УДК 517.956

ОРНЫҚТЫЛЫҚТЫ ЛЯПУНОВ ФУНКЦИЯСЫ БОЙЫНША ЗЕРТТЕУ

Кеңес А.Т.
А.Байтурсынов атындағы Қостанай мемлекеттік университеті 6М060100-Математика мамандығының 2 курс магистранты, Қостанай қ.

Ғылыми жетекші: Ысмагул Р.С.
Физика-математика ғылымдарының кандидаты, А.Байтурсынов атындағы Қостанай мемлекеттік университеті математика кафедрасының доценті, Қостанай қ.

Аннотация

Функции Ляпунова позволяют решать проблемы "большой" устойчивости, т. е. позволяют оценить исходную зону возбуждения, которая со временем не выходит за пределы заданной области. Эта статья состоит из исследования вопроса о применении функций Ляпунова к исследованию продолжения решения дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: функция, устойчивость, асимптота, дифференциальная система, производная, функция Ляпунова.

Аннотация

Ляпуновтың функциялары "үлкен" орнықтылық мәселелерін шешуге мүмкіндік береді, яғни уақыт өте келе берілген облыстан тыс шықпайтын бастапқы қозу аймағын бағалауға мүмкіндік береді. Бұл мақала Ляпунов функцияларын дифференциалдық теңдеулерді шешудің жалғасуын зерттеуге қолдану туралы мәселені зерттеуден тұрады.

Түйін сөздер: функция, орнықтылық, асимптота, дифференциалдық жүйе, туынды, Ляпунов функциясы.

Annotation

Lyapunov functions allow us to solve problems of "large" stability, i.e. they allow us to estimate the initial excitation zone, which does not go beyond the specified area over time. This article consists of an investigation of the application of Lyapunov functions to the study of the continuation of the solution of differential equations.

Key words: function, stability, asymptote, differential system, derivative, Lyapunov function.

Ляпунов функциясының көмегімен периодтық шешімдердің болуы немесе болмауы мәселесі шешіледі, жай дифференциалдық теңдеулердің берілген сызықсыз жүйесінің барлық шешімдерінің шектеулілігі мен шектеусіздігі белгіленеді.

Орнықтылықты Ляпунов функциясы арқылы зерттеу. (1) жүйе бойынша $v(t,x)$ туынды функциясы

$$\frac{dv}{dt}=f(t,x)\qquad \left(x\in R^n,\ f\in R^n\right), \tag{1}$$

функция деп аталады

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x_1}\cdot f_1+\ldots+\frac{\partial v}{\partial x_n}\cdot f_n, \tag{2}$$

мұндағы v және $f_1,\ldots,f_n$, $t,\ x_1,\ldots,x_n$ тәуелді. (2) формула күрделі функциясының туындысын табуға мүмкіндік береді

$v(t, x(t)) \equiv v(t, x_1(t), ..., x_n(t)),$

мұндағы $x(t)$- жүйенің шешімін білмей тұрып, (1) жүйенің кез келген шешімі деп қарастырамыз. Күрделі функцияның туындысы туралы теорема бойынша

$$\frac{d}{dt} v(t, x_1(t), ..., x_n(t)) = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + ... + \frac{\partial v}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}. \tag{3}$$

$x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$- (1) жүйе шешімі болса, онда $dx_i / dt = f_i(t, x_1, ..., x_n)$ және (3) қосындысы (2) тең.

Теорема 1 (Ляпуновтың орнықтылық туралы теоремасы). $x(t) \equiv 0$- (1) жүйенің шешімі болса, $v(0) = 0,\ v(x) > 0 \quad x \neq 0,\ dv/dt|_1 \leq 0$ шартын қанағаттандыратын, $|x| \leq \rho \ (\rho > 0)$ кезінде $v(x) \in C^1$ функциясы табылады. Онда $x(t) \equiv 0$ нөлдік шешімі орнықты.

Теорема 2. (Ляпуновтың асимптотикалық орнықтылық теоремасы). 1 теоремадағы соңғы теңсіздікті ауыстырғанда $dv/dt|_1 \leq -w(x) < 0,\ 0 < |x| \leq \rho$ барлық шарт орындалсын; $w(x)$ функциясы $|x| \leq \rho$ кезінде үзліссіз. Онда нөлдік шешімі асимптоталық орнықты болады.

А.М.Ляпунов – кейбір шектеулерді қоса алғанда $v(t, x)$ функциясымен $v(x)$ функциясын қанағаттандыратын көптеген ортақ теоремаларды дәлелдеді.

