Головина Н. А., магистрант
Костанайский государственный педагогический институт

СВОДИМОСТЬ МНОЖЕСТВ

Для того, чтобы правильно ориентироваться по теме статьи, могут понадобиться следующие немаловажные определения:

Частичная функция g от m перечислимых, определённая на A со значениями в C, полагая по определению $g(x_1,...,x_m) = f(f_1(x_1,...,x_m),...,f_n(x_1,...,x_m))$ *называется рекурсивной функцией.* [2]

Множество рекурсивно, если оно обладает общерекурсивной характеристической функцией. (То есть A рекурсивно тогда и только тогда, когда существует общерекурсивная функция f, такая, что для любого x $x \in A \Rightarrow f(x) = 1$ *и* $x \in \overline{A} \Rightarrow f(x) = 0$.) [1]

На интуитивном уровне *A* рекурсивно, если существует эффективная процедура, позволяющая решить для любого данного *x,* принадлежит ли он множеству *A* или не принадлежит.

Множество A рекурсивно перечислимо, если или A = Ø, или существует общерекурсивная функция f, такая, что A есть множество значений функции f.

Существует еще одно равносильное определение рекурсивного множества:

Множество чисел A называется рекурсивно перечислимым, если существует двуместная примитивно рекурсивная функция f(a, x) такая, что f(a, x)=0 имеет решение x тогда и только тогда, когда $a \in A$. [2]

На интуитивном уровне множество рекурсивно перечислимо, если существует эффективная процедура для перечисления (возможно, с повторениями) его элементов.

Известны две основные формулировки понятия сводимости.

Множество A одно-односводимо к множеству B (обозначение: $A \leq_1 B$*), если существует взаимно однозначная (одно-однозначная) общерекурсивная функция f, такая, что* $(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B]$.

Вместо «одно-односводимость» употребляется термин «1-сводимость».

Множество A много-односводимо к множеству B (обозначение: $A \leq_m B$*), если существует общерекурсивная функция f, такая, что* $(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B]$.

Много-односводимость сокращенно называется m-сводимостью [1].

Следующая основная теорема о сводимостях сообщает некоторые важные сведения об одно- и много-односводимости.

Теорема. (a) *Отношения* $\leq_1$ и $\leq_m$ *рефлексивны и транзитивны*:

$A \leq_1 A$ *и* $A \leq_1 B$ & $B \leq_1 C$, *то* $A \leq_1 C$.

$A \leq_m A$ *и* $A \leq_m B$ & $B \leq_m C$, *то* $A \leq_m C$.

(b) *Если* $A \leq_1 B$, *то* $A \leq_m B$.

(c) *Если* $A \leq_1 B$, *то* $\overline{A} \leq_1 \overline{B}$.

(d) *Если* $A \leq_m B$, *то* $\overline{A} \leq_m \overline{B}$.

(e) *Если* $A \leq_m B$ и *B – рекурсивно, то множество A рекурсивно.*

(f) *Если* $A \leq_m B$ и *B – рекурсивно перечислимо, то множество A рекурсивно перечислимо.*

Множества A и B эквивалентны относительно одно – односводимости (обозначение: $A \equiv_1 B$*), если множество A одно – односводимо к множеству B и множество B одно – односводимо к множеству B.*

Множества A и B эквивалентны относительно много – односводимости (обозначение: $A \equiv_m B$*), если множество A много – односводимо к множеству B и множество B много – односводимо к множеству B.*

Классы этих отношений эквивалентности называются соответственно степенями неразрешимости относительно одно-односводимости, которые имеют название одно-одностепеней или 1-степенями и степенями неразрешимости относительно много – односводимости, которые в свою очередь имеют название много-одностепеней или m–степенями.

В настоящей работе доказаны две теоремы. В доказательстве теоремы используются известные результаты, например:

Теорема (Пост). *Множество A рекурсивно тогда и только тогда, когда как A, так и $\overline{A}$ рекурсивно перечислимы.*

Теорема 1. *Пусть $A \leq_m \overline{A}$ и A – рекурсивно перечислимое множество. Тогда A будет рекурсивным множеством.*

Доказательство. По определению *m* – сводимости найдется рекурсивная функция *f*, такая, что $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in \overline{A}$, то есть $f(A) = \overline{A}$. Так как *A* – рекурсивно перечислимое множество, то по определению найдется рекурсивная функция *g*(*x*), такая, что *Val g = A*. Таким образом, имеем две рекурсивные функции, такие, что $g : N \xrightarrow{на} A$, $f : A \to \overline{A}$. Отсюда можно рассмотреть композицию отображений $f \cdot g : N \to \overline{A}$; откуда следует, что $Val\, f \cdot g = \overline{A}$. Тогда, по определению, $\overline{A}$ – рекурсивно перечислимое множество, так как $f \cdot g$ – рекурсивная функция. И по теореме Поста получаем, что *A* – рекурсивное множество.

Теорема 2. *Пусть A и B – такие рекурсивно перечислимые множества, что $A \cup B = N$, $A \cap B \neq \varnothing$. Тогда $A \leq_m A \cap B$.*

Доказательство. Так как *A* и *B* – рекурсивно перечислимые множества и существуют рекурсивные функции *f*, *g*, *h* такие, что *Val f = A*, *Val g = B*, *Val h = = $A \cap B$*. По другому определению рекурсивно перечислимого множества найдутся примитивно рекурсивные функции $f_1(x, y)$, $g_1(x, y)$ такие, что

$f_1(x, y) = 0$ имеет решение $y \Leftrightarrow x \in A$

$g_1(x, y) = 0$ имеет решение $y \Leftrightarrow x \in B$.

Так как $A \cup B = N$, то функция

$$\varphi(x) = \mu x(f_1(x, y) \cdot g_1(x, y) = 0)$$

всюду определена и, следовательно рекурсивна.

Поэтому функции

$F(x) = sg(f(x, \varphi(x)))$ и

$G(x) = sg(g(x), \varphi(x)))$ рекурсивны.

Функция

$$\varphi(x) = (h \circ f)(x) \cdot \overline{sg}(F(x)) \cdot sg(G(x)) +$$
$$+ x\overline{sg}(F(x) + G(x)) + x \cdot \overline{sg}(G(x))$$

будет рекурсивной и *m* – сводит *A* к $A \cap B$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. – М., Мир, 1972.
2. А. И. Мальцев Алгоритмы и рекурсивные функции. – М., Наука, 1986.

Лодяная Н.С., преподаватель математики,
Костанайский социально-технический колледж

ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГРУПП ГОМОМОРФИЗМОВ

Целью данной статьи автор поставил выявление связи между точными последовательностями групп гомоморфизмов и индуцированными последовательностями.

Пусть $\alpha : A \to B$ — эпиморфизм, и пусть *ker a = K*. Полный прообраз $\alpha^{-1}b = \{a \mid a \in A, \alpha a = b\}$ элемента $b \in B$ является смежным классом *a + К* в *A*.