$$V = \left\{ f(x) : \| f(x) - \theta \|_{R_\Delta} < \varepsilon \cdot \mathrm{I}, x \in \Delta \right\},$$

где $\mathrm{I} = \{ \mathrm{f(x)} : \mathrm{f(x)} \equiv 1, \mathrm{x} \in \Delta \}$

Полагая

$$V_k = \left\{ f(x) : \| f(x) - \theta \|_{R_\Delta} < \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \mathrm{I}, x \in \Delta \right\}$$

Тогда

$$V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k = \left\{ f(x) : \| f(x) - \theta \|_{R_\Delta} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \mathrm{I}, x \in \Delta \right\} =$$

$$= \left\{ f(x) : \| f(x) - \theta \|_{R_\Delta} < \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \mathrm{I}, x \in \Delta \right\} = \left\{ f(x) : \| f(x) - \theta \|_{R_\Delta} < \varepsilon \cdot \mathrm{I}, x \in \Delta \right\}$$

Что и доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т.1. Функциональный анализ. М., 1977.
2. Круглов В.М. Дополнительные главы теории вероятностей. М., 1984.
3. ДаулетбаевТ.Е. Случайные процессы в локально-выпуклых пространствах. Материалы конференции. Костанай, 1998.

Түйіндеме

Мақалада локалды дөңес коңістіктердегі кездей соқ элементтер қарастырылған. Ыңтамалдығы бірге тең болып жинақталатың кездейдық элементтер тізбыгініқ шегінің де кездейсоң элемент болатыны дәлелденген.

Conclusion

The article describes some accidental elements in the local convex spaces, it is proved that the limit of accidental elements meeting sequence with unit probability is also an accidental element with the weight.

Синько О.В., магистрант

Костанайский государственный педагогический институт

ОБ ИЗВЛЕЧЕНИИ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В линейной алгебре изучаются объекты трех родов: матрицы, пространства и алгебраические формы. Теории этих объектов тесно связанны друг с другом. Большинство задач линейной алгебры допускает естественную формулировку в каждой из указанных трех теорий. Матричная формулировка обычно наиболее удобна для вычислений.

Среди существующей литературы по теории матриц монография Ф.Р. Гантмахера занимает общепризнанно одно из главных мест. В монографии рассматриваются уравнения нескольких типов, решается матричное многочленное уравнение вида $A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \ldots + A_m = 0$. В частности он выделил уравнение $X^m = A$ - извлечение корня m-ой степени из неособенной и особенной матрицы А. Для решения этих уравнений матрицу А приводят к нормальной жордановой форме, тогда матрица А записывается в следующем виде: $A = U\tilde{A}U^{-1}$. В случае для неособенной матрицы А, Х принимает следующий вид:

$$X = T \left\{ \begin{matrix} \sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + H_2}, \\ \ldots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u + H_u} \end{matrix} \right\} T^{-1},$$

где $T = UX_{\tilde{A}}$, а $X_{\tilde{A}}$ - произвольная неособенная матрица, перестановочная с $\tilde{A}$. А для особенной Х записывается следующим образом:

$$X = U\left\{X_{A_1}, X_{A_2} QP^{1}\right\} \left\{ \begin{matrix} \sqrt[m]{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}}, \sqrt[m]{\lambda_2 E^{(p_2)} + H^{(p_2)}}, \\ \ldots, \sqrt[m]{\lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}}, H^{(v_1)}, \ldots, H^{(v_s)} \end{matrix} \right\} \cdot$$

$\cdot \left\{ X_{A_1}^{-1}, PQ^{1} X_{A_2}^{-1} \right\} U^{-1}$, где P - матрица перехода от одного базиса к другому, а Q - осуществляет перестановку клеток в квазидиагональной матрице. Т.е. для решения этого уравнения Гантмахер использует приведение матриц к нормальной жордановой форме.

Целью нашей работы является нахождение явного решения (т.е. выразить элементы матрицы X через известные элементы матрицы A) матричного уравнения $X^2 = A$ для квадратных матриц второго порядка другим способом, не приводя их к жордановой форме.

Итак, пусть дано множество матриц 2-го порядка

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big/ a, b, c, d \in R \right\},$$

R- поле действительных чисел.

Будем рассматривать уравнения вида $X^2 = A$ над кольцом M_2, т.е. $A \in M_2$ и решения X также находятся в M_2.

Итак, рассмотрим уравнение $X^2 = A$.