Орнықтылықты дәлелдеу үшін қолданыатын $v(x)$ немесе $v(t, x)$ функциясы *Ляпунов функциясы* деп аталады. Нақты дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін оларды таңдау оңай емес. Күрделі емес теңдеулер жүйесі үшін тепе-теңдік жағдайынан х нүктесінің қашықтығының квадратына тең $v(x)$ функциясын алуға болады. Ляпунов функциясын таңдаудың неғұрлым күрделі тәсілдері әдетте дифференциалдық теңдеулер курсының бағдарламасына енгізілмейді.

Мысал 2. Теңдеудің нөлдік шешімдері орнықты ма?

$x' = \sin x - x$

Шешуі: $\mathrm{v} = \mathrm{x}^2$ аламыз. Онда

$$\frac{dv}{dt} = 2xx' = 2x(\sin x - x) < 0 \quad (x \neq 0).$$

2 теорема бойынша шешімі асимптоталық орнықты.

Мысал 3. Жүйенің нөлдік шешімінің орнықтылығын зерттеңіз.

$$x' = y - x, \quad y' = -x^3 \qquad (4)$$

Шешуі: Жүйенің сызықтық бөлігі мына матрицаға береді

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1$, $v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ меншікті векторлары $y - x = 0$ және $y = 0$ түзулерінде жатады. $\mathrm{v} = (\mathrm{y} - \mathrm{x})^2 + y^2$ аламыз. Онда

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(4)} = 2(y - x)(y' - x') + 2yy' = 2(y - x)(x - y - x^3) - 2yx^3.$$

Бұл y -ке қатысты 2-ші дәрежелі көпмүше. Таңбасын анықтау үшін, толық квадратқа жіктейміз

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(4)} = -2\left(y - x + x^3\right)^2 - 2x^4\left(1 - x^2\right).$$

$(0,0)$ нүктесінен басқасы, $|x| < 1$ облысында нөлден кіші. 2 теорема бойынша нөлдік шешімі асимптоталық орнықты.

$dx/dt = f(x)(x \in R^n)$ түріндегі жүйе үшін 2 теоремамен қоса келесі теореманы қолданған ыңғайлы.

Мысал 4. $x'' + ax' + x^3 = 0$ теңдеуі келесі жүйеге сәйкестігін, жүйенің нөлдік шешімдерін орнықтылыққа зерттеңіз.

$$x' = y, \qquad y' = -x^3 - ay. \qquad (5)$$

Шешуі: (5) жүйеде $a = 0$ тең болса, $dy/dx = -x^3/y, \quad 2y^2 + x^4 = c$ болады.

$v = 2y^2 + x^4$ десек, онда $dv/dt|_{(5)} \equiv 0$ аламыз. 1 теорема бойынша нөлдік шешімдері орнықты. Асимптоталық орнықтылығы жоқ, себебі кез келген $x(t)$, $y(t)$ нөлдік шешімі үшін $2y^2(t) + x^4(t) = const \to 0, \ t \to \infty$.

$a > 0$ жағдайында, $v = 2y^2 + x^4$ аламыз. Онда

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(5)} = -4ay^2 \le 0.$$

Теңдік тек $y = 0$ түзуіне дейін ғана жетеді. Бұл түзуден $y' = -x^3 \ne 0, x \ne 0$. $y = 0$ түзіндегі нүкте арқылы өтетін барлық шешімдері, нөлдік шешімнен басқасы теңдеумен сәйкес келеді.

Оң анықталған функциялар

Анықтамасы. $V(\bar{y}): R^n \to R$ функциясы келесі екі шарт орындалса, $\Omega(\bar{\theta} \in \Omega)$ жиынында оң деп аталады:

1. $V(\bar{y}) \ge 0, \forall(\bar{y}) \in \Omega;$
2. $V(\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{y} = \bar{\theta}$

Бұдан әрі анықтау үшін, Ω көпмүшесі радиусы R > 0 центрі координаттар басында орналасқан шар болып табылады:

$$\Omega = \left\{\bar{y} \in R^n : \left\|\bar{y}\right\| \le R\right\}.$$

Лемма. $V(\bar{y})$ – орнықты және оң Ω функциясы болсын. Сонда:

1. кез келген $\varepsilon_1 > 0$ және $\varepsilon_2 > 0$ үшін сәйкес келетін, $\bar{y} \in \Omega, \left\|\bar{y}\right\| \ge \varepsilon_1$ шартынан, $V(\bar{y}) \ge \varepsilon_2$ теңсіздігі пайда болады;

2. кез келген $\varepsilon_2 > 0$ және $\varepsilon_3 > 0$ үшін сәйкес келетін, $\bar{y} \in \Omega$, $V(\bar{y}) \ge \varepsilon_2$ шартынан $\left\|\bar{y}\right\| \ge \varepsilon_3$ теңсіздігі пайда болады.

