УДК 519.6 (075.8)

СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ГРУНТА

Токмухамбетова Ж.С., 1 курс, 7М06107 – математический инжиниринг и компьютерное моделирование, Костанайский региональный университет им. А.Байтурсынова

Байманкулов А.Т., д.ф.-м.н., профессор кафедры информационных систем Костанайский региональный университет им. А.Байтурсынова

В работе исследуется задача определения коэффициента теплопроводности грунта с заданными начальными и граничными условиями. Первоначальная дифференциальная постановка задачи апроксимируется ее разностным аналогом. Для обоснования математических свойств задачи строится вспомогательная задача.

Исследование теплофизических характеристик рассматриваемого участка земли позволяет определить геологический состав грунта, при помощи заранее составленной базы данных теплофизических параметров различных типов грунтов. В результате можноаприори сделать заключение о структурном составе изучаемого слоя. Одним из важных показателей является теплопроводность грунта и процессы переноса тепла. Как известно, перемещение тепла осуществляется путемкондукции, конвекции и излучения. При вычислении величины коэффициента теплопроводности λ определяется общий поток тепла, состоящей из всех выше перечисленных элементарных потоков. По этой причине коэффициент теплопроводности является некоторой эффективной характеристикой, суммирующий сразу несколько разных механизмов теплопередачи.

Для исследования коэффициента теплопроводности λ рассматривается дифференциальная задача

$$\gamma_0 c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) \tag{1}$$

$$\lambda \left.\frac{\partial \theta}{\partial z}\right|_{z=H} = -\alpha\left(\theta|_{z=H} - T_b(t)\right), \tag{2}$$

$$\theta|_{z=0} = T_1, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(z), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial W}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu \frac{\partial W}{\partial z}\right), \tag{4}$$

$$\theta|_{z=0} = W_1, \quad \left.\frac{\partial W}{\partial z}\right|_{z=H} = A(t), \; W|_{t=0} = W_0(z), \tag{5}$$

здесь $\theta(z,t)$ температура и $W(z,t)$ влажность грунта, γ_0 – удельная масса, C – теплоемкость, λ – теплопроводность грунта, k – показатель влагопроводности грунта, μ – обозначает термоградиентный коэффициент. Также задаются значения на поверхности

$$\theta|_{z=H} = T_q(t), \quad W|_{t=0} = W_q(t). \tag{6}$$

Задача определения коэффициента теплопроводности λ решается при помощи конечно – разностных схем. Дифференциальная задача (1) – (6) из $Q=(0,H)\times(0,T)$ разбиением $\Delta z=\dfrac{H}{N}$ и $\Delta t=\dfrac{T}{m}$ апроксимируется в разностную задачу сеточной области

$$Q_N^m=\{z_i=i\Delta z, i=0,1,\dots,N;\ t_J=j\Delta t,\ j=0,1,\dots,m\}$$

$$\gamma_0 c Y_{i,\bar t}^{J+1}=\left(\lambda Y_{iz}^{J+1}\right)_{\bar z} \tag{7}$$

$$Y_0^{J+1}=T_1,\quad \lambda_N Y_{N\bar z}^{J+1}+\alpha\left(Y_N^{J+1}-T_b^{J+1}\right)=0 \tag{8}$$

$$Y_i^0=\theta_0(z_i),\quad i=0,1,\dots,N \tag{9}$$

$$W_{i,\bar t}^{J+1}=\left(kW_{i,z}^{J+1}+k\mu Y_{i,z}^{J+1}\right)_{\bar z} \tag{10}$$

$$W_0^{J+1}=\omega_1,\quad W_{N,\bar z}^{J+1}=A(t_{J+1}) \tag{11}$$

$$W_i^0=\omega_0(z_i) \tag{12}$$

Нам потребуются доказательства математических свойств разностной задачи. Построим вспомогательную задачу с учетом обозначений для разностей

$$\Delta Y_i^{J+1}=Y_i^{J+1,n+1}-Y_i^{J+1,n},\quad \Delta W_i^{J+1}=W_i^{J+1,n+1}-W_i^{J+1,n},\quad \Delta\lambda=\Delta\lambda_{n+1}-\lambda_n$$