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Тогда уравнение примет вид:

$$X^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ или:}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 x_3 & x_1 x_3 + x_2 x_4 \\ x_1 x_3 + x_3 x_4 & x_2 x_3 + x_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Таким образом, приравнивая элементы матриц, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 x_3 = a \\ x_2 x_3 + x_2 x_4 = b \\ x_1 x_3 + x_3 x_4 = c \\ x_2 x_3 + x_4^2 = d \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2 x_3 = a \\ x_2 (x_1 + x_4) = b \\ x_3 (x_1 + x_4) = c \\ x_2 x_3 + x_4^2 = d \end{cases}$$

Рассмотрим отношение второго уравнения системы к третьему, получим несколько случаев:

1) Если $c = 0, b = 0$, то

А) Пусть $x_1 + x_4 \neq 0$, тогда

$x_2 = 0, x_3 = 0$

$x_1 = \sqrt{a}, x_4 = \sqrt{d}$

Тогда решением уравнения будет матрица $X = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{d} \end{pmatrix}$

В) Пусть $x_1 + x_4 = 0$, тогда $x_1 = -x_4$

x_2, x_3 одновременно не могут быть свободными из-за 1-го и 4-го уравнений системы.

Если x_2 - свободная переменная, то:

а)при $x_2 \neq 0$, $x_3 = \dfrac{a - x_1^2}{x_2}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \dfrac{a - x_1^2}{x_2} & -x_1 \end{pmatrix}$$

в)при $x_2 = 0$, x_3-свободная переменная, $X = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ x_3 & \sqrt{d} \end{pmatrix}$

Если x_3- свободная переменная, то:

а)при $x_3 \neq 0$, $x_2 = \dfrac{a - x_1^2}{x_3}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \dfrac{a - x_1^2}{x_3} \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix}$$

в) при $x_3 = 0$, x_2- свободная переменная, $X = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & x_2 \\ 0 & \sqrt{d} \end{pmatrix}$

2) Если $c \neq 0$, то рассматриваем отношение второго уравнения к третьему $\dfrac{x_2}{x_3} = \dfrac{b}{c}$

Если $b \neq 0$, то рассматриваем отношение третьего уравнения ко второму $\dfrac{x_3}{x_2} = \dfrac{c}{b}$

Так как равенства $\dfrac{x_2}{x_3} = \dfrac{b}{c}$ и $\dfrac{x_3}{x_2} = \dfrac{c}{b}$ определяют одну и ту же пропорцию, в обоих случаях получаем одно и то же решение.

Преобразовывая систему

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 x_3 = a \\ x_2 (x_1 + x_4) = b \\ x_3 (x_1 + x_4) = c \\ x_2 x_3 + x_4^2 = d \end{cases},$$

получим: $\begin{cases} x_1^2 - x_4^2 = a - d \\ x_2(x_1 + x_4) = b \\ x_3(x_1 + x_4) = c \\ x_2 x_3 + x_4^2 = d \end{cases}$

т.к. $\dfrac{x_2}{x_3} = \dfrac{b}{c}$ $\Rightarrow$ мы можем записать x_2, x_3 через коэффициент подобия: $x_2 = kb$ и $x_3 = kc$

Тогда система перепишется следующим образом:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_4^2 = a - d \\ kb(x_1 + x_4) = b \\ kc(x_1 + x_4) = c \\ k^2bc + x_4^2 = d \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1^2 - x_4^2 = a - d \\ x_1 + x_4 = \dfrac{1}{k} \\ x_1 + x_4 = \dfrac{1}{k} \\ k^2bc + x_4^2 = d \end{cases};$$

$$\begin{cases} (x_1 + x_4)(x_1 - x_4) = a - d \\ x_1 + x_4 = \dfrac{1}{k} \\ x_1 + x_4 = \dfrac{1}{k} \\ k^2bc + x_4^2 = d \end{cases}$$

Произведя соответствующие преобразования, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{k}(x_1 - x_4) = a - d \\ x_1 + x_4 = \dfrac{1}{k} \\ x_1 + x_4 = \dfrac{1}{k} \\ k^2bc + x_4^2 = d \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 - x_4 = (a - d)k \\ x_1 + x_4 = \dfrac{1}{k} \\ x_1 + x_4 = \dfrac{1}{k} \\ k^2bc + x_4^2 = d \end{cases}$$

Складывая первое и второе уравнения системы $\begin{matrix} x_1 - x_4 = (a - d)k \\ x_1 + x_4 = \dfrac{1}{k} \end{matrix}$

получим:

$$2x_1 = \frac{1}{k} + (a - d)k$$

$$x_1 = \frac{\frac{1}{k} + (a - d)k}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + (a - d)k^2}{2k} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1 + (a - d)k^2}{2k} \\ x_2 = kb \\ x_3 = kc \\ x_4 = \dfrac{1 - (a - d)k^2}{2k} \end{cases}$$

