Теорема. *Если выполнены условия(i), то существует* $\mu > 0$ *такое, что при* $0 < \mu \le \overline{\mu}$ *система (1) допускает единственное* (θ, ω) *- периодическое решение по* t, x *из класса* $H^{\alpha}(E_{1+n})$*, которое при* $\mu \to 0$ *сходится к многопериодическому решению порождающего уравнения.*

При доказательстве теоремы используется схема доказательства теоремы из [5]. По теореме Каччиополи – Банаха [7]в классе $H^{\alpha}(E_{1+n})$ существует единственная неподвижная точка $g^* = g^*(t, x)$ оператора P, удовлетворяющая условию

$$g^* \equiv (\mathrm{P}g^*)(t, x).$$

Тогда функция

$$u^{**}(t, x) = u^*(t, x) + g^*(t, x)$$

удовлетворяет системе (1) и является (θ, ω) - периодическим решением по t, x.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cesari L.* A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems. //Riv. math.Univ. Parma. 1974. – 3. №2. – P.107-131.
2. *Pucci P.* Problemi ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche //Boll.Unione Mat. Ital. B. 1979. – 16. №5. – P.87-99.
3. *Bassanini P.* Iterative methods for quasilinear hyperbolic systems in the first canonic form //Appl. Anal. 1981. – 12. №2. – P.105-117.
4. *Жестков С.В.* О построении многопериодических решений полулинейных гиперболических систем уравнений в частных производных с помощью характеристик //Дифференц. уравнения. 1984. –Т.20. – №9. – С.1630-1632.
5. *Умбетжанов Д.У.* Почти периодические решения эволюционных уравнений. Алма-Ата: Наука, 1990. 184с.
6. *Abdikalikova G.* On solvability of the boundary value problem for system of the hyperbolic equations // International Scientific Conference Mathematical analysis, differential equations and their applications. Abstracts.Uzhgorod, Ukraine, 2006. – P.129.
7. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1968. 408 с.

ГОЛОМОРФНОСТЬ МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОГО ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

MULTIPERIODIC SOLUTION OF SOME OF THE VARIABLES OF A NONLINEAR SYSTEM OF D-EQUATIONS

Бержанов А.Б., Кемаладинова У.,У.Мынбаева С.Т.

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова,г.Актобе, Казахстан

Получено достаточное условие существования и единственности многопериодического по части переменных, голоморфного относительно малого параметра решения, одной системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных

Рассмотрим систему D-уравнений

$$\begin{gathered} D_E x \equiv \frac{\partial x}{\partial t} + a(t, \varphi, \psi, \varepsilon)\frac{\partial x}{\partial \varphi} + b(t, \varphi, \psi, \varepsilon)\frac{\partial x}{\partial \psi} = \\ P(t, \varphi, \psi)x + \mu\left\{ Q(t, \varphi, \psi, x, \mu) + \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{R(t_1, t, \varphi, \psi, x(t_1, \varphi, \psi), \mu)\partial t_1}{1 + (t - t_1)^2} \right\}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $a(t,\varphi,\psi,\varepsilon)=a^0(t)+\varepsilon a_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon), \varphi - m -$ векторы; $b(t,\varphi,\psi,\varepsilon)=b^0(t)+\varepsilon b_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$, $\psi - k -$ векторы; $P(t,\varphi,\psi) - n\times n$-матрица; $x, Q, R - n -$ векторы; $\varepsilon, \mu -$ положительные параметры; $a\dfrac{\partial}{\partial\varphi}, b\dfrac{\partial}{\partial\psi} -$ скалярные произведения соответственно m и k - мерных векторов a, b и символических векторов

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}=\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1},...,\frac{\partial}{\partial\varphi_m}\right),\ \frac{\partial}{\partial\psi}=\left(\frac{\partial}{\partial\psi_1},...,\frac{\partial}{\partial\psi_k}\right).$$

Функция $f(t,\varphi,\psi)$ называется многопериодической по части переменных, если она многопериодична по t,φ с вектор-периодом (θ,ω) равномерно относительно Ψ. Для таких функции в любой точке $(t,\varphi,\psi)\in R^{1+m+k}$ имеет место равенство

$$f(t+\theta,\varphi+q^{\omega},\psi)-f(t,\varphi,\psi)=0, \tag{2}$$

где $q^{\omega}=(q_1\omega_1,...,q_m\omega_m)$, $q=(q_1,...,q_m)$- целочисленный вектор.

