Искакова Д.Р., магистрант
Костанайский государственный педагогический институт

ОБОБЩЕНИЕ ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ГАУССОВЫХ МЕР

Пусть Q есть линейное пространство всех вещественных последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$ с канонической гауссовой мерой ω:

$$\omega\{x \in : (x_1,...,x_n) \in \wp \subset R_n\} = \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{\wp} e^{-\eta_1^2 - ... - \eta_n^2} d\eta_1 ... \eta_n.$$

Содержание закона больших чисел составляет, в частности, следующее утверждение: на множестве полной ω-меры $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0$.

Это же можно перефразировать следующим образом. Рассмотрим матрицу «средних арифметических», то есть такую матрицу $F = \|f_{nk}\|$, что

$$f_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, n \le k, \\ \\ 0, n > k. \end{cases}$$

Пусть c_0 есть пространство сходящихся к нулю последовательностей. Тогда матрица «средних арифметических» переводит множество полной меры в c_0, то есть мера множества

$\Omega_F = \{x \in \Omega : Fx \in c_0\}$ равна 1.

Поставим следующую задачу: какова должна быть произвольная матрица F для того, чтобы $\omega\Omega_F = 1$? При этом, так как множество Ω_F представляет собой измеримое линейное подпространство полной c_0-меры, то

$$\Omega_F \supset l_2 = \left\{x \in \Omega : \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\right\},$$

и поэтому элементы каждой строки матрицы F представляют собой координаты вектора из l_2.

Известно, что произвольный измеримый линейный функционал $f(x)$ представим в виде сходящегося почти всюду в Ω ряда

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k, \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{\ 2} < \infty .$$

Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$ измеримых линейных функционалов

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{nk} x_k, n = 1,2,...,$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{nk}^{\ 2} < \infty$ и числа f_{nk} являются элементами $n-$ной строки матрицы F.

Теперь поставленную задачу можно сформулировать в терминах координат f_{nk} функционалов в следующем эквивалентном виде: найти необходимое и достаточное условие того, чтобы на множестве полной меры в Ω последовательность измеримых линейных функционалов $\{f_n(x)\}$ сходилась к нулю.

По-видимому, для произвольной матрицы F нельзя указать общего необходимого и достаточного условия сходимости почти всюду. Мы дадим набор необходимых и достаточных условий для широкого класса матриц F.

Введем некоторые определения. Пусть F есть матрица со строками из $l_2 = \left\{x \in \Omega : \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\right\}$. Назовем матрицу F матрицей с линейно независимыми строками, если все ее строки образуют в l_2 множество линейно независимых векторов. Матрицу F назовем матрицей с ортогональными строками, если ее строки взаимно ортогональны в l_2.

Любой конечный набор строк произвольной матрицы F назовем блоком. Два блока считаются ортогональными, если каждая строка одного из блоков ортогональна в l_2 всем строкам второго блока (строки одного и того же блока не обязательно взаимно ортогональны). Всякую матрицу с линейно независимыми строками можно умножением слева на треугольную обратимую матрицу превратить в матрицу с ортогональными блоками. Сформулируем соответствующую лемму, являющуюся обобщением известного метода ортогонализации Штурма.

Лемма 1. Пусть F есть матрица с линейно независимыми строками, $\{F_k\}(k=1,2,...)$ - какое-нибудь разбиение матрицы на непересекающиеся блоки:

$$F_k=\{f_m^{(k)}=(f_{p1},f_{p2},...)\,m=1,...,m_k,p=n_1^{(k)},...,n_{m_k}^{(k)}\},$$

существует нижняя треугольная матрица G с единицами на главной диагонали (то есть обратимая), такая, что матрица $H = GF$ разбивается на непересекающиеся ортогональные блоки

$$H_k=\{h_m^{(k)}=(h_{p1},h_{p2},...)\,m=1,...,m_k,p=n_1^{(k)},...,n_{m_k}^{(k)}\},$$

такие, что в блоки H_k и F_k входят строки с одними и теми же номерами.

Матрицу G назовем T_0-матрицей, если $G_{c_0}\subset c_0$. Известно, что $G=|g_{nk}|$ является T_0-матрицей тогда, и только тогда, когда:

1) $\sum_{k=1}^{\infty}|g_{nk}|\le M<\infty$ для любого $n>N$

и 2) $\lim_{n\to\infty}g_{nk}=0$ для любого k.

Теорема 1. Пусть F есть матрица с линейно независимыми строками, G - обратимая нижняя треугольная T_0-матрица, такая, что G^{-1} - также Го-матрица, и матрица $H=GF$ является матрицей с ортогональными блоками:

$$H_k=\{h_m^{(k)}=(h_{p1},h_{p2},...)\,m=1,...,m_k,p=n_1^{(k)},...,n_{m_k}^{(k)}\},$$

k=1,2,..., причем $\sup_k m_k$ = M< ∞. Для того, чтобы $\omega\Omega_F=1$, необходимо и достаточно, чтобы для т=1,2,... сходились ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\max_{1\le m\le m_k}\|h_m^{(k)}\|\exp\left\{-\frac{1}{n^2\max\limits_{1\le m\le m_k}\|h_m^{(k)}\|^2}\right\},\tag{1}$$

где $\|h_m^{(k)}\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}h_{pk}^2}$ - гильбертова норма строки $h_m^{(k)}$.