задача (7)- (12) примет вид системы

$$\gamma_0 c\Delta Y_{i,\bar t}^{J+1}=\left(\lambda_n\Delta Y_{i,z}^{J+1}+\Delta\lambda Y_{i,z}^{n+1}\right)_{\bar z} \tag{13}$$

$$\Delta Y_i^0=0,\quad \Delta Y_0^{J+1}=0,\quad \lambda_N\Delta Y_{N,\bar z}^{J+1}+\Delta\lambda Y_{N,\bar z}^{J+1}+\alpha\Delta Y_N^{j+1}=0 \tag{14}$$

$$\Delta W_{i,\bar t}^{J+1}=\left(k\Delta W_{i,z}^{J+1}+k\mu\Delta Y_{i,z}^{J+1}\right)_{\bar z} \tag{15}$$

$$\Delta W_0^{J+1}=0,\quad \Delta W_i^0=0,\quad \Delta W_{N,\bar z}^{J+1}=0 \tag{16}$$

Выражение (13) умножим на функцию $X_i^J\Delta t\Delta z$ и проведем суммирование внутренним узлам сетки θ_N^m. Тогда

$$\left(\gamma_0 c\Delta Y_{i,\bar t}^{J+1},X_i^J\right)=\left(\left(\lambda_n\Delta Y_{i,z}^{J+1}+\Delta\lambda Y_{i,z}^{n+1}\right)_{\bar z},X_i^J\right).$$

Введя, $(u,v)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{J=0}^{m-1}U_i^J V_i^J\Delta t\Delta z$ воспользуемся формулой суммирования по частям, тогда получим

$$\left(\gamma_0 c\Delta Y_{i,\bar t}^{J+1},X_i^{J+1}\right)_{J=0}^{J=m-1}-\left(\gamma_0 c\Delta Y_i^{J+1},X_{i,\bar t}^{J+1}\right)=$$

$$=\left(\lambda_n\Delta Y_{i,\bar z}^{J+1}+\Delta\lambda Y_{i,\bar z}^{n+1},X_i^J\right)_{i=1}^{i=N}-\left(\lambda_n\Delta Y_{i,\bar z}^{J+1}+\Delta\lambda Y_{i,\bar z}^{n+1},X_{i,\bar z}^J\right), \tag{17}$$

где

$$(u,v)_{J=m}=\sum_{i=1}^{N-1}V_i^m V_i^m\Delta z\,,\ (u,v)_{i=N}=\sum_{J=0}^{m-1}U_N^J V_N^J\Delta t\,.$$

Положим, что $X_i^m=0,\quad i=0,1,\dots,N;\quad X_0^J=0,1,\dots,m$, учитывая (14) повторно применив суммирование по частям и проведя элементарные преобразования, получим выражение

$$-\left(\Delta Y_i^{J+1},\gamma_0 cX_{i,\bar{t}}^{J+1}+\left(\lambda_n X_{i,z}^J\right)_{\bar{z}}\ \right)+\left(\Delta Y_N^{J+1},\lambda_n X_{N,\bar{z}}^J+\alpha X_N^J\right)=-\left(\Delta\lambda Y_{i,\bar{z}}^{J+1},X_{i,\bar{z}}^J\right) \tag{18}$$

Теперь умножим (15) скалярно на $P_i^J\Delta t\Delta z$ в области θ_N^m и проведя аналогичные выше приведенным действия при $P_i^m=0,\quad P_0^J=0$ и с учетом граничного условия (17) имеем равенство

$$-\left(\Delta W_i^{J+1},P_{i,\bar{t}}^{J+1}+\left(kP_{iz}^J\right)_{\bar{z}}\right)-\left(\Delta Y_i^{J+1},\left(k\mu P_{iz}^J\right)_{\bar{z}}\right)=-\left(k\Delta W_N^{J+1},P_{N,\bar{z}}^J\right)-\left(\Delta Y_N^{J+1},k\mu P_{N,\bar{z}}^J\right)+\left(k\mu\Delta Y_{N,\bar{z}}^{J+1},P_N^J\right).$$