т.е. решением уравнения $X^2 = A$ будет матрица

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + (a - d)k^2}{2k} & kb \\ kc & \dfrac{1 - (a - d)k^2}{2k} \end{pmatrix}$$

Найдем k:

$$X^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + (a - d)k^2}{2k} & kb \\ kc & \dfrac{1 - (a - d)k^2}{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1 + (a - d)k^2}{2k} & kb \\ kc & \dfrac{1 - (a - d)k^2}{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1 + 2(a - d)k^2 + (a - d)^2k^4}{4k^2} + bck^2 & \dfrac{b}{2}\left(1 + (a - d)k^2\right) + \dfrac{b}{2}\left(1 - (a - d)k^2\right) \\ \dfrac{c}{2}\left(1 + (a - d)k^2\right) + \dfrac{c}{2}\left(1 - (a - d)k^2\right) & \dfrac{1 - 2(a - d)k^2 + (a - d)^2k^4}{4k^2} + bck^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1 + 2(a - d)k^2 + (a - d)^2k^4 + 4bck^4}{4k^2} & b \\ c & \dfrac{1 - 2(a - d)k^2 + (a - d)^2k^4 + 4bck^4}{4k^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\frac{2 + 2(a - d)^2k^4 + 8bck^4}{4k^2} = a + d; \quad \frac{2(1 + (a - d)^2k^4 + 4bck^4)}{4k^2} = a + d.$$

Приведем данное уравнение к биквадратному:

$k^2 = t$

$((a-d)^2 + 4bc)t^2 - 2(a+d)t + 1 = 0$

Перепишем уравнение следующим образом:

$a_1 t^2 + 2a_2 t + a_3 = 0$, где

$a_1 = \left((a-d)^2 + 4bc\right)$,

$a_2 = 2(a+d)$, $a_3 = 1$

Рассмотрим два случая:

1) $a_1 \neq 0$

$D = 4(a+d)^2 - 4\left((a-d)^2 + 4bc\right) = 4a^2 +$

$+8ad + 4d^2 - 4a^2 + 8ad - 4d^2 - 16bc =$

$= 16ad - 16bc = 16(ad - bc)$

$\sqrt{D} = 4\sqrt{ad - bc}$

$$t_1 = \frac{2(a+d) + 4\sqrt{ad - bc}}{2\left((a-d)^2 + 4bc\right)}$$

$$\Rightarrow k_1 = \sqrt{\frac{(a+d) + 2\sqrt{ad - bc}}{\left((a-d)^2 + 4bc\right)}}$$

$$t_2 = \frac{2(a+d) - 4\sqrt{ad - bc}}{2\left((a-d)^2 + 4bc\right)}$$

$$\Rightarrow k_2 = \sqrt{\frac{(a+d) - 2\sqrt{ad - bc}}{\left((a-d)^2 + 4bc\right)}}$$

2) $a_1 = 0 \; -2(a+d)t + 1 = 0$

$t = \dfrac{1}{2(a+d)} \Rightarrow$ получаем два случая:

a) $a + d \neq 0$, $\Rightarrow k = \dfrac{1}{\sqrt{2(a+d)}}$

b) $a + d = 0$, $\Rightarrow k - не\_существует$

Подставим k в решение уравнения, получим:

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{(3a+d)\sqrt{2(a+d)}}{4(a+d)} & \dfrac{b}{\sqrt{2(a+d)}} \\ \dfrac{c}{\sqrt{2(a+d)}} & \dfrac{(a+3d)\sqrt{2(a+d)}}{4(a+d)} \end{pmatrix}$$

Подставим k_1 в решение уравнения, получим:

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + (a-d)\dfrac{(a+d) + 2\sqrt{ad - bc}}{(a-d)^2 + 4bc}}{2\sqrt{\dfrac{(a+d) + 2\sqrt{ad - dc}}{(a-d)^2 + 4bc}}} & b\sqrt{\dfrac{(a+d) + 2\sqrt{ad - dc}}{(a-d)^2 + 4bc}} \\ c\sqrt{\dfrac{(a+d) + 2\sqrt{ad - dc}}{(a-d)^2 + 4bc}} & \dfrac{1 - (a-d)\dfrac{(a+d) + 2\sqrt{ad - bc}}{(a-d)^2 + 4bc}}{2\sqrt{\dfrac{(a+d) + 2\sqrt{ad - dc}}{(a-d)^2 + 4bc}}} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{\dfrac{a^2 - 2ad + d^2 + 4bc + a^2 - d^2 + 2(a-d)\sqrt{ad - bc}}{(a-d)^2 + 4bc}}{2\sqrt{\dfrac{(a+d) + 2\sqrt{ad - dc}}{(a-d)^2 + 4bc}}} & b\sqrt{\dfrac{(a+d) + 2\sqrt{ad - dc}}{(a-d)^2 + 4bc}} \\ c\sqrt{\dfrac{(a+d) + 2\sqrt{ad - dc}}{(a-d)^2 + 4bc}} & \dfrac{\dfrac{a^2 - 2ad + d^2 + 4bc - a^2 + d^2 - 2(a-d)\sqrt{ad - bc}}{(a-d)^2 + 4bc}}{2\sqrt{\dfrac{(a+d) + 2\sqrt{ad - dc}}{(a-d)^2 + 4bc}}} \end{pmatrix}$$

