Қорытындылай келе, жоғарыда тұжырымдалған проблеманы шешу үшін біз жоспарлы құралдарды әзірлеу жолымен жүруді ұсындым, оның құрылымы негізінде жалпы физика курсының аса күрделі міндеттерін шешу әдістері жатыр.Оқушыларды физика пәнінен олимпиадаға дайындауда жіберетін қателіктеріміз біздің көп нәрсеге дұрыс көзқараста болмауымызда болды. Сондықтан біздің жеткен жетістігімізден гөрі сәтсіздігіміздің көбірек болатындығына көз жеткіздім.Қазіргі кезде «Келешекке кемел біліммен» деп алғашқы президентіміз Н.Ә.Назарбаев ұстаным еткендей, келешекке кемел біліммен қадам баса отырып, әлемдік білім кеңістігінің құпияларына үңіліп, қоғамға бейім, өз қабілетін таныта алатын, жан-жақты дамыған, бірнеше тілді меңгерген, құзіретті тұлғаны қалыптастыру басты мақсаттарымыздың бірі деп есептеймін.

Әдебиеттер тізімі:

1. М.В Семенов, , А.А.Якута. Методические рекомендации по подготовке учащихся к участию в олимпиадах высокого уровня по физике // М.Фф МГУ. – 2007. - 15б.
2. Воронов А.А. Замятнин М.Ю. Слободянин В.П. Методические рекомендации по разработке требований к проведению муниципальногоэтапов олимпиады школьников в 2019-2020 учебном году по физике М.: - 2019
3. Варламов С. Д., Зильберман А. Р., Зинковский В. И.Экспериментальныезадачина уроках физикии физических олимпиадах // МИзд. МЦНМО. - 2009. – 176б.
4. А.АЯкута. II Международная олимпиада: по экспериментальной физике// М. Изд. МЦНМО. - 2016. – 55б.

ПОСТРОЕНИЕ ПРИМЕРОВ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИКАЛА ДЖЕКОБСОНА

Алиферец Н.А.
Костанайский Государственный Педагогический Университет
им. У. Султангазина, г. Костанай

Научный руководитель: Демисенов Б.Н.
Костанайский Государственный Педагогический Университет
им. У. Султангазина, г. Костанай

Аннотация: в статье рассматриваются примеры с подробным решениемна тему радикал Джекобсона. Описан алгоритм нахождения радикала конкретных колец.Показано доказательство, касающееся кольца, содержащего идемпотентные элементы. В конце работы приведен пример ассоциативной алгебры, в которой радикал Джекобсона не равен пересечению максимальных идеалов.

Ключевые слова: радикал Джекобсона, кольцо, обратный элемент, идеал, двусторонний идеал, максимальный идеал.

Annotation: the article discusses examples with a detailed solution on the topic of the Jacobson radical. An algorithm for finding the radical of specific rings is described. A proof concerning a ring containing idempotent elements is shown. At the end of the paper, we present an example of an associative algebra in which the Jacobson radical is not equal to the intersection of maximal ideals.

Key words: the Jacobson radical, ring, inverse element, ideal, two-sided ideal, maximal ideal.

Аннотация:мақалада радикал Джекобсон туралытолықшешімі бар мысалдарқарастырылады. Радиалдынақтысақиналарды табу алгоритмісипатталған. Идемпотенттіэлементтері бар сақинағақатыстыдәлелкөрсетілген. Жұмыссоңында Джекобсон радикалы еңжоғарыидеалдардыңқиылысынатеңемесассоциативті алгебра үлгісікелтірілген.

Түйінсөздер:радикал Джекобсон, сақина, кері элемент, идеал, екі жақты идеал, ең үлкен идеал.

Радикалы играют большую роль при изучении произвольных колец. Если радикал кольца равен (0), то данное кольцо можно довольно конкретно представить через кольца специального вида, которые легче изучаются. Если же радикал не равен (0), он будет являться идеалом кольца. При факторизации по нему мы получим нулевой радикал. То есть для упрощения изучения произвольного кольца мы можем отсечь от него радикал, который сам будет не слишком большой, чтобы его тоже можно было изучить.

Для построения примеров нам понадобятся следующие определения.

Определение 1. Аддитивная абелева группа M называется *правым модулем* над ассоциативным кольцом R*(*R *−модулем)*, если определено отображение

$$M \times R \to M,$$

переводящее каждую пару (m, r) из $M \times R$ в элемент $m \cdot r \in M$, такое, что для любых элементов $m, n \in M$ и $a, b \in R$ выполняются следующие условия:

1. $m(a + b) = ma + mb$;
2. $(m + n)a = ma + na$;
3. $m(ab) = (ma)b$.

Определение 2. ПравыйR −модульMназывается *неприводимым,* если $MR \neq 0$ и M имеет только два подмодуля (0) и M.

