Уравнение (11) имеет решение $u(\mu)$, голоморфное относительно μ в окрестности $\mu = 0$, т.е.

$$u(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k u_k \ . \tag{12}$$

Далее, для оценки области сходимости мажорантного ряда (12) используем идею работы [2]. Составим систему

$$\begin{cases} u = \dfrac{\mu L(Q_0 + \pi R_0)}{\left(1 - \dfrac{u}{\rho_0}\right)\left(1 - \dfrac{\mu}{\overline{\mu}}\right)} \\ 1 = \dfrac{\partial}{\partial u}\left[\dfrac{\mu L(Q_0 + \pi R_0)}{\left(1 - \dfrac{u}{\rho_0}\right)\left(1 - \dfrac{\mu}{\overline{\mu}}\right)}\right] \end{cases}. \tag{13}$$

Решая систему (11) относительно u и μ находим

$$\mu_1^* = \frac{\rho_0 \overline{\mu}}{\rho_0 + 4L\overline{\mu}(Q_0 + \pi R_0)}, \ u^* = \frac{\rho_0}{2}.$$

Следовательно, радиус сходимости ряда (7) не меньше числа μ_1^*. Результат сформулируем виде теоремы.

Теорема. Если выполнены условия () и (6), то система (1) имеет многопериодическое по части переменных решение

$$x^*(t, \varphi, \psi, \mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k y_k(t, \varphi, \psi)$$

голоморфное относительно параметра μ в промежутке $0 \le \mu < \mu_1^*$. Это решение остается в области $R^{i+m+k} \times [0, \mu_1^*]$ и при $\mu \to 0$ стремится k тривиальному решению $x \equiv 0$ системы (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бержанов А.Б. "О многопериодических по части переменных решениях системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных" Известия МОН и НАН РК, серия физ.-мат., №1, 2002, с.19-23.
2. Лика Д.К., Рябова Ю.А. "Методы интеграции и мажоргерующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний" Кишинев, Штиица, 1974, 291 с.

СЧЁТНО НЕОГРАНИЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

COUNTED UNLIMITED ENSEMBLES

Демисенов Б.Н.
Костанайский государственный педагогический институт, г. Костанай, Казахстан

В работе исследуется натуральный ряд, показывается, что его природа есть переходное состояние от конечного к бесконечному, в силу чего натуральный ряд определяется как счетно неограниченное множество. Кроме того, показано, что фактор-кольцо всех сходящихся последовательностей по идеалу последовательностей сходящихся к нулю, изоморфно полю вещественных чисел.

Глава 1. Определение счетной неограниченности.

1.Определение натурального ряда. Натуральный ряд 1,2,3, … , n, … будем считать известным и состоящим из (всех) конечных натуральных чисел расположенных в порядке возрастания (стандартное упорядочение) и определенным рекуррентно: каждый следующий член ряда на единицу больше предыдущего. (Например, можно рассматривать аксиоматику натуральных чисел по Пеано [2]). Для начала, будем определять конечное и бесконечное множества также по ван дер Вардену [2]: множество называется конечным, если его элементы можно занумеровать натуральными числами от 1 до n так, чтобы различные элементы имели различные номера и чтобы все номера от 1 до n были использованы. Каждое множество, не являющееся конечным, называется бесконечным. Будем считать, что эти два состояния – конечное и бесконечное – устойчивы. Это означает, что здесь рассматривается актуальная бесконечность.

2.Столбцово-строчечная конструкция. Будем строить пошагово следующую конструкцию

1
1 2
1 … … … …
1 1 2 1 2 n-2
1 1 2 1 2 3 … … … 1 2 3 … n-1
1 1 **2** 1 2 **3** 1 2 3 **4** 1 2 3 4 … **n** и т.д.

