Z)$ пусть $\varphi_1 \neq \varphi_2$ и предположим, что $f(\varphi_1) = f(\varphi_2)$.

Тогда по определению $f(\varphi) = \varphi(1)$, что $\varphi_1 = \varphi_2$, что противоречит условию.

Следовательно, при $\varphi_1 \neq \varphi_2$, $f(\varphi_1) \neq f(\varphi_2)$ отображение инъективное.

Пусть φ – некоторый гомоморфизм из $Hom(Z,Z)$. Тогда по определению $\forall \varphi(1) \in Z \quad \exists f(\varphi) = \varphi(1)$, т.е. отображение сюръективное.

В теории абелевых групп часто бывает удобным вести изложение в терминах категорий, которые не являются алгебраическими системами в обычном смысле, они только «классы».

Наиболее важным для нас примером категорий является категория А всех абелевых групп , где объекты – абелевые группы, а морфизмы – их гомоморфные отображения.

Точно так же, как о гомоморфизмах для алгебраических систем, можно говорить о функторах для категорий. В теории абелевых групп приходится сталкиваться почти исключительно с аддитивными функторами, т. е. такими функторами F, что $F(\alpha + \beta) = F(\alpha) + F(\beta)$ для всех тех $\alpha, \beta \in$ А, для которых $\alpha + \beta$ определено. Для аддитивного функтора F из категории А в категорию А получается, что F (0) = 0, где 0 обозначает нулевую группу или нулевой гомоморфизм, а также $F(n\alpha) = nF(\alpha)$ для любого $n \in Z$.

Напомним, что последовательность групп A_i и гомоморфизмов α_i

$$A_0 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots \xrightarrow{\alpha_k} A_k,$$

$(k \geq 2)$ называется точной, если

$\operatorname{Im}\alpha_i = Ker\alpha_{i+1}$, $i = 1,...,k-1$.

В частности, последовательность $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B$ точна тогда и только тогда, когда α – мономорфизм, а последовательность $B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ точна тогда и только тогда, когда β – эпиморфизм.

Точность последовательности $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ эквивалентна тому, что α – изоморфизм.

Точная последовательность вида $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ называется короткой точной последовательностью; здесь α – такое вложение группы A в группу B, что β – эпиморфизм с ядром $\operatorname{Im}\alpha$.

Каждый гомоморфизм $\eta \in Hom(A,C)$ порождает гомоморфизм $A' \to C'$, являющейся результатом последовательного выполнения гомоморфизмов

$$A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\eta} C \xrightarrow{\gamma} C'.$$

Соответствие $\eta \mapsto \gamma\eta\alpha$ есть гомоморфизм группы $Hom(A,C)$ в группу $Hom(A',C')$, который обозначается через $Hom(\alpha,\gamma): Hom(A,C) \to Hom(A',C')$ и называется индуцированным гомоморфизмом; точнее этот гомоморфизм индуцируется гомоморфизмами α и γ, что отражено в обозначении $Hom(\alpha,\gamma)$.

При $A'' \xrightarrow{\alpha'} A' \xrightarrow{\alpha} A$ и $C \xrightarrow{\gamma} C' \xrightarrow{\gamma'} C''$ легко получается, что $Hom(\alpha\alpha',\gamma'\gamma) = Hom(\alpha',\gamma')Hom(\alpha,\gamma)$.

Из вышеизложенного видно, что $Hom(1_A,1_C) = 1_{Hom(A,C)}$.

Функтор $Hom(\alpha,\gamma)$ аддитивен по α и γ. Следовательно, мы получаем следующий результат:

Hom есть аддитивный бифунктор из категории A×A в категорию A, контравариантный по первому и ковариантный по второму аргументу.

Рассмотрим известную теорему Картана Эйленберга.

Пусть $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ короткая точная последовательность. Тогда для любой группы G индуцированные последовательности

$$0 \to Hom(C,G) \xrightarrow{\beta^*} Hom(B,G) \xrightarrow{\alpha^*} Hom(A,G), \quad (1)$$

$$0 \to Hom(G,A) \xrightarrow{\alpha_*} Hom(G,B) \xrightarrow{\beta_*} Hom(G,C) \quad (2)$$

точны.

Возникает вопрос какие условия нужно наложить на группу G, чтобы последовательности (1), (2) можно было дополнить в конце отображением →*0* и получить более длинные точные последовательности. Для ответа на этот вопрос рассмотрим следующую лемму.