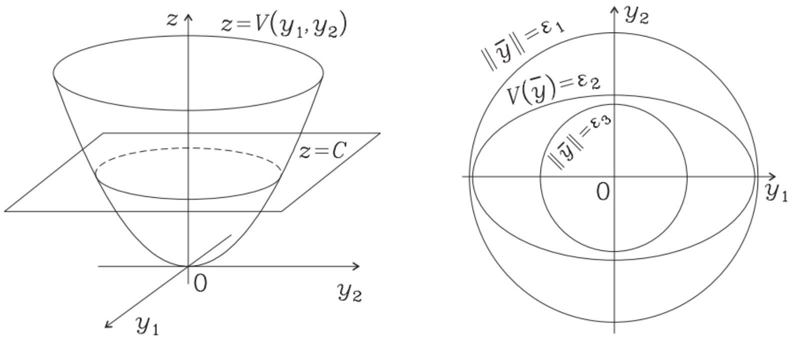
Дәлелдеу. Қарсы жору әдісін қолданамыз.

1. Тұжырымдардың біріншісі дұрыс емес деп қарастыратын болсақ. $\varepsilon_1 > 0$ бар болсын, кез келген $\varepsilon_2 > 0$ үшін $\bar{y}$ нүктесі бар болады, мұндағы $\varepsilon_1 \le \left\|\bar{y}\right\| \le R$ және $V(\bar{y}) < \varepsilon_2$. ε_2 еркіндігіне байланысты $0 < \varepsilon_{2k} \to 0$ тізбегін алуға болады, $\varepsilon_1 \le \left\|\bar{y}_k\right\| \le R, V(\bar{y}_k) \to 0$ үшін $\bar{y}_k$ нүктесінің тізбегі табылады. $\bar{y}_k$ тізбегі тұйық

шектеулі жиынға жататындықтан, $\varepsilon_1 \le \left\| \bar{y}_k \right\| \le R, V\left(\bar{y}_k\right) \to 0$ оның кейбір тізбекшелері ұқсас болады. $V\left(\bar{y}_{km}\right) \to V(\tilde{y}) = 0$ үзіліссіздігінен, $\tilde{y} = \bar{\theta}$ оң шешімін аламыз. Кері жору.

2. Тұжырымдардың екіншісі дұрыс емес деп қарастыратын болсақ. Жоғарыда келтірілген пайымдауларға ұқсас $\varepsilon_2 > 0$ бар, $0 < \varepsilon_{3k} \to 0$ тізбегі үшін $\bar{y}_k$ нүтесі табылады, $\left\| \bar{y}_k \right\| \le \varepsilon_{3k}, V\left(\bar{y}_k\right) \ge \varepsilon_2$. $V\left(\bar{y}_k\right) \to V(0) = 0$ үздіксіздігінен, бұл алдыңғы теңсіздікке қайшы келеді.

Лемманың геометриялық мағынасы мынада, $V\left(\bar{y}\right) = \varepsilon_2$ функциясы деңгейінің беті шар қабатында орналасқан, сфреаның ішкі жағынан $\left\| \bar{y} \right\| = \varepsilon_3$ және сыртынан $\left\| \bar{y} \right\| = \varepsilon_1$ шектелген (1 сурет).



Сурет 1. Оң анықталған $V\left(\bar{y}\right), \bar{y} = (y_1, y_2)$ *функциясының қасиеттерінің иллюстрациясы.*

Салдар. $\bar{y}_k \in \Omega$ нүктесінің реттілігі $k \to +\infty$ $\bar{y}_k \to \bar{\theta}$ кезінде болса, онда $V\left(\bar{y}_k\right) \to 0$ болады. Егер $t \ge 0$ болса, онда $\bar{y}(t) \in \Omega$ вектор-функциясы $t \to +\infty$ $\bar{y}(t) \to \bar{\theta}$ кезінде тек сонда ғана, $V\left(\bar{y}(t)\right) \to 0$ болады.