В итоге получается конструкция:

1) 1
2) 1 2
3) 1 2 3
4) 1 2 3 4 (#)
… … … … … …
n) 1 2 3 4 … n

На каждом шаге эта конструкция совпадает со следующей:

…
1 …
1 2 …
… … … … … (##)
1 2 n-2 …
1 2 3 … n-1 …
1 2 3 4 … n …

Изменилось лишь одно из направлений движения. Здесь строка и столбец для каждого натурального n (n-я строка и n-й столбец) строятся совершенно одинаково – их роли можно менять (транспонировать), при этом ничего не изменится по соображениям симметричности. Таким образом, с каждым натуральным nпринадлежащим строке, мы связали столбец, совпадающий с начальным отрезком натурального ряда – получился ряд столбцов. Причем здесь связано все: последний элемент столбца совпадает с номером столбца, который в свою очередь совпадает с количеством элементов в столбце (конечной мощностью столбца, как множества), каждый столбецсовпадает со строкой (начальным отрезком натурального ряда) по построению. Еще раз подчеркнем, что в силу построения, транспонировав, можно рассматривать натуральный ряд как столбец, с каждым элементом которого связана строка (начальный отрезок натурального ряда). Это означает, что если существует натуральный ряд – строка, то симметрично существует (в этой же конструкции) натуральный ряд – столбец. Предположим, что последовательность натуральных чисел существует. Теперь попробуем ответить на вопрос: *каким является натуральный ряд – конечным или бесконечным.*Если натуральный ряд (строка) конечен, то выбрав в нем (как во множестве с обычным линейным порядком) наибольший элемент (наибольшее натуральное число), прибавим к нему единицу и увидим, что натуральный ряд, вопреки определению, состоит не из всех конечных натуральных чисел. Если же натуральный ряд (строка) бесконечен, то существует равный ему по построению натуральный ряд – столбец, который состоит из бесконечного числа элементов (мощность которого бесконечна), а мощность столбца и есть его номер (элемент строки), а это значит, что мы получили противоречие с тем, что натуральный ряд (строка) состоит из конечных натуральных чисел. Получается, что натуральный ряд (как множество) не может быть ни конечным, ни бесконечным. Возникает вопрос: а существует ли натуральный ряд?

3.Определение счётной неограниченности. Что делать в получившейся ситуации? Странно считать, что натурального ряда не существует, когда существует его явное построение, а, с другой стороны, если считать, что существует, то получается противоречие. Неужели математика изначально противоречива? Прежде чем ответить на этот вопрос, давайте вернемся к определению бесконечности: каждое множество, не являющееся конечным, называется бесконечным. Возникает вопрос: а когда множество перестает быть конечным и становится бесконечным? Когда наступает этот переход от конечного к бесконечному? В жизни каждого есть переходный возраст, когда подросток уже не ребенок (но сохраняет некоторые детские признаки), но еще не взрослый (но в нем уже заложены некоторые свойства взрослых). Медики не могут определить грань между жизнью и смертью, когда считать, что смерть уже наступила? С ростом возможностей медицины взгляд на эту проблему меняется. Переходное состояние между двумя определенностями является неустойчивым, неопределенным, сохраняя признаки предыдущего состояния, но отрицая их и приобретая свойства нового состояния. Здесь и закон отрицания отрицания, перехода количества в качество, борьбы и единства противоположностей. В действительности, каждый раз строя следующее натуральное число (новая конечность), отрицается конечность предыдущего (старая конечность), в совокупности начинает «отрицаться» любая конечность, и «приобретаться» черты бесконечности. Когда в натуральном ряду количество конечных чисел неограниченно растет, то в нем начинают проявляться новые качества, присущие бесконечным множествам (переход количества в (новое) качество). В этом переходном состоянии, возникает двойственность (борьба и единство противоположностей): «уже не конечно, но еще не бесконечно» или «еще конечно, но уже и бесконечно» – в этом состоит некая неопределенность (одновременно и то и другое, в то же время и ни то и ни другое). Мы доказали, что натуральный ряд не является конечным и не является бесконечным. Натуральный ряд по определению строится, «убегая» от конечного и, «не достигая» бесконечного. Это переходное состояние от конечного к бесконечному будем называть счетной неограниченностью. Счетная неограниченность не является потенциальной бесконечностью, так как вопрос о потенциальной бесконечности поднимает вопрос о существовании актуальной бесконечности (противопоставляется), в то время как счетная неограниченность утверждает (актуальную) бесконечность, будучи переходным состоянием между двумя устойчивыми состояниями: конечным и бесконечным.Прежде всего, необходимо будет рассматривать счетно неограниченные последовательности, то есть последовательности, которые можно индексировать числами натурального ряда.

