МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОЕ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ D-УРАВНЕНИЙ

MULTIPERIODIC SOLUTION OF SOME OF THE VARIABLES OF A NONLINEAR SYSTEM OF D-EQUATIONS

Бержанов А.Б.

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова, г. Актобе, Казахстан

Получено достаточное условие устойчивости по временной переменной многопериодического по части переменных решения нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Рассмотрим систему уравнений

$$D_e x \equiv \frac{\partial x}{\partial t} + a(t,\varphi,\psi,\varepsilon)\frac{\partial x}{\partial \varphi} + b(t,\varphi,\psi,\varepsilon)\frac{\partial x}{\partial \psi} = \mathrm{P}(t,\varphi,\psi)x + \mu\left\{Q(t,\varphi,\psi,x,\mu) + \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{K}(t_1,t,\varphi,\psi)\cdot R(t_1,t,\varphi,\psi,x(t_1,\varphi,\psi),\mu)dt_1\right\}, \quad (1)$$

где x,Q,R – n – векторы-столбцы; $\varphi, a(t,\varphi,\psi,\varepsilon) = a^0(t) + \varepsilon a_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$ - m-векторы;

$\psi, b(t,\varphi,\psi,\varepsilon) = b^0(t) + \varepsilon b_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$ - kвекторы; $\mathrm{P}(t,\varphi,\psi)$, $\mathrm{K}(t_1,t,\varphi,\psi)$ - $n\times n$ - матрицы;

$a\cdot\dfrac{\partial}{\partial\varphi}, b\cdot\dfrac{\partial}{\partial\psi}$ - скалярные произведения m,k -мерных векторов a,b и символических векторов $\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = \left(\dfrac{\partial}{\partial\varphi_1},...,\dfrac{\partial}{\partial\varphi_m}\right); \dfrac{\partial}{\partial\psi} = \left(\dfrac{\partial}{\partial\psi_1},...,\dfrac{\partial}{\partial\psi_k}\right);$

ε, μ - положительные параметры.

Пусть $t,t_1 \in R$, $\varphi \in R^m = \{\varphi : \|\varphi\| < \infty\}$, $\psi \in R^k = \{\psi : \|\psi\| < \infty\}$,

$x \in R_\Delta = \{x : \|x\| \le \Delta\} \subset R^n$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, $\mu \in [0,\mu_0]$.

Вектор функцию $f(t,\varphi,\psi) \in R^n$, определенную и непрерывную в R^{1+m+k} назовем многопериодической по части переменных, если она многопериодичнапоt,φс вектор периодом $(\theta,\omega) \in R^{1+m}$ равномерно относительно $\psi \in R^k$. Очевидно для такой функции $f(t,\varphi,\psi)$ при любых $(t,\varphi,\psi) \in R^{1+m+k}$ имеет место равенство

$$f(t+\theta, \varphi + q\wedge\omega, \psi) - f(t,\varphi,\psi) = 0.$$

При выполнении определенных условий [1], установлено существование и единственность многопериодического по части переменных решения системы (1).

Выясним теперь условия устойчивости такого решения относительно временной переменной t.

Будем полагать, что выполнены условия (S), если вектор функции $a^0(t), b^0(t)$ периодичны по t с периодом θ; a вектор-функции $a_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$, $b_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$, $\mathrm{K}(t_1,t,\varphi,\psi,x,\mu)$, $Q(t,\varphi,\psi,x,\mu)$ и матрицы $P(t,\varphi,\psi)$, $\mathrm{K}(t_1,t,\varphi,\psi)$ ограничены и непрерывны по $t_1,t,\varphi,\psi,x,\varepsilon,\mu$,обладают ограниченными и равномерно непрерывными частными производными до второго порядка по координатами векторов φ,ψ,x при всех $t_1,t \in R$, $\varphi \in R^m$, $\psi \in R^k$, $x \in R_\Delta$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, $\mu \in [0,\mu_0]$; вектор функция K диагонально периодична по t,t_1, многопериодична по φ равномерно относительно ψ,x,μ; вектор функции a_1,b_1многопериодичны по t,φ равномерно относительно ψ,ε, кроме того

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|\mathrm{K}(t_1,t,\varphi,\psi)\|dt_1 \le \mathrm{K}_0 < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left\|\frac{\partial\mathrm{K}}{\partial\varphi}\right\| + \left\|\frac{\partial\mathrm{K}}{\partial\psi}\right\|\right)dt_1 \le \overline{\mathrm{K}} < \infty.$$

Очевидно, что при выполнении условий (S) имеют место соотношения:

$\|a^0(t)\| \le a_0$, $\|b^0(t)\| \le b_0$, $\|\mathrm{K}(t_1,t,\varphi,\psi)\| \le \mathrm{K}_1$, $\|R(t_1,t,\varphi,\psi,o,\mu)\| \le R_0$, $\|P(t,\varphi,\psi)\| \le P_0$, $\|Q(t,\varphi,\psi,o,\mu)\| \le Q_0$, $\|a_1(t,\varphi,\psi,o,\varepsilon)\| \le a_{10}$, $\|b_1(t,\varphi,\psi,o,\varepsilon)\| \le b_{10}$;

$$\|a_1(t,\overline{\varphi},\overline{\psi},\varepsilon) - a_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)\| \le \beta_1(\|\overline{\varphi}-\varphi\| + \|\overline{\psi}-\psi\|),$$
$$\|b_1(t,\overline{\varphi},\overline{\psi},\varepsilon) - b_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)\| \le \beta_2(\|\overline{\varphi}-\varphi\| + \|\overline{\psi}-\psi\|),$$
$$\|P(t,\overline{\varphi},\overline{\psi}) - P(t,\varphi,\psi)\| \le P_1(\|\overline{\varphi}-\varphi\| + \|\overline{\psi}-\psi\|),$$
$$\|\mathrm{K}(t_1,t,\overline{\varphi},\overline{\psi}) - \mathrm{K}(t_1,t,\varphi,\psi)\| \le \mathrm{K}_1(\|\overline{\varphi}-\varphi\| + \|\overline{\psi}-\psi\|),$$
$$\|Q(t,\overline{\varphi},\overline{\psi},\overline{x},\mu) - Q(t,\varphi,\psi,x,\mu)\| \le \sigma(\|\overline{\varphi}-\varphi\| + \|\overline{\psi}-\psi\| + \|\overline{x}-x\|); \tag{2}$$
$$\|R(t_1,t,\overline{\varphi},\overline{\psi},\overline{x},\mu) - R(t_1,t,\varphi,\psi,x,\mu)\| \le \sigma_1(\|\overline{\varphi}-\varphi\| + \|\overline{\psi}-\psi\| + \|\overline{x}-x\|),$$
$$a^0(t+\theta) = a^0(t),\ b^0(t+\theta) = b^0(t), a_1(t+\theta,\varphi+q\wedge\omega,\psi,\varepsilon) = a_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon),$$
$$b_1(t+\theta,\varphi+q\wedge\omega,\psi,\varepsilon) = b_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon),\ Q(t+\theta,\varphi+q\wedge\omega,\psi,x,\mu) = Q(t,\varphi,\psi,x,\mu),$$
$$P(t+\theta,\varphi+q\wedge\omega) = P(t,\varphi), K(t_1+\theta,t+\theta,\varphi+q\wedge\omega,\psi) = K(t_1,t,\varphi,\psi),$$
$$R(t_1+\theta,t+\theta,\varphi+q\wedge\omega,\psi,x,\mu) = R(t_1,t,\varphi,\psi,x,\mu)$$

для всех $t_1, t \in R$, $\overline{\varphi},\varphi \in R^m$, $\overline{\psi},\psi \in R^k$, $\overline{x}, x \in R_\Delta$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, $\mu \in [0,\mu_0]$,

где $a_0, b_0, K_1, R_0, P_0, Q_0, a_{10}, b_{10}, \beta_i, P_1, k_1, \sigma$ – некоторые положительные постоянные.

Предположим, что линейная система

$$D_\varepsilon x = P(t,\varphi,\psi)x \tag{3}$$

является некритической [1]. Тогда для системы (3) может быть построенматрицант (матрица типа Грина) удовлетворяющий условиям

$$\|X(t_0,t,\varphi,\psi)\| \le Be^{-\gamma|t-t_0|} \tag{4}$$
$$X(t-0,t,\varphi,\psi) - (t+0,t,\varphi,\psi) = E,$$

где $B \ge 1$, $\gamma > 0$ - постоянные.

Если система (3) некритическая и имеют условия (S), то можно указать положительные числа $\overline{\varepsilon}$ и $\overline{\mu}$ такие, что для всех значений $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}$, $0 < \mu < \overline{\mu}$ система (1) допускает единственное многопериодическое по части переменных решение

$$x = f^*(t,\varphi,\psi,\varepsilon,\mu)$$

(5)

обращающееся при $\varepsilon = 0$ в многопериодическое (5) по части переменных решение соответствующей условно- вырожденной системы, а при $\mu = 0$ в тривиальное решение $x = 0$ однородной системы (3).