Учитывая, что k_1 принимает два значения положительное и отрицательное, то решения тоже будет два:

$$X = \pm \begin{pmatrix} \dfrac{(a-d)\left(a + \sqrt{ad - bc}\right) + 2bc}{\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\sqrt{(a+d) + 2\sqrt{ad - bc}}} & b\sqrt{\dfrac{(a+d) + 2\sqrt{ad - dc}}{(a-d)^2 + 4bc}} \\ c\sqrt{\dfrac{(a+d) + 2\sqrt{ad - dc}}{(a-d)^2 + 4bc}} & \dfrac{(d-a)\left(d + \sqrt{ad - bc}\right) + 2bc}{\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\sqrt{(a+d) + 2\sqrt{ad - bc}}} \end{pmatrix}$$

Подставим k_2 в решение уравнения, получим:

$$X=\begin{pmatrix} \dfrac{1+(a-d)\dfrac{(a+d)-2\sqrt{ad-bc}}{(a-d)^2+4bc}}{2\sqrt{\dfrac{(a+d)-2\sqrt{ad-dc}}{(a-d)^2+4bc}}} & b\sqrt{\dfrac{(a+d)-2\sqrt{ad-dc}}{(a-d)^2+4bc}} \\ c\sqrt{\dfrac{(a+d)-2\sqrt{ad-dc}}{(a-d)^2+4bc}} & \dfrac{1-(a-d)\dfrac{(a+d)-2\sqrt{ad-bc}}{(a-d)^2+4bc}}{2\sqrt{\dfrac{(a+d)-2\sqrt{ad-dc}}{(a-d)^2+4bc}}} \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} \dfrac{\dfrac{a^2-2ad+d^2+4bc+a^2-d^2-2(a-d)\sqrt{ad-bc}}{(a-d)^2+4bc}}{2\sqrt{\dfrac{(a+d)-2\sqrt{ad-dc}}{(a-d)^2+4bc}}} & b\sqrt{\dfrac{(a+d)-2\sqrt{ad-dc}}{(a-d)^2+4bc}} \\ c\sqrt{\dfrac{(a+d)-2\sqrt{ad-dc}}{(a-d)^2+4bc}} & \dfrac{\dfrac{a^2-2ad+d^2+4bc-a^2+d^2+2(a-d)\sqrt{ad-bc}}{(a-d)^2+4bc}}{2\sqrt{\dfrac{(a+d)-2\sqrt{ad-dc}}{(a-d)^2+4bc}}} \end{pmatrix}$$

Учитывая, что k_2 принимает два значения положительное и отрицательное, то решения тоже будет два:

$$X=\pm\begin{pmatrix} \dfrac{(a-d)\left(a-\sqrt{ad-bc}\right)+2bc}{\sqrt{(a-d)^2+4bc}\sqrt{(a+d)-2\sqrt{ad-bc}}} & b\sqrt{\dfrac{(a+d)-2\sqrt{ad-dc}}{(a-d)^2+4bc}} \\ c\sqrt{\dfrac{(a+d)-2\sqrt{ad-dc}}{(a-d)^2+4bc}} & \dfrac{(d-a)\left(d-\sqrt{ad-bc}\right)+2bc}{\sqrt{(a-d)^2+4bc}\sqrt{(a+d)-2\sqrt{ad-bc}}} \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы получили все явные решения уравнения вида $X^2=A$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц. Издательство «Наука». Москва 1966.
2. А.Г. Курош. Курс высшей алгебры. Издательство «Наука». Москва 1975.

Түйіндеме

Мақалда екінші тәртіптегі $X^2=A$ квадраттың матрицаның теңдеуі шешіледі. Бұл теңдеудің матрицаны қалыпты жорданды түрге келтіруде қолданылмайтын барлық айқын шешімдер келтірілген.

Conclusion

The equation $X^2=A$ of the square matrixes of the second order solves the article. All evident decisions of this equation, not using adduction of the matrixes to normal jordan form are brought.