Глава 2. Сходящиеся числовые последовательности и точки вещественной прямой.

1. «Идеальная» конструкция точки.

Здесь рассматриваются только числовые (состоящие из вещественных чисел) последовательности. Заметим, что состояние счетной неограниченности возникает лишь в последовательностях, так как конечной малой или конечной большой величины без сравнения с масштабом принятой единицы не существует – любую конечную величину можно принять как масштабную единицу. «Малость» величины может возникнуть лишь в сравнении с другими величинами, то есть существует лишь относительная малость. Под сходящейся последовательностью будем подразумевать только последовательности, сходящиеся к конечным числам. Мы не ставим здесь вопросы определения вещественных чисел, полноты вещественной прямой, мы хотим исследовать природу вещественных чисел, показать, что алгебраический подход поможет глубже понять проблемы, связанные с понятием числа.

Пусть имеются сходящиесяпоследовательности$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots$. Определим почленносумму и произведение сходящихся последовательностей: $a_k + b_k$и $a_k \cdot b_k$для всех натуральных k.Определим умножение последовательности на действительное число, как умножение всех его членов на это число. Заметим, что сумма, произведение и умножение на число сходящихся последовательностей, определенных таким образом, будет сходящейся последовательностью. Причем, если последовательности имели пределы соответственно a и b, то сумма последовательностей будет сходиться к числу $a+b$, произведение – к $a \cdot b$, а последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, умноженная на действительное число α – к $\alpha \cdot a$. Множество всех сходящихся последовательностей с определенными таким образом операциями, как легко видеть, образует кольцоP, в котором множество всех последовательностей, сходящихся к нулю образует идеал I. В частности, последовательность, состоящая из одних нулей, также принадлежит этому идеалу. А для каждого вещественного a во множестве последовательностей, сходящихся к a, есть последовательность $a, a, \ldots, a, \ldots$. Последовательности такого вида будем брать качестве представителей классов эквивалентности множества сходящихся последовательностей, на которое разбивается основное множество кольца сходящихся последовательностей по отношению эквивалентности «сходиться к числу a, где a принадлежит вещественной прямой». Последовательности удобно обозначать через (a_n). В частности, через (a), если $a_n = a$, при любом n, – такие последовательности будем называть предельными. Заметим, что предел последовательности у предельных последовательностей совпадает со всеми членами последовательности. Теперь операцию умножения на действительное число α, можно представлять, при необходимости,как умножение на последовательность $(\alpha)=\alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \ldots$. Операции на классах эквивалентности вводятся стандартно: $((a)+I)+((b)+I)=(a+b)+I$; $((a)+I)\cdot((b)+I)=(a\cdot b)+I$Нетрудно показатькорректность введенных таким образом операций на представителях классов эквивалентности сходящихся последовательностей, то есть независимость от выбора представителя класса эквивалентности.

Рассмотрим класс представляющий число ноль (это идеал I всех последовательностей, сходящихся к нулю). Как идеал он является подкольцом кольца P.

Теорема 1. *Если последовательность сходится к числу $a\neq 0$, то в этой последовательности может быть лишь конечное число нулевых членов.*

Доказательство. Если это не так, то в этой последовательности существует подпоследовательность, состоящая только из нулевых членов, что означает, сходимость последовательности к нулю ([1], с. 88-89, леммы 2-4). Противоречие.

В кольце P имеются делители нуля, например две последовательности из класса, представляющего нуль: $0, a_2, 0\ a_4, \ldots, 0, a_{2k}, 0, a_{k+2}, \ldots$ и $b_1, 0, b_3, 0, \ldots, b_{2k+1}, 0, b_{2k+3}, \ldots$, у одной последовательности на нечетных местах стоят нули, у другой – на четных, на остальных местах у каждой последовательности есть хотя бы один отличный от нуля член.