Лемма. Если дана группа G, то для любой точной последовательности

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

последовательность (1) (соответственно последовательность (2)) с отображением → *0* в конце точна тогда и только тогда, когда G – делимая (свободная) группа.

Для доказательства леммы рассмотрим отображение α*.

Оно является эпиморфизмом тогда, когда для любого ξ: *A*→*G* существует такой гомоморфизм η: *B*→*G*, что ηα = ξ, а это означает инъективность группы *G*.

Утверждение, касающееся последовательности (2), получается двойственным образом.

Теорема. Пусть α: *A*→*B* — такой мономорфизм, что для любой группы *G* индуцированное отображение $\alpha^*: Hom(B,G) \to Hom(A,G)$ является эпиморфизмом. Тогда αA служит для группы *B* прямым слагаемым.

Доказательство. Возьмем тождественный гомоморфизм 1_A из $Hom(A,A)$.

Пусть *G*=*A*. Тогда в силу условия задачи

$$\alpha^*: Hom(B,A) \to Hom(A,A)$$

является сюръективным отображением, следовательно, 1_A имеет прообраз *f* в $Hom(B, A)$. По определению гомоморфизма α^*, $f|A=1_A$. Обозначим $C=Ker\, f$ и покажем, что C является дополнительным прямым слагаемым для αA в B.

Так как C – ядро, то в нем содержатся элементы, отображающиеся в 0 множества A. Отображение αA переводит его в 0 множества B, поэтому $C \bigcap \alpha A = \{0\}$.

Чтобы показать, что $C + \alpha A = B$ рассмотрим отображение f из $Hom(B, A)$, его ядро $C=Ker\, f$ и отображение $f' : B / C \to A$, которое является изоморфизмом в силу леммы 1. Тогда отображение

$$h = \alpha \circ f' : B / C \to \alpha A$$

также является изоморфизмом, т.е. $B / C \underset{h}{\cong} \alpha A$.

Пусть $b \in B$. Изоморфизм h переводит класс смежности $b+C$ в некоторый элемент $a \in \alpha A$. То есть $a \in b + C$ и $a = b + c$ для некоторого $c \in C$.

Получаем, что $b = a - c \in A + C$, т.е. $C + \alpha A = B$.

Таким образом, в работе рассмотрены некоторые связи между точными последовательностями групп гомоморфизмов и индуцированными последовательностями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Фукс, «Бесконечные абелевые группы», т.1, М., 1974.
2. А.Г. Курош, «Теория групп», «Наука», М., 1967.
3. М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков «Основы теории групп», М., 1972.

Олейников А.А., кандидат педагогических наук, зав. кафедрой,
Костанайский государственный педагогический институт
Мукашева А.А., ст. преподаватель,
Костанайский государственный университет им. А. Байтурсынова
Олейников Г. А., учащийся, СШ №23, г. Костанай

ОСНОВЫ ТЕОРИЙ ФРЕНОЛОГИИ И ИСКУСТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ПРЕПОДАВАНИИ ИНФОРМАТИКИ

Цивилизованное человечество задаётся вопросами: как влияют на психику человека предоставляемые компьютерной системой возможности виртуального воздействия на реальную действительность? Как нейтрализовать негативное воздействие виртуальной реальности на сознание человека? Как выявить и реализовать скрытые дидактические возможности аппаратно-программных средств компьютера в формировании личности?

Отчасти ответы на поставленные вопросы может дать наука френология – учение, созданное Ф. Галлеем, доказывавшее связь между известными душевными функциями и психическими особенностями животных и человека с одной стороны и наружной формой их черепа – с другой. Френология основывалась на следующих априорных положениях: головной мозг есть исключительный орган всех духовных, психических функций животных и человека; он не представляет единого аппарата, но состоит из ряда отдельных нервных механизмов, заведующих отдельными душевными функциями и душевными влечениями. Головной мозг, таким образом, разбивается на отдельные участки, коим отвечают определенные способности и влечения – и степень развития последних стоит в прямом отношении к величине соответствующих им частей мозга. Усиленное развитие тех или других частей мозга, долей его, извилин его и т. д. отражается, по мнению Галля, на форме черепной коропки, повторяющей со своей стороны вы-