При выполнений условий, анологичных [1], установленно существование и единственность многопериодического по части переменных решения системы (1). Выясним теперь условия голоморфности такого решения относительно μ.

Будем говорить, что выполнены условия (Г), есливектор-функций $a^0(t), b^0(t)$ периодичный с периодом θ; а вектор-функций $a_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$. $b_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$ многопериодические по t,φ с вектором-периодом θ,ω равномерно относительно Ψ, равномерно непрерывны по t,φ,ψ, имеют равномерно непрерывные ограниченные частные производные до второго порядка включительно по координатам векторов φ и ψ; вектор функция $Q(t,\varphi,\psi,\chi,\mu)$ многопериодична по t,φ с вектор-периодом (θ,ω) равномерно относительно Ψ, x, μ вектор-функция $R(t_1,t,\varphi,\psi,x,\mu)$ диагонально периодична по t и t_1 многопериодична по φ с вектор-периодом ω равномерно относительно Ψ, x, μ, голоморфны относительно x и μ в областях

$$R\times R^m\times R^k\times R\times M;\ R\times R\times R^m\times R^k\times R^n\times M$$

Очевидно при выполнении условии () для всех x и μ удовлетворяющих неравенствам $\|x\|\le\rho<\rho_0$, $0<\mu<\mu_0$ имеют место разложения вектор-функции $Q(t,\varphi,\psi,x,\mu)$, $R(t_1,t,\varphi,\psi,x,\mu)$ в ряд по степеням x и μ:

t (3)

где $\bar{s}=(s_0,s)=(s_0,s_1,...,s_n)$-мультиндекс; $s_j\ge 0, j=\overline{0,n}$;

$$|\bar{s}|=s_0+s_1+...+s_n;\ x^s=x_1^{s_1}x_2^{s_2}...x_n^{s_n};\ Q^{(s)}(t,\varphi,\psi)=Q^{s_0,s_1,...,s_n}(t,\varphi,\psi),$$

$$R^{(s)}(t_1,t,\varphi,\psi)=R^{s_0,s_1,...,s_n}(t,\varphi,\psi).$$

При этом коэффициенты рядов (3) являются n-мерными многопериодическими по части переменных вектор-функциями и удовлетворяют неравенствами Коши:

$$\left\|Q^{(s)}(t,\varphi,\psi)\right\|\le\frac{Q_0}{\rho_*^{|s|}\mu_*^{s_0}}, \tag{4}$$

,

где $Q_0>0, R_0>0-$ некоторые постоянные.

Предположим, что однородная линейная система

$$D_{\varepsilon}x=P(t,\varphi,\psi)x \tag{5}$$

Некритическая [1]. Тогда матрица типа Грина $X^*(t_0,t,\varphi,\psi)$ системы имеет место соотношение

$$\left\|X^*(t_0,t,\varphi,\psi)\right\|\le Be^{-\gamma|t-t_0|}, \qquad (6)$$

где $B\ge 1,\gamma>0-$некоторые постоянные.

Будем искать многопериодическое по части переменных решение системы (1) в виде ряда

$$x(t,\varphi,\psi,\mu)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k y_k(t,\varphi,\psi) \qquad (7)$$

Подставляя ряд (7) в систему (1) с учетом (3) получим равенство:

$$D_\varepsilon\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k y_k(t,\varphi,\psi)\right)=P(t,\varphi,\psi)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k y_k(t,\varphi,\psi)\right)+\mu\sum_{|\bar{s}|\ge 0}Q^{\bar{s}}(t,\varphi,\psi)$$
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k y_k(t,\varphi,\psi)\right)\cdot\mu^{s_0}+\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R^{\bar{s}}(t_1,t,\varphi,\psi)}{1+(t-t_0)^2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k y_k(t,\varphi,\psi)\right)^s\mu^{s_0}dt_1 \qquad (8)$$