Определение 3. *Радикалом Джекобсона* $J(R)$ ассоциативного кольца R называется множество, содержащее элементы из R, аннулирующее все неприводимые R −модули, если они существуют, или само кольцо R, если неприводимых R −модулей нет.

В коммутативном случае радикал Джекобсона определяется следующим образом.

Определение 4. *Радикалом Джекобсона* $J(R)$кольца R называется пересечение всех его максимальных идеалов.

В свою очередь, *максимальным идеалом кольца* называется всякий собственный идеал данного кольца, который не содержится ни в каком другом собственном идеале.

Рассмотрим пример на нахождение обратного элемента в кольце многочленов над кольцом целых чиселпрофакторизованных по модулю 4.

Пример 1. Пусть $a = \bar{3} + \bar{2}x + \bar{2}x + \bar{2}x^2 \in \mathbb{Z}_4[x]$. Найдите обратный элемент a^{-1}.

Упростим данное выражение $\bar{2}x + \bar{2}x = \bar{4}x \cong \bar{0} \cdot x$, получим $a = \bar{3} + \bar{2}x^2$.

Обратный элемент имеет общий вид $a^{-1} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 x^2$. По определению произведение всякого элемента на его обратный дает единицу, то есть

$$(\bar{3} + \bar{2}x^2)(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 x^2) = \bar{1}.$$

Раскрыв скобки в левой части равенства, получим

$$\bar{3}\bar{a}_0 + \bar{3}\bar{a}_1 x + \bar{3}\bar{a}_2 x^2 + \bar{2}\bar{a}_0 x^2 + \bar{2}\bar{a}_1 x^3 + \bar{2}\bar{a}_2 x^4 = \bar{1} + \bar{0} \cdot x + \bar{0} \cdot x^2 + \bar{0} \cdot x^3 + \bar{0} \cdot x^4.$$

Отсюда найдем каждый коэффициент обратного элемента.

$$\begin{gathered} \bar{3}\bar{a}_0 = \bar{1} \\ \bar{3}\bar{a}_1 = \bar{0} \\ \bar{3}\bar{a}_2 + \bar{2}\bar{a}_0 = \bar{0} \\ \bar{2}\bar{a}_1 = \bar{0} \\ \bar{2}\bar{a}_2 = \bar{0} \end{gathered}$$

В данном случае сразу можно определить $\bar{a}_0 = \bar{3}$, так как в кольце $\mathbb{Z}_4$ класс $\bar{3}$ является сам себе обратным. Из системы

$$\begin{cases} \bar{3}\bar{a}_1 = \bar{0} \\ \bar{2}\bar{a}_1 = \bar{0} \end{cases}$$

получаем, что $\bar{a}_1 = \bar{0}$. При определении последнего коэффициента требуется произвести небольшое вычисление:

$$\begin{gathered} \bar{3}\bar{a}_2 + \bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0} \\ \bar{3}\bar{a}_2 = \bar{2} \\ \bar{a}_2 = \bar{2}. \end{gathered}$$

Таким образом, получили следующий обратный элемент $a^{-1} = \bar{3} + \bar{2}x^2$, то есть исходный элемент является сам себе обратным в кольце $\mathbb{Z}_4[x]$.

Следующая проверка показывает, что найденный элемент действительно является обратным

$$a \cdot a^{-1} = (\bar{3} + \bar{2}x^2)(\bar{3} + \bar{2}x^2) = \bar{9} + \bar{6}x^2 + \bar{6}x^2 + \bar{4}x^4 = 1.$$

Исходя из показанного примера можно составить алгоритм нахождения обратного элемента:

1. При необходимости упростить данный элемент a;
2. Записать искомый обратный элемент a^{-1} в общем виде;
3. Приравнять произведение aи a^{-1}к единице;
4. Найти обратный элемент и выполнить проверку.

Следующие примеры позволят понять определение радикала Джекобсона.

Пример 2. Вычислите $J(R)$ следующих колец: 1) $R = \mathbb{Z}_8$; 2) $R = \mathbb{Z}_{60}$.

1. $R = \mathbb{Z}_8$.

По определению, в коммутативном кольце радикал Джекобсона равен пересечению всех максимальных идеалов этого кольца. Значит, необходимо найти идеалы данного кольца и выделить среди них максимальные.

В результате проверки легко выявить, что в кольце $\mathbb{Z}_8$ есть два собственных идеала: $I_2 = (2) = \{0, 2, 4, 6\}$ и $I_4 = (4) = \{0, 4\}$. Для любых элементов $a, b \in I_2$ и $c \in \mathbb{Z}_8$ будет выполняться

$$a + b \in I_2, \qquad a \cdot c \in I_2.$$

Для идеала I_4 условия проверяются аналогично. Стоит заметить, что $I_4 \subset I_2$ и идеал I_2 является максимальным. Отсюда, $J(\mathbb{Z}_8) = (2)$.

