where $N = M_0 M - \dfrac{M_0 M_1}{\gamma}$ - $const$.

2. The function of $u^*(\tau, t, x, y)$ multiperiodic on τ, t, x :

$u^*(\tau + \theta, t + k\omega, x + p\sigma, y) = u^*(\tau, t, x, y)$.

3. The function of $u^*(\tau, t, x, y)$ uniqueness.

Theorem. If for functions $f(\tau, t, x, y)$ and $\Psi(\tau, t, x)$ were executed conditions, then equation (1) by condition (2) and $\gamma = const > 0$ has uniqueness multiperiodic on τ, t, x of solutions $u^*(\tau, t, x, y)$, present in the shape (7).

REFERENCES LIST

1. *Umbetzhanov D.U.* Almost periodic solutions of evolutions equations. Alma-Ata: Nayka, 1990. 184p. (in Russian).
2. *Sartabanov Zh.A.* Condition of periodically of differential systems solution with multidimensional time // Izvestiya NAN RK. Ser. fiz.- mat. 2004. No.3, pp.44-48. (in Russian).
3. *Asanova A.T.* Limited solution of the nonlinear parabolic equations // Izvestiya MN-AN RK. Ser. fiz.- mat. 1997. No.1, pp.33-39 (in Russian).
4. *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. M.: Mir, 1968. 428p. (inRussian).

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ON CONDITIONS FOR A NONLOCAL BOUNDARY VALUE SYSTEM EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVE

Абдикаликова Г.А., Исенова А.А.

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова, г.Актобе, Казахстан

На $\overline{\Omega} = \{(x,t) : at \le x \le at + \omega, 0 \le t \le T\}, T > 0, \omega > 0$ рассматривается краевая задача с нелокальным условием для системы уравнений в частных производных

$$D\left[\frac{\partial}{\partial x} u\right] = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + S(x,t)u + f(x,t), \quad u \in R^n, \tag{1}$$

$$B(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) + C(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x+T,T) = d(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,t) = \Psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

где $D = \dfrac{\partial}{\partial t} + a\dfrac{\partial}{\partial x}$, $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ - n - вектор; $A(x,t)$, $S(x,t)$ – $(n \times n)$-матрицы, $f(x,t)$ - n - вектор-функция непрерывны по x и t на $\overline{\Omega}$; $B(x), C(x)$ – $(n \times n)$ – матрицы и n - вектор-функция $d(x)$ – непрерывны на $[0,\omega]$; функция $\Psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$.

Через $C(\overline{\Omega}, R^n)$ обозначим пространство непрерывных по x и t функций $u : \overline{\Omega} \to R^n$ с нормой $\|u\|_0 = \max\limits_{x \in [0,\omega]} \max\limits_{t \in [0,T]} \|u(x,t)\|$; $\|A\|_0 = \max\limits_{(x,t) \in \overline{\Omega}} \|A(x,t)\| = \max\limits_{(x,t) \in \overline{\Omega}} \max\limits_{i=1,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|$,

$\|d\|_1 = \max\limits_{x \in [0,\omega]} \|d(x)\|$, $\|\Psi\|_2 = \max\limits_{t \in [0,T]} \|\Psi(t)\|$, .

Цель данного сообщения - найти коэффициентные достаточные условия корректной разрешимости задачи (1)-(3).

На современном этапе развития теории краевых задач для уравнения в частных производных значительный интерес представляют задачи с нелокальными ограничениями, в которых условия связывают искомое решение и его производные в различных точках, лежащих на границе или внутри рассматриваемой области. Отметим [1-2], где приводятся подробный обзор и анализ по этим задачам.

В работе [3] методом введения функциональных параметров, являющегося обобщением метода параметризации [4], установлены необходимые и достаточные условия корректной и однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи для системы гиперболических уравнений со смешанной производной в терминах специальной матрицы, составленной по матрицам уравнения и матрицам граничного условия.

Задачу (1)-(3) путем введения новой неизвестной функции $v(x,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ [5] сводим к краевой задаче для уравнения в частных производных первого порядка

$$Dv = A(x,t)v + S(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t)\in \overline{\Omega}, \tag{4}$$

$$B(x)v(x,0)+C(x)v(x+T,T)=d(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{5}$$

$$u(x,t)=\Psi(t)+\int_t^x v(\eta,t)d\eta, \qquad t\in[0,T]. \tag{6}$$

Если непрерывная функция $u(x,t)$ известна, то решая двухточечную краевую задачу (4)-(5), находим $v(x,t)$. Если непрерывная функция $v(x,t)$ является известной, то из (6) определим функцию $u(x,t)$.