Далее в (8) приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ, получим рекуррентные соотношения для последовательного нахождения коэффициентов ряда (7):

$$\begin{aligned}
&D_\varepsilon y_1=P(t,\varphi,\psi)y_1+Q^{(0)}(t,\varphi,\psi)+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R^{(0)}(t_1,t,\varphi,\psi)dt_1}{1+(t-t_1)^2},\\
&D_\varepsilon y_2=P(t,\varphi,\psi)y_2+\Phi_1(t_1,\varphi,\psi,y_1)+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{W_1(t_1,t,\varphi,\psi,y_1(t_1,\varphi,\psi))dt_1}{1+(t-t_1)^2},\\
&D_\varepsilon y_k=P(t,\varphi,\psi)y_k+\Phi_{k-1}(t,\varphi,\psi,y_1,...,y_{k-1})+\\
&+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{W_{k-1}(t_1,t,\varphi,\psi,y_1(t_1,\varphi,\psi,y_1,...,y_{k-1}))dt_1}{1+(t-t_1)^2},
\end{aligned} \qquad (9)$$

Из соотношения (9) коэффициенты ряда (7)

$y_1,y_2,...,y_k,...$ последовательно и однозначно определяются как $n-$ мерные многопериодические по части переменных вектор-функции.

Следовательно, формально можно построить многопериодическое по части переменных решение системы (1) в виде ряда (7).

Исследуем теперь сходимость ряда (7), считая, что его коэффициенты определены из рекурентных соотношений (9). Прежде всего заметим, что многопериодическое по части переменных решение системы (1) является многопериодическим по части переменных решением следующего интегрального уравнения

$$x(t,\varphi,\psi,\mu)=T\left[\mu\left\{Q(t,\varphi,\psi,x,\mu)+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R(t_1,t,\varphi,\psi,x(t,\varphi,\psi),\mu)dt_1}{1+(t-t_1)^2}\right\}\right], \qquad (10)$$

где $T[\cdot]=\int_{-\infty}^{+\infty}X(s,t,\varphi,\psi)[\cdot]ds$.

Для уравнения (10) мажорантным является уравение

$$u=\mu\frac{L(q_0+\pi R_0)}{\left(1-\dfrac{u}{\rho_0}\right)\left(1-\dfrac{\mu}{\bar{\mu}}\right)}. \qquad (11)$$

где $L=2B\gamma^{-1}$.

Уравнение (11) имеет решение $u(\mu)$, голоморфное относительно μ в окрестности $\mu = 0$, т.е.

$$u(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k u_k \ . \tag{12}$$

Далее, для оценки области сходимости мажорантного ряда (12) используем идею работы [2]. Составим систему

$$\begin{cases} u = \dfrac{\mu L(Q_0 + \pi R_0)}{\left(1 - \dfrac{u}{\rho_0}\right)\left(1 - \dfrac{\mu}{\overline{\mu}}\right)} \\ 1 = \dfrac{\partial}{\partial u}\left[\dfrac{\mu L(Q_0 + \pi R_0)}{\left(1 - \dfrac{u}{\rho_0}\right)\left(1 - \dfrac{\mu}{\overline{\mu}}\right)}\right] \end{cases}. \tag{13}$$

Решая систему (11) относительно u и μ находим

$$\mu_1^* = \frac{\rho_0 \overline{\mu}}{\rho_0 + 4L\overline{\mu}(Q_0 + \pi R_0)}, \ u^* = \frac{\rho_0}{2}.$$

Следовательно, радиус сходимости ряда (7) не меньше числа μ_1^*. Результат сформулируем виде теоремы.

Теорема. Если выполнены условия () и (6), то система (1) имеет многопериодическое по части переменных решение

$$x^*(t, \varphi, \psi, \mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k y_k(t, \varphi, \psi)$$

голоморфное относительно параметра μ в промежутке $0 \le \mu < \mu_1^*$. Это решение остается в области $R^{i+m+k} \times \left[0, \mu_1^*\right]$ и при $\mu \to 0$ стремится k тривиальному решению $x \equiv 0$ системы (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бержанов А.Б. "О многопериодических по части переменных решениях системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных" Известия МОН и НАН РК, серия физ.-мат., №1, 2002, с.19-23.
2. Лика Д.К., Рябова Ю.А. "Методы интеграции и мажоргерующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний" Кишинев, Штиица, 1974, 291 с.

СЧЁТНО НЕОГРАНИЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

COUNTED UNLIMITED ENSEMBLES

Демисенов Б.Н.

Костанайский государственный педагогический институт, г. Костанай, Казахстан

В работе исследуется натуральный ряд, показывается, что его природа есть переходное состояние от конечного к бесконечному, в силу чего натуральный ряд определяется как