Тұжырымдарда дәлелденгендей, орнықты оң анықталған функция $\bar{y} \in R^n$ нүктесінің координаттар басына жақындау үшін пайдаланылуы мүмкін. $V\left(\bar{y}\right) = \left\| \bar{y} \right\|$ нормасы $\bar{y}$ векторының үздіксіз оң анықталған функциясы болып табылатыны белгілі.

Қалыпты емес оң анықталған функцияларға мысалдарын келтірейік.

Мысалы. $V(y_1, y_2) = \sqrt{\dfrac{y_1^2}{a^2} + \dfrac{y_2^2}{b^2}}$ функциясы оң анықталған болып табылады, бірақ норма үшін үшбұрыштың теңсіздігін қанағаттандырмайды. Функцияның сызықтары a, b пропорциональды эллипстің жарты осі болып табылады.

Орнықтылық теориясы екі бағытта дамыды: біріншіден, есептер шеңберін кеңейту және екіншіден, зерттеудің жаңа әдістерін жасау және белгілі әдістерін күшейту. Ляпунов функциясының әдісі (Ляпуновтың екінші немесе тура әдісі ретінде белгілі) орнықтылықты зерттеудің ең тиімді әдістерінің бірі болып табылады. Оның мәні зерттелетін жүйенің орнықтылығы немесе орнықсыздығы фактісін анықтаудан ғана тұрмайды.

Нақты жүйе үшін Ляпуновтың сәтті құрылған функциясы тұтас кешенді есептерді шешуге мүмкіндік береді, мысалы, реттелетін шаманың өзгеруін бағалауды, уақытты реттеу, реттеу сапасын бағалауды, тартылу саласын бағалауды (уақыт өте жоғалып бара жатқан барлық бастапқы ауытқуларды), тұрақты әрекет ететін ауытқулардың әсерін бағалауды және т.б.

Әдебиеттер тізімі:

1. Сулейменов, Ж. Дифференциалдық теңдеулердің орнықтылық теориясы.- Алматы: Білім, 1985.-135б.
2. Самойленко, А.М., Кривошея, С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи.- М.:Высшая школа, 2009.-384с.
3. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости: учеб. для вузов. - М.: Наука, 2007.-472с.
4. Краснов, М.Л. и др. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости учеб. для вузов. - М.:Наука, 2001.-256 с.

КВАНТТЫҚ МЕХАНИКА ЕСЕПТЕРІН ШЕШУ ҮШІН MAPLE ПАКЕТІН ПАЙДАЛАУ ӘДІСІ

Кеңес Д.Ғ.
Ө. Сұлтанғазин атындағы Қостанай мемлекеттік педагогикалық университеті, Қостанай қаласы

Ғылыми жетекшісі: Касымова А.Г.
Ө. Сұлтанғазин атындағы Қостанай мемлекеттік педагогикалық университеті, Қостанай қаласы

Аннотация

Бұл ғылыми статьяда табиғаттың фундаменталды бейнеленуі, кванттық-механикалық құбылыс болып саналатынына көз жеткіземіз. Осы орайда кванттық механика макроскопиялық физиканың түсініктері мен заңдары микроәлеммен сәйкес келмейтінін дәлелдеп берді. Өз кезегінде микроәлемді зерттеу қиынға соғады. Ал, компьютерлік модельдеу микроәлемді нақты сипаттап, қиын теңдеулердің аналитикалық немесе жуық мәнін есептейді. Осындай виртуалды бағдарламалардың бірі Maple пакетін пайдаланамыз.

Түйін сөздер: кванттық механика, модельдеу, Maple пакеті, Шредингер теңдеуі, ЭЕМ, математикалық модельдеу.

Аннотация

В этой научной статье мы убедимся, что фундаментальное изображение природы является квантово-механическим явлением. В этой связи квантовая механика доказала, что понятия и законы макроскопической физики не совпадают с микромиром. В свою очередь, исследование микрочастиц затрудняет. А компьютерное моделирование четко охарактеризовало микроклимат и рассчитывает аналитическое или приближенное значение сложных уравнений. Одним из таких виртуальных программ мы используем пакет Maple.

Ключевые слова: квантовая механика, моделирование, пакет Maple, уравнение Шредингера, ЭВМ, математическое моделирование.

Annotation

In this scientific paper, we will make sure that the fundamental image of nature is a quantum mechanical phenomenon. In this regard, quantum mechanics has proved that the concepts and laws of macroscopic physics do not coincide with the microcosm. In turn, the