Если непрерывная функция $u(x,t)$ является решением задачи (1)-(3), то пара непрерывных функций $(v(x,t),u(x,t))$ - решение (4)-(6), где $v(x,t)=\frac{\partial u}{\partial x}$ и, наоборот, если пара непрерывных функций $(v(x,t),u(x,t))$ - решение задачи (4)-(6), то из функционального соотношения (6) следует, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию (3) и имеет непрерывные производные. Подставив $v(x,t)=\frac{\partial u}{\partial x}$ в (4)-(5) имеем, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2)-(3) при всех $(x,t)\in\overline{\Omega}$, $x\in[0,\omega]$, $t\in[0,T]$, т.е. $u(x,t)$ есть решение задачи (1)-(3).

Используя метод характеристик, переходим к семейству обыкновенных дифференциальных уравнений на $\overline{\mathrm{H}}=\{(\xi,\tau): 0\le\xi\le\omega, 0\le\tau\le T\}$, $T>0$, $\omega>0$:

$$\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\tau}=\widetilde{A}(\xi,\tau)\widetilde{v}+\widetilde{S}(\xi,\tau)\widetilde{u}(\xi,\tau)+\widetilde{f}(\xi,\tau), \quad \tau\in[0,T], \tag{7}$$

с граничным условием

$$\widetilde{B}(\xi)\widetilde{v}(\xi,0)+\widetilde{C}(\xi)\widetilde{v}(\xi,T)=\widetilde{d}(\xi), \quad \xi\in[0,\omega], \tag{8}$$

функциональным соотношением

$$\widetilde{u}(\xi,\tau)=\Psi(\tau)+\int_\tau^{\xi+\tau}\widetilde{v}(\varsigma,\tau)d\varsigma, \qquad \tau\in[0,T], \tag{9}$$

где $\widetilde{v}(\xi,\tau)=v(\xi+a\tau,\tau)$, $\widetilde{A}(\xi,\tau)=A(\xi+a\tau,\tau)$, $\widetilde{S}(\xi,\tau)=S(\xi+a\tau,\tau)$, $\widetilde{f}(\xi,\tau)=f(\xi+a\tau,\tau)$, $\widetilde{u}(\xi,\tau)=u(\xi+a\tau,\tau)$.

Через $C(\overline{H},R^n)$ обозначим пространство непрерывных по ξ и τ функций $\widetilde{v}:\overline{H}\to R^n$ с нормой $\|\widetilde{v}\|_0=\max\limits_{\xi\in[0,\omega]}\max\limits_{\tau\in[0,T]}\|\widetilde{v}(\xi,\tau)\|$.

При известной непрерывной функции $\widetilde{u}(\xi,\tau)$, решая двухточечную краевую задачу (7)-(8), определим функцию $\widetilde{v}(\xi,\tau)$. Из (9) по известной непрерывной функции $\widetilde{v}(\xi,\tau)$ находим функцию $\widetilde{u}(\xi,\tau)$.

К семейству линейных двухточечных краевых задач применяется метод параметриизации [4].

Суть метода параметризации заключается в следующем:

1) берется шаг $h > 0 : Nh = T$ и область $\overline{H}$ по временной переменной τ разбивается на N частей;

2) вводятся дополнительные параметры – значения искомой функции на линиях $\tau = (r-1)h$ и задача (7)-(9) путем замены сводится к эквивалентной краевой задаче с функциональным параметром;

3) предлагается алгоритм нахождения решения краевой задачи с параметром, каждый шаг которого состоит их двух пунктов:

a) решается линейная система функциональных уравнений относительно введенных параметров, которое определяется по шагу $h > 0$ и исходным данным;

b) относительно неизвестных функций решается задача Коши для семейства систем обыкновенных дифференциальных уравнений на интервалах длины h при соответствующих значениях функциональных параметров.

Для нахождения решения задачи (7)-(9) строим алгоритм.

Шаг 0: В (7) принимая $\widetilde{u}(\xi,\tau) = \Psi(\tau)$, решив двухточечную краевую задачу (7)-(8), определим начальное приближение $\widetilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)$. Используя $\widetilde{v}(\xi,\tau) = \widetilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)$ из соотношений (9) находим $\widetilde{u}^{(0)}(\xi,\tau)$.

Шаг 1: Взяв в правой части (7) $\widetilde{u}(\xi,\tau) = \widetilde{u}^{(0)}(\xi,\tau)$, решая краевую задачу (7)-(8), определим приближение $\widetilde{v}^{(1)}(\xi,\tau)$. Подставляя в (9) найденную функцию $\widetilde{v}^{(1)}(\xi,\tau)$, находим $\widetilde{u}^{(1)}(\xi,\tau)$.

И т.д. Продолжив этот процесс, на k -ом шаге получим $\left(\widetilde{v}^{(k)}(\xi,\tau), \widetilde{u}^{(k)}(\xi,\tau)\right)$.

Отметим, что одним из условий разрешимости исследуемой задачи является обратимость матрицы $Q_\nu(\xi,h)$, $h > 0 : Nh = T$ и $\nu, \nu = 1,2,...$, составленная из сумм повторных интегралов по переменной τ длины h от коэффициентной матрицы системы и матриц граничного условия.