2. $R = \mathbb{Z}_{60}$.

В результате проверки условий существования идеала выявлено, что данное кольцо содержит десять собственных идеалов:

$$I_2 = (2) = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots, 58\}$$
$$I_3 = (3) = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots, 57\}$$
$$I_4 = (4) = \{0, 4, 8, 12, 16, \dots, 56\}$$
$$I_5 = (5) = \{0, 5, 10, 15, 20, \dots, 55\}$$
$$I_6 = (6) = \{0, 6, 12, 18, 24, \dots, 54\}$$
$$I_{10} = (10) = \{0, 10, 20, 30, 40, 50\}$$
$$I_{12} = (12) = \{0, 12, 24, 36, 48\}$$
$$I_{15} = (15) = \{0, 15, 30, 45\}$$
$$I_{20} = (20) = \{0, 20, 40\}$$
$$I_{30} = (30) = \{0, 30\}.$$

При этом, в идеале I_2 содержатся $I_4, I_6, I_{10}, I_{12}, I_{20}, I_{30}$;
В $I_3 - I_6, I_{12}, I_{15}, I_{30}$;
В $I_4 - I_{12}, I_{20}$;
В $I_5 - I_{10}, I_{15}, I_{20}, I_{30}$;
В $I_6 - I_{12}, I_{30}$;
В $I_{10} - I_{20}$;
В $I_{15} - I_{30}$.

Тем самым, можно выделить идеалы, которые не содержатся в каких-либо других идеалах. Таковыми являются I_2, I_3 и I_5, по определению они являются максимальными. Отсюда найдем $J(\mathbb{Z}_{60}) = \bigcap I_{max} = I_{30}$.

Предыдущие примеры позволяют обобщить нахождение радикала Джекобсона кольца $\mathbb{Z}_n$, где $n > 1$ в коммутативном случае.

Лемма. Радикал Джекобсона кольца $\mathbb{Z}_n$, где $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, $p_i (i = \overline{1, m})$– различные простые числа, равен

$$J(\mathbb{Z}_n) = (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m).$$

Доказательство. Так как данное кольцо коммутативно, то, по определению,необходимо найти пересечение всех максимальных идеалов.В кольце $\mathbb{Z}_n$ существуют собственные идеалы вида $I = \left(p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}\right)$, $s = \overline{1, m}$, $p_i (i = \overline{1, s})$ входят в разложение числа n. При этом, идеалы $I_{p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}} \subset I_{p_i}$, где $i = \overline{1, s}$. Таким образом,максимальными для исходного кольца являются идеалы следующего вида$I_{p_i} = (p_i)$, $i = \overline{1, m}$, порождаемые простыми числами. Следовательно, в кольце $\mathbb{Z}_n$ содержится m максимальных идеалов

$$I_1 = (p_1);\ I_2 = (p_2); \dots\ I_m = (p_m).$$

Так как пересечением двух и более простых чисел является их произведение, получаем

$$J(\mathbb{Z}_n) = (p_1) \cap (p_2) \dots (p_m) = (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m).$$

Предложение. ПустьR – произвольное кольцо,$e \in R$ и $e^2 = e$. Тогда$J(eRe) = eJ(R)e$.

Доказательство. Возьмем элемент $0 \neq e^2 = e \in R$ такой, что $ere \in J(eRe)$при $r \in J(R)$и $exe \in eRe$, где $x \in R$. Из того, что $ere \in J(R)$ для некоторого элемента $y \in R$ следует $(1 - ere \cdot exe)y = 1$. Отсюда $(e - ere \cdot exe)(eye) = e$. Заметим, что $eJ(R)e$ является идеалом в eRe и $ere \in J(eRe)$. Следовательно, $eJ(R)e \subseteq J(eRe)$.

Докажем обратное включение. Пусть $eae \in J(eRe)$, $a \in J(R)$, $t \in R$ и $z = eaet(1 - e)$. Отметим, что $z^2 = 1$. Тогда можем записать равенство $(1 - z)(1 + z) = 1$. Так как $eae \in J(eRe)$, то $(e - eae \cdot ete)(eue) = e$ для некоторого элемента $eue \in eRe$. Для упрощения записи введем обозначение $v = eue + 1 - e$. Отсюда,

$$\begin{gathered}(1 - eaet)v = (1 - eaet)(eue + 1 - e) = \\ = (e - eae \cdot ete)eue + 1 - e - eaet(1 - e) = \\ = 1 - eaet(1 - e) = 1 - z, \\ (1 - eaet)v(1 + z) = 1.\end{gathered}$$

Поэтому элемент $1 - eaet$ обратим справа. Заметим, что он также обратим и слева. При этом, $eae \in eJ(R)e$. Следовательно, $J(eRe) \subseteq eJ(R)e$. Объединив два полученных выражения получим, что $J(eRe) = eJ(R)e$.