Рассмотрим фактор-кольцо P/I. Нейтральным классом по умножению в этом фактор-кольце является класс последовательностей, сходящихся к единице (таковой, очевидно существует). Действительно, в силу корректности определения произведения классов, возьмем в качестве представителя класса предельную последовательность (1), произведение на которую оставляет последовательности в том же классе.

Теперь два класса фактор-кольца P/Iявляются взаимно обратными, если произведение любых двух представителей, взятых по одному из каждого класса есть последовательность принадлежащая нейтральному по умножению классу. Покажем, что любой класс, не представляющий ноль, имеет обратный. Каждому классу эквивалентности $(a)+I$ будем ставить в соответствие действительное число a. Для каждого, отличного от нуля вещественного числа a, класс $(a)+I$ обратим – его обратным классом будет класс $(1/a)+I$, так как $((a)+I)\cdot((1/a)+I)=(1)+I$, где $(1)+I$ – нейтральный по умножению класс. Мы доказали, что фактор-кольцо P/Iявляется полем. Если рассмотреть отображение $P/I \to R$, где R – поле вещественных чисел, по правилу: каждому классу последовательностей ставится в соответствие предел, к которому эти последовательности стремятся, то, очевидно, получим изоморфизм. Итак, мы доказали

Теорема 3. *Поле вещественных чисел изоморфно фактор-кольцу P/I.*

Следствие. *Идеал I максимален, кольцо P локально и идеал I содержит все собственные идеалы кольца P.*

Математика – это физика, доведенная до абсурда.

То, что в физике является неделимой частицей, в математике всегда могут разделить пополам, и так поступать неограниченно, доводя понятие неделимого до абсурда, получая при этом парадоксы. В физической картине мира макромир и микромир имеют похожие конструкции: солнце и планеты вокруг него с одной стороны, ядро и электроны с другой. Теперь и в математике точка (микромир) представляет собой богатый мир сходящихся последовательностей, разнообразие которых трудно представить.

Построенная таким образом конструкция точек действительной прямой как классов эквивалентности сходящихся последовательностей, по идеалу последовательностей сходящихся к нулю, имеет далеко идущие конструктивные объяснения таких ключевых для анализа и в целом всей математики понятий, как дифференциал, производная через дифференциал, счетные и несчетные множества, объясняет непротиворечивость неевклидовых геометрий и их связь с евклидовой геометрией, нестандартный анализ ([3,4]) и многое другое. Точка в предложенной конструкции представляет собой очень сложный организм (класс), который сохраняет генезис самой вещественной прямой. Например, теперь легко объяснить, почему считается, что 0,(9) = 1. Рассмотрим две последовательности соответствующие этим числам: 0,9; 0,99; … ; 0,9…9; … и 1; 1; … ; 1 … – они имеют один и тот же предел равный 1, то есть эти две последовательности принадлежат одному и тому же классу эквивалентности. После факторизации они представляются числом 1. Но, если рассмотреть последовательность 0,8; 0,98; 0,998; … ; 0,9…98; … , то увидим, что она также принадлежит классу имеющему предел равный единице. И таких последовательностей (только в одной точке) как легко показать, несчетно (по Кантору), как и точек на прямой.

2. Аксиома Архимеда.

Аксиома Архимеда в нашей конструкции означает, что любуюсходящуюся последовательность, которая не сходится к нулю (их мы можем рассматривать как представители соответствующих классов эквивалентности сходящихся последовательностей) можно умножением на конечное натуральное число перевести в другой, больший представитель класса. Здесь классы сходящихся последовательностей естественно упорядочены в соответствии с упорядочением действительных чисел, которые они представляют при факторизации. Последовательности, представляющие класс последовательностей сходящихся к нулю, нельзя перевести соответствующим умножением в последовательности, представляющие классы сходящихся последовательностей к не нулевым числам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Москва «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1989, – 736 с.
2. Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, «Наука», 1976, 624 с.
3. Лянце В.Э. О нестандартном анализе. Научно-методический сборник «Математика сегодня», Киев. Изд-во «Вища школа», 1986, с.26-44.
4. Успенский В.А. Нестандартный или неархимедов анализ. Новое в жизни, науке, технике. – М., 1983, №8. – с.64.