Теорема 1. *Пусть при некоторых* $h > 0 : Nh = T$, *и* $\nu, \nu = 1,2,..., (nN \times nN)$ *- матрица* $Q_\nu(\xi,h)$ *обратима при всех* $\xi \in [0,\omega]$ *и выполняются неравенства:*

а) $\left\| [Q_\nu(\xi,h)]^{-1} \right\| \le \gamma_\nu(h)$;

б) $q_\nu(\xi,h) = \gamma_\nu(h) \max\left\{1, h\left\|\widetilde{C}(\xi)\right\|\right\} \left[\ell^{\alpha(\xi)h} - 1 - \alpha(\xi)h - ... - \dfrac{(\alpha(\xi)h)^\nu}{\nu!} \right] \le \sigma < 1$,

где $\alpha(\xi) = \max\limits_{\tau\in[0,T]} \left\| \widetilde{A}(\xi,\tau) \right\|, \sigma = const$.

Тогда последовательные приближения $\left(\widetilde{v}^{(k)}(\xi,\tau), \widetilde{u}^{(k)}(\xi,\tau)\right)$ *равномерно сходятся* $\left(\widetilde{v}^{*}(\xi,\tau), \widetilde{u}^{*}(\xi,\tau)\right) \in C\left(\overline{\mathrm{H}}, R^n\right)$ *- к единственному решению задачи (7)-(9).*

При доказательстве теоремы используется схема доказательства теоремы 1 [4,с.54].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда задача (1)-(3) имеет единственное решение* $u^*(x,t) \in C\left(\overline{\Omega}, R^n\right)$.

Определение. Краевая задача (7)-(9) называется корректно разрешимой, если для любых $\widetilde{f}(\xi,\tau)$, $\widetilde{d}(\xi)$, $\Psi(\tau)$ она имеет единственное решение $\left(\widetilde{v}^{*}(\xi,\tau), \widetilde{u}^{*}(\xi,\tau)\right)$ и для него справедливо неравенство

$$\max\left(\max_{\tau\in[0,T]} \left\|\widetilde{v}(\xi,\tau)\right\|, \max_{\tau\in[0,T]} \left\|\widetilde{u}(\xi,\tau)\right\| \right) \le K_*(\xi) \max\left(\max_{\tau\in[0,T]} \left\|\widetilde{f}(\xi,\tau)\right\|, \left\|\widetilde{d}\right\|_1, \left\|\Psi\right\|_2 \right),$$

где $K_*(\xi)$ - непрерывная на $[0,\omega]$ функция, не зависящая от $\widetilde{f}(\xi,\tau), \widetilde{d}(\xi), \Psi(\tau)$.

Определение. Краевая задача (1)-(3) называется корректно разрешимой в широком смысле [6], если для любых $f(x,t), d(x), \Psi(t)$ она имеет единственное решение $u(x,t)\in C(\overline{\Omega}, R^n)$ и для него справедлива оценка

$$\max\left(\|u\|_0, \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_0\right) \le \overline{K}\max(\|f\|_0, \|d\|_1, \|\Psi\|_2),$$

где $\overline{K} = const$ **не зависит от** $f(x,t)$, $d(x), \Psi(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М., 2006. 287с.
2. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев, 1984. 264с.
3. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений //Дифференциальные уравнения. 2005. – Т.41. – №3. – С.337-346.
4. *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения //Ж. вычислительной математики и математической физики 1989. – Т.29. №1. – С.50-66.
5. *Abdikalikova G.A.* On Solvability Non-local boundary Value Problem for System of the Equations in partial derivative // Abstracts of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries, Almaty, 2009, pp.147.
6. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., 1968. – 592с.

О МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ABOUT MULTIPERIODIC SOLUTION OF ONE A NONLINEAR SYSTEM OF EQUATIONS IN PARTIAL IN DERIVATIVE

Абдикаликова Г.А., Наурызова Н. К.

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова, г. Актобе, Казахстан

Разрешимость систем гиперболических уравнений первого порядка исследована многими авторами, отметим [1-3].

В статье [4] исследовано существование единственного решения в широком смысле периодической задачи для гиперболической системы уравнений в частных производных первого порядка, приведенной к каноническому виду.

В монографии [5] исследован вопрос о существовании и единственности почти периодического решения нелинейных систем уравнений в частных производных с одинаковой главной частью.

Рассмотрим нелинейную систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\Lambda_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = Au + f(t,x) + \mu Q(t,x,u), \tag{1}$$

где $u(t,x)$ - искомый $n-$ вектор-столбец; Λ_k, A - постоянные $(n\times n)$ - матрицы; $f(t,x)$- известная $n-$вектор-функция на E_{1+n}, E_n - $n-$ мерное вещественное евклидово пространство векторов $x=(x_1,...,x_n)$, $(t,x)\in E_{1+n}$; $Q(t,x,u)$ - $n-$вектор-функция; $\mu>0$ - малый параметр.