**СХОДИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЛОКАЛЬНО-ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

CONVERGENCE OF RANDOM ELEMENTS IN LOCAL AND CONVEX SPACES

**Даулетбаев Т.Е.**
*Костанайский государственный педагогический институт, г. Костанай, Казахстан*

Изучение сходимости случайных элементов в линейных топологических пространствах является весьма интересной задачей теории распределений в абстрактных пространствах и имеет многочисленные применения в [1,2].

Можно выделить так же различные виды сходимости элементов в локально-выпуклых пространствах (л.в.п.).

Пусть ($\Omega$;$f$;P) вероятностное пространство, L - л.в.п. с выделенной
$\delta$-алгеброй B(L). Порожденной открытыми множествами из L.

**Определение.** Случайным элементов$X_{(w)}$назовем отображение $X: \Omega \to L$ или L-значным случайным элементом, если оно $(F, \mathcal{B})$ –измеримо, т.е. если $\{\omega \in \Omega\}$: X($\omega$) $\in$ B$\} \in F$для любых B $\subset$ B.

Для L-значных элементов можно рассматривать различные виды сходимости аналогично как для банаховозначных случайных элементов

1. Сходимость по норме: Пусть B-банахово пространство, $\{X_n\}$ – последовательность элементов. Тогда $X_n \to X$, если $\| X_n - X \| \to 0$при, $n \to \infty$

2. Пусть $\{\mu_n\}$ – меры, порожденными элементами $X_n$. Тогда говорят, что последовательность мер $\{\mu_n\}$ слабо сходится к мере μ, если для любой непрерывной функции $f(x)$, определенной ни *X* имеет место

$$\int f(x) d\mu_n \to \int f(x) d\mu$$

Эти определения, обобщающие соответствующие определения в случае банахова пространства требуют уточнения. Дело в том, что в л.в.п. L

1) отсутствует числовая норма

2) непонятен смысл интеграла ∫ fdμ, где f – числовая функция, а μ – мера со значениями в L.

Вместе с тем, в L существует нечисловая норма.

**Теорема Сарымсакова**. Для каждого л.в.п. L существует нечисловая норма
$\|\cdot\|$ : L $\to R^{\Delta}$, где $R^{\Delta}$ множество действительных функций, определенных на некотором множестве Δ.

$R^{\Delta}$ является топологическим полуполем, изученных в работах [3.4].

Норма $\|\cdot\|$ – обладает всеми свойствами числовой нормы и обращает L в линейно-нормированное пространство над $R^{\Delta}$.

Тогда $\{x_n\}$из L сходится к элементу x ∈L или $x_n \to x$, если $\| x_n - x \| \to 0$.

Для такого пространства также можно ввести понятие фундаментальности и др.

Что же касается слабой сходимости, то необходимо ввести интеграл по L-значной мере от действительной функции.

Пусть X : Ω → L-значный случайный элемент, строим интеграл сначала для дискретного случайного элемента.

**Определение.** Элемент X назовем дискретным случайным элементом, если он принимает конечное число значений, т.е. X = ак, если ω ∈$\Omega_к$, где $\Omega_к$с$\Omega$,$\bigcup_{к=1}^{n} \Omega_k$, здесь P($\Omega_к$)∈L.

Возьмем конечную сумму $S_n$=$\sum_{k=1}^{n} a_k P(\acute{\Omega}к)$,

Пусть $\{S_n\}$сходится в L, тогда $\lim_n S_n$= SX(ω)P(d ω) и назовем интегралом от дискретного элемента X.

**Определение**. L-значный случайный элемент X назовем интегрируемым, если существует последовательность интегрируемых случайных элементов $\{x_n\}$ такая, что

X=lim $x_n$ , то $\| x_n - x \| \to \theta \in R^{\Delta}$, θ – ненулевой элемент $R^{\Delta}$.

Существование интегралов со значениями в л.в.п. и их свойства остаются предметом отдельного исследования, как для случая интегралов Вохнера в банаховых пространствах.