Рассмотрим случай матрицы с ортогональными строками. Пусть строки матрицы F взаимно ортогональны в l_2. Для того, чтобы $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$ почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|e-\frac{1}{n^2\|f_k\|^2}<\infty,\quad \text{n}=1,2,...\tag{2}$$

Рассмотрим теперь случай с произвольной матрицей, которым обобщим для матрицы с бесконечным числом строк.

Лемма 2. Пусть F есть произвольная матрица. Существует разбиение матрицы F на матрицы F_1 и F_2, строки которых являются строками матрицы F с возрастающими номерами, такое, что в F_1 и F_2 нет одинаковых строк, F_1 – матрица с линейно независимыми строками, $F_2= G_1F_1$, где G_1 – некоторая матрица (причем, если F_1 имеет конечное число строк, то G_1 имеет такое же число столбцов).

Теорема 2. Пусть в условиях предыдущей леммы матрица F_1 имеет бесконечное число строк (то есть G_1 имеет бесконечное число столбцов), и пусть G_2 есть обратимая треугольная матрица, такая, что матрица $H_1 = G_2F_1$ состоит из ортогональных строк (такая матрица G_2 всегда существует в силу леммы 1). Для того, чтобы $\omega\Omega_{F_2}=1$ (то есть $\omega\Omega_F=1$), необходимо и достаточно, чтобы для матрицы $G=G_1G_2^{-1}$ выполнялось условие

$$\lim_{n\to\infty}g_{nk}=0\quad k=1,...,\infty.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\omega\Omega_{F_2}=1$. Так как Ω_{F_2} является измеримым линейным пространством полной ω-меры, то (см. [2]) $\Omega_{F_2} \supset l_2$, и поэтому $F_2 l_2 \subset c_0$. Пусть $g_k = (g_{k1},...,g_{km})$ суть строки матрицы $G = G_1 G_2^{-1}$; h_k-строки матрицы H_1; f_k – строки матрицы F_2. Так как

$$F_2 = G_1 G_2^{-1} H_1 = GH_1 \text{, то}$$

$$f_k = \sum_{p=1}^{\infty} g_{kp} h_p ;$$

$$[F_2 h_k]_n = (f_k, h_k) = (\sum_{p=1}^{\infty} g_{np} h_p, h_k) = g_{nk} \|h_k\|^2$$

т.к. $\sum\limits_{p=1}^{\infty} g_{np} h_p , h_k$ почти всюду на Q конечны и, как пределы усеченных сумм, являются линейными измеримыми функционалами, и в силу того, что $h_k \in l_2$, а $F_2 h_k \subset c_0$,

$$\lim_{n\to\infty} g_{nk} \|h_k\|^2 = 0,\ k = 1,...,\infty,$$

$$\text{т.е.,} \lim_{n\to\infty} g_{nk} = 0,\ k = 1,...,\infty.$$

Достаточность. Обозначим $h_k(x) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} h_{nl} x_l \quad (k = 1,...,\infty)$. Так как $h_k \in l_2$, то функционал $h_k(x)$ определен на множестве Ω_k полной меры. Пусть последовательность $x \in \Omega_0 = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_k$; $\omega\Omega_0 = 1$ и n-ая координата вектора $F_2 x$

$$[F_2 x]_n = \sum_{k=1}^{m} g_{nk} h_k(x).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} g_{nk} = 0$, $k = 1,...,\infty$, то $F_2 x \in c_0$, что и требуется доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1965.
2. Фан Дык Тинь, Г.Е. Шилов Интеграл, мера и производная на линейных пространствах. – М.:Наука, 1967.
3. Халмош П. Теория меры. – М.:ИЛ, 1953.

Искакова У.А., магистрант
Костанайский государственный педагогический институт

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ МАТРИЦЫ В ВИДЕ КОММУТАТОРА В КОЛЬЦЕ МАТРИЦ С ЭЛЕМЕНТАМИ ИЗ ЧИСЛОВОГО ПОЛЯ

В статье [5] «О разрешимости уравнения коммутаторного типа над кольцом матриц» были найдены необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения $[A, X] = B$ для матриц 2 порядка, также было показано, что для матриц 3 порядка эти условия не являются достаточными.

В настоящей работе для матриц 3 порядка найдены необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения $[A, X] = B$ в случаях, когда матрица A строго верхняя треугольная или диагональная, или строго нижняя треугольная. Представим матрицу A в виде суммы строго верхней треугольной, диагональной и строго нижней треугольной матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 \\ a_7 & a_8 & 0 \end{pmatrix}$$

и рассмотрим каждый случай в отдельности.

1 случай. Матрица A - строго верхняя треугольная.