Суммируя полученное равенство с (18) получим

$$-\left(\Delta Y_i^{J+1},\gamma_0 cX_{i,\bar{t}}^{J+1}+\left(\lambda_n X_{i,\bar{z}}^J\right)_{\bar{z}}+\left(k\mu P_{iz}^J\right)_{\bar{z}}\ \right)-\left(\Delta W_i^{J+1},P_{i,\bar{t}}^{J+1}+\left(kP_{iz}^J\right)_{\bar{z}}\right)=-\left(\Delta W_N^{J+1},kP_{N,\bar{z}}^J\right)-$$

$$-\left(\Delta Y_N^{J+1},k\mu P_{N,\bar{z}}^J\right)+\left(k\mu\Delta Y_{N,\bar{z}}^{J+1},P_N^J\right)-\left(\Delta\lambda Y_{i,\bar{z}}^{J+1},X_{i,\bar{z}}^J\ \right)-\left(\Delta Y_N^{J+1},\lambda_n X_{N,\bar{z}}^J+\alpha X_N^J\ \right).$$

Дискретные функции X_i^{J+1} и P_i^J подбираются так, чтобы имело место равенство

$$C\gamma_0 X_{i,\bar{t}}^{J+1}+\left(\lambda_n X_{i,z}^J\right)_{\bar{z}}+\left(k\mu P_{iz}^J\right)_{\bar{z}}=0,\ P_{i,\bar{t}}^{J+1}+\left(kP_{iz}^J\right)_{\bar{z}}=0.$$

Тогда

$$\left(\Delta Y_N^{J+1},\lambda_n X_{N,\bar{z}}^J+\alpha X_N^J\ \right)+\left(\Delta W_N^{J+1},kP_{N,\bar{z}}^J\right)+\left(\Delta Y_N^{J+1},k\mu P_{N,\bar{z}}^J\right)=\left(k\mu\Delta Y_{N,\bar{z}}^{J+1},P_N^J\right)-\left(\Delta\lambda Y_{i,\bar{z}}^{J+1},X_{i,\bar{z}}^J\ \right) \tag{19}$$

Учитывая граничные условия (14) и (16) можем записать

$$k\mu\Delta Y_{N,\bar{z}}^{J+1}=\frac{k\mu}{\lambda_n^2}\Delta\lambda\cdot\alpha\left(Y_N^{n+1}-T_b^{J+1}\right)-\frac{k\mu}{\lambda_n}\alpha\Delta Y_N^{J+1}.$$

Подставив (19) и предполагая

$$kP_{N,\bar{z}}^J=2A_0\left(W_N^{J+1}-\omega_q^J\right),\ \lambda_n X_{N,\bar{z}}^J+\alpha X_N^J+k\mu P_{N,\bar{z}}^J+\frac{k\mu\alpha}{\lambda_n}P_N^J=2\left(Y_N^{J+1}-T_q^{J+1}\right),$$

Придем к соотношению

$$2\left(\Delta W_N^J,W_N^{J+1}-\omega_q^{J+1}\ \right)+2\left(\Delta Y_N^{J+1},Y_N^{J+1}-T_q^{J+1}\right)=\left(\frac{k\mu\alpha}{\lambda_n}\Delta\lambda\left(Y_N^{n+1}-T_b^{J+1}\right),P_N^J\right)-\left(\Delta\lambda Y_{i,\bar{z}}^{J+1},X_{i,\bar{z}}^J\right).$$

В ходе проведенных преобразований получили задачу

$$P_{i,\bar{t}}^{J+1}+\left(kP_{iz}^J\right)_{\bar{z}}=0, \tag{20}$$

$$P_i^m=0,\quad P_0^J=0,\quad kP_{N,\bar{z}}^J=2\left(W_N^{J+1}-\omega_q^{J+1}\right), \tag{21}$$

$$\gamma_0 CX_{i,\bar{t}}^{J+1}+\left(\lambda_n X_{i,z}^J\right)_{\bar{z}}+\left(k\mu P_{iz}^J\right)_{\bar{z}}=0, \tag{22}$$

$$X_i^m=0,\quad X_0^J=0, \tag{23}$$

$$\lambda_n X_{N,\bar{z}}^J+\alpha X_N^J+k\mu P_{N,\bar{z}}^J+\frac{k\mu\alpha}{\lambda_n}P_N^J=2\left(Y_N^{J+1}-T_q^{J+1}\right). \tag{24}$$

Список использованных источников

1. А.М. Глобус «Физика неизотермического внутрипочвенного влагообмена», 1983

2. Б. Рысбайулы, А.Т. Байманкулов, Г.И. Маханбетова «Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде», 2008

3. Б. Рысбайулы, А.Т. Байманкулов, А.О. Исмайлов «Разностный метод определение коэффициента теплопроводности грунта в процессе промерзаний», 2008