Построение примера на вычисление радикала Джекобсона в некоммутативном случае.

Рассмотрим ассоциативную алгебру с единицей, в которой радикал Джекобсона не является пересечением максимальных двусторонних идеалов.

Пусть F – поле характеристики нуль и $\sigma : F \to F$ – автоморфизм бесконечного порядка. Для ясности возьмем $F = \mathbb{Q}(x)$и

$$\sigma\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f(x+1)}{g(x+1)}.$$

Рассмотрим множество косых многочленов

$$R = F[x,\sigma] = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,\middle|\, (ax^m)(bx^m) = a\sigma^n(b)x^{n+m}, \qquad a, b \in F\right\}$$

над полем F. Докажем, что каждый ненулевой идеал I в R имеет вид Rx^n, где $n \geq 0$. Возьмем ненулевой многочлен минимальной степени в I

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \qquad a_n \neq 0.$$

Если $n = 0$, то I содержит $1 = a_0^{-1} a_0$ и I совпадает с R. Пусть $n \geq 1$. Тогда для всякого элемента $b \in F$ многочлен $f(x)b - \sigma^n(b)f(x) \in I$ равен нулю, так как имеет меньшую степень. Например, $a_i\left(\sigma^i(b)-\sigma^n(b)\right)=0$ для $i\leq n-1$. Если бы существовал индекс $i_0<n$ такой, что $a_{i0}\neq 0$, то $\sigma^{n-i0}(b)=b$ для всякого элемента $b\in F$ и σ являлся автоморфизмом конечного порядка. Получаем противоречие. Поэтому $a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0$ и $Rx^n\subseteq I$. Если существует многочлен

$$g(x)=c_ix^i+c_{i+1}x^{i+1}+\cdots+c_mx^m\in I,$$

у которого $c_i\neq 0\in F$ и $i\leq n-1$, то $g(x)x^{n-1-i}=c_ix^{n-1}+x^n\cdot\varphi(x)$ содержится в идеале I и $x^{n-1}\in I$. Противоречие.

Из предшествующего доказательства ясно, что все идеалы алгебры R описываются идеалами вида $\{(0),R,Rx,Rx^2,\dots\}$. Из них Rx является единственным максимальным двусторонним идеалом. Докажем, что $J(R)=0$. Если это не выполняется, то $J(R)=Rx^n$ и элемент $(1+x^n)$ будет обратим в алгебре R . Из противоречия следует, что R – полупростая алгебра, которая содержит единственный максимальный двусторонний идеал Rx . Пусть $a\neq 0\in F$. Отсюда правый идеал $(x-a)R$ будет максимальным модулярным правым идеалом, не содержащим ни одного ненулевого двустороннего идеала. Тогда можно сделать вывод, что R является примитивной алгеброй, идеалы которой образуют цепь $R\supset\ Rx\supset Rx^2\supset\cdots$.

Список литературы:

Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру – М.: Мир, 1972. с. 15

Мальцев Ю.Н., Журавлев Е.В. Лекции по теории ассоциативных колец – Барнаул: АлтГПА, 2014. с. 11-136

Мальцев Ю. Н. Задачи и теоремы теории ассоциативных колец – Барнаул: АлтГПА, 2014. с. 181-197

Туганбаев А.А. Теория колец. Арифметические модули и кольца – М.: МЦНМО, 2009. с. 62-69

Херстейн И. Некоммутативные кольца – М.: Мир, 1972. с. 9-15

УДК 51

11 СЫНЫПТА ИНТЕГРАЛ ТАҚЫРЫБЫН ОҚЫТУДА НЬЮТОН-ЛЕЙБНИЦ ФОРМУЛАСЫН ҚОЛДАНУ ӘДІСТЕМЕСІ

Альденова М.С.
Ө.Сұлтанғазин атындағы Қостанай Мемлекеттік Педагогикалық Университеті, Қостанай қ.
Ғылыми жетекші:Доспулова Ұ.К.
Ө.Сұлтанғазин атындағы Қостанай Мемлекеттік Педагогикалық Университеті, Қостанай қ.

Аннотация:В этой статье рассмотрена тема интеграла. Метод вычисление площади фигуры с помощью интеграла. Особое внимание уделяется формуле Ньютона-Лейбница.Методика использования формулы Ньютон-Лейбница при вычислении объема тела для учащихся 11 классов, составлен разработанный урок.

Ключевые слова:Интеграл.Площадь фигуры. Первообразная.Неопределенный интеграл.Площадь криволинейной трапеции.Определенныйинтеграл. ФормулаНьютона-Лейбница.