Заменой $x = y + f^*$ исследуемый вопрос сводится к вопросу об устойчивости нулевого решения системы

$$D_\varepsilon y = P(t,\varphi,\psi)y + \mu\left\{Q^*(t,\varphi,\psi,y,\mu) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(t_1,t,\varphi,\psi)R^*(t_1,t,\varphi,\psi,y(t_1,\varphi,\psi),\mu)dt_1\right\}, \tag{6}$$

где положено $Q^*(t,\varphi,\psi,y,\mu) = Q(t,\varphi,\psi,y+f^*,\mu) - Q(t,\varphi,\psi,f^*,\mu)$,

$$R^*(t_1,t,\varphi,\psi,y,\mu) = R(t_1,t,\varphi,\psi,y+f^*,\mu) - R(t_1 t,\varphi,\psi,f^*,\mu).$$

Рассмотрим пространство U ограниченных n - мерных вектор-функций $u = u(\varphi,\psi \in C^{1,1}_{\varphi,\psi}(R^{m+k}))$, в котором введем норму $\|u\|_v = \sup\limits_{R^{m+k}} \|u(\varphi,\psi)\|$. Через $V(p)$ обозначим множество тех $u(\varphi,\psi) \in V$ для которых имеет место неравенство

$$\|u\|_V \le \rho.$$

Решение системы (6) которое при $t=t_0$ обращается в заданную вектор-функцию $u(\varphi,\psi)\in V(\rho)$, может быть представлено в виде

$$y(t,\varphi,\psi)=X(t_0 t,\varphi,\psi)u(\lambda(t_0,t,\varphi,\psi),\xi(t_0,t,\varphi,\psi))+$$
$$+\mu\int_{t_0}^{t}X(s,t,\varphi,\psi)\{\overset{*}{Q}(s,\lambda,(s,t,\varphi,\psi),\xi(s,t,\varphi,\psi),y(s,\lambda(s,t,\varphi,\psi),\xi(s,t,\varphi,\psi),\mu))+ \tag{7}$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}K(t_1,s,\lambda(s,t,\varphi,\psi),\xi(s,t,\varphi,\psi))R^*(t_1,s,\lambda(s,t,\varphi,\psi),\xi(s,t,\varphi,\psi),y(t_1,\lambda(s,t,\varphi,\psi),\xi(s,t,\varphi,\psi)),\mu)dt_1 ds\}$$

Отсюда на основе условия (4) и неравенств (2) имеем

$$\|y\|\le B\rho e^{-\gamma(t-t_0)}+\mu B(\sigma+\sigma_1 K_0)\int_{t_0}^{t}e^{-\gamma(t-s)}\|y\|ds \ .$$

Умножая обе части на $e^{\gamma t}$, получим

$$\|y\|e^{\gamma t}\le B\rho e^{\gamma t_0}+\mu(\sigma+\sigma_1 K_0)B\int_{t_0}^{t}\|y\|e^{\gamma s}ds \ .$$

Отсюда по лемме Гронуолла – Беллмана имеем

$$\|y\|e^{\gamma t}\le B\rho e^{\gamma t_0}e^{\mu(\sigma+\sigma_1 K_0)B(t-t_0)}$$

или

$$\|y\|\le B\rho e^{(-\gamma+\mu(\sigma+\sigma_1 K_0)B)(t-t_0)}$$

Если выбрать $0<\mu<\dfrac{\gamma}{2(\sigma+\sigma_1 K_0)B}$, то будем иметь

$$\|y\|\le B\rho e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t_0)} \tag{8}$$

при $t\ge t_0$.

Пусть $\nu>0$ – любое наперед заданное число. Выберем ρ из условия $0<\rho<\dfrac{\nu}{B}$.

Тогда из условия $\|u(\varphi,\psi)\|<\rho$ при всех $(\varphi,\psi)\in R^{m+k}$ будет следовать $\|y(t,\varphi,\psi)<\nu\|$ для всех $t\ge t_0$ и $(\varphi,\psi)\in R^{m+k}$.

Кроме того, число ρ не зависит от выбора t_0. Из (8) при $t\to+\infty$ имеем $\|y(t,\varphi,\psi)\to 0\|$.

Результат сформулировано в виде теоремы.

Теорема. Если система (3) – некритическая при $t\to+\infty$ и выполнены условия (S), то при всех значениях $0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}$, $0<\mu<\min\left(\bar{\mu},\dfrac{\gamma}{2(\sigma+\sigma_1 K_0)B}\right)$ многопериодическое по части переменных решение $x=f^*(t,\varphi,\psi,\varepsilon,\mu)$ системы (1) будет равномерно и асимптотически устойчивым относительно U.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бержанов А.Б. Многопериодическое по части переменных решение одной системы интегро-дифференциальных уравнений. // Вестник Евразийского Национального университета им. Л.Н.Гумилева, 2004, №1.с.223-227.