**Определение.** Окрестностью нуля θ в пространстве $R^{\Delta}$ называется множество V = $\{x \in R^{\Delta}$: i = 1,2,..,n;$\varepsilon_1, \varepsilon_{2,\dots,}\varepsilon_n : x_1(t)<\varepsilon_1, x_2(t)<\varepsilon_2, \dots, x_n(t)<\varepsilon_n\}$

Тогда утверждение, что $\| x_n - x \| \to \theta$ эквивалентно тому, что для окрестности V нуля θ в $R^{\Delta}$ найдется такое натуральное $n_0$: $\| x_n - x \| \in V$ при $n>n_0$.

Все основные рассуждения относительно числовой нормы в линейно-нормированном пространстве остаются справедливыми для нечисловой полупольнозначной нормы со значениями в $R^{\Delta}$.

При построении интеграла $\int_{\Omega} X(\omega)P(d\omega)$ для случайного элемента X(ω) через интегралы от последовательности дискретных элементов также существует придел конечной суммы $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k\, P(\Omega к)$, причем предел суммы принадлежит пространству L.

Что же касается слабой сходимости последовательности мер $\mu_n$, порожденных последовательностью элементов $\{x_n\}$, то также предел $\int_{x} f(x)d\mu$ равен элементу $\int_{x} f(x)d\mu$ в смысле предела, приведенного выше, то имеет место теорема.

**Теорема**. Для того, чтобы $\{ \mu_n \}$слабо сходилась к μ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

а) $\bigcup_{n=1}^{\propto} \bigcap_{k=n}^{\propto} \mu_n(G) \geq \mu(G)$ для любого открытого множества G или условие:

б) $\bigcap_{k=1}^{\propto} \bigcup_{k=n}^{\propto} \mu_n(F) \leq \mu(F)$для любого замкнутого множества F.

**Замечание 1**. Здесь предлагается, что X-метрическое пространство. Известно, что система полунорм в L порождает в нем метрику.

**Замечание 2**. Доказательство приводится аналогично как в работе [5]

Пусть $\{x_n\}$- последовательность случайных элементов в Δ.

**Определение.** Говорят, что последовательность $\{x_n\}$с вероятностью 1 к случайному элементу $x_\infty$ [1], если существует такое Aс Ω :P(A)=1 и для каждого ω ∈ A имеет место $\| x_n - x_\infty \| \to \theta$.

**Определение.** Говорят, что последовательность $\{x_n\}$сходится с вероятностью единица, если найдется L-значный случайный элемент $x_\infty$ такой, что $x_n \to x_\infty$ с вероятностью единица.

**Замечание.** Аналогично можно дать определение фундаментальности с вероятностью единица.

**Теорема.** Пусть $\{x_n\}$ последовательность L-значных случайных элементов в L. Тогда если для почти всех $\omega x_n(\omega) \to x_\infty(\omega)$, то $x_\infty$ является также L-значным случайным элементом.

Теперь дадим определение сходимости по вероятности.

**Определение.** Последовательность $\{x_n\}$ сходится по вероятности и случайному элементу $x_\infty$, если для любого ε > 0 $P(\| x_n - x_\infty \| > \varepsilon) \to 0$.

**Замечание.** Как и в классическом случае, имеются те же связи с этими видами сходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Булдыгин В.В. Сходимость случайных элементов в топологических пространствах. Киев, «Науковь думка», 1980.
2. Круглов В.М. Дополнительные главы теории вероятностей. М. «Высшая школа», 1984.
3. Сарымсаков Т.А. Полуполе и теория вероятностей III – светско-японский симпозиум. 1975
4. Сарымсаков Т.А. Полуполе. Меры со значениями в полуполях. Труды НИИМ в ГУ, вып XX, 8-87.
5. Сарымсаков Т.А., Круглов Я.Х., Даулетбаев Т.Е. Слабая сходимость булевых мер в метрических пространствах. ДАН СССР, Т.232 №5,1977, 1023-1026.
6. Сарымсаков Т.А., Миронов А.В. К понятию нормы линей оператора в локально выпуклом пространстве. ДАН СССР, Т.204 №1,2972, 38-41.