ISSN 2310-3353 ISSN 2310-3353

УДК 524.3-5

Кенжалиев, Д.И.,
Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ Жалпы және теориялық физика кафедрасының доценті ф.-м.ғ.к., Астана, Қазақстан
Сандал, Б.,
Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ Жалпы және теориялық физика кафедрасы 2 курс магистранты, Астана, Қазақстан

БЕРІЛГЕН ПОТЕНЦИАЛ ҮШІН КУЗМИННІҢ ҮШІНШІ ИНТЕГРАЛЫ БОЛУЫ ШАРТЫН ТЕКСЕРУ

Түйіні

Бұл мақалада біз жұлдыздар динамикасының негізгі түсініктерін: қозғалыс теңдеулері, галактика потенциалындағы жұлдыз қозғалысының траекториясы нөлдік жылдамдықтар контурымен анықталатындығын келтірдік. Үшінші интегралдың Ньютон потенциалы үшін орбита жәшігін тұрғызуда қолданысы келтірілді. Сонымен қатар, таңдап алынған потенциал үшін Кузминнің үшінші интегралы орындалуы тексеріліп анықталды.

Мақаланың мәнін ашатын сөздер: *астрономия, астрофизика, динамика, қозғалыс интегралдары, орбита.*

1. Кіріспе.

Жұлдыздар динамикасында стационар жұлдыздық жүйелердегі фазалық тығыздық өрнегінің мүмкін түрлерін анықтағанда үшінші интеграл мәселесімен кездесеміз.

$\Phi(R,\theta,z,t)$ – гравитациалық потенциал, яғни, t – уақыт мезетіндегі $(R,\theta,z,)$ нүктесінде жұлдыздың бірлік массасына (есептелген) тиесілі жұлдыздық жүйе өрісіндегі теріс таңбамен алынған жұлдыздың потенциалдық энергиясы. Ф галактика потенциалындағы жұлдыз қозғалысының дифференциалдық теңдеулері цилиндрлік координаталарда келесі түрде жазылады Идлис (1961), Велтман (1966):

$$\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 = \frac{\partial \Phi}{\partial R} \tag{1}$$

$$R^2\dot{\theta} = const = J \tag{2}$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{3}$$

Егер (2) теңдеуден тапсақ және (1) теңдеуге қойсақ, онда (1)-(3) үш өлшемді қозғалыс теңдеулерін екі өлшемді қозғалыс теңдеулеріне келтіруге болады Идлис (1961), J. Binney (1987):

$$\ddot{R} = \frac{J^2}{R^3} + \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{\partial \Phi'}{\partial R} \tag{4}$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi'}{\partial z} \tag{5}$$

Мұнда $\Phi' = \Phi - \dfrac{J^2}{2R^2}$ – келтірілген немесе эффективті потенциал дем аталады. Бұндай қозғалысты тек (R,z) жұлдызға сәйкестірілген жазықтықта қарастырады, яғни, меридиандық жазықтықта қарастырады.

Егер қозғалысты осы жазықтықта қарастырсақ энергияның сақталу заңы қоятын шектеу нәтижесінде траекториялар белгілі бір нөлдік жылдамдықтар контуры деп аталатын контур шегінен шыға алмайды Огородников (1958). Нөлдік жылдамдықтар контуры толық жылдамдықтың нөлге тең болуы шарты көмегімен анықталады.

$$v_R^2 + v_z^2 = 0 \qquad (6)$$

Алайда бұл контур тек теориялық анықталады,өйткені барлық финиттік орбиталар нөлдік жылдамдықтар контуры ішіндегі барлық ауданды толық толтырмайды. Оллонгрен барлық орбиталарды толтыратын аумағының формасына қарай үш классқа бөлуді ұсынды: жәшік тәрізді, трубка тәрізді және бұлт тәрізді. Шын мәнінде олардың қайсысы жүзеге асатындығы потенциал түріне тәуелді.

Осы және басқа мәліметтер энергия және қозғалыс мөлшері моменті интегралдарынан өзге оқшаулағыш интегралдың бар екендігін нұсқайды. Ол шартты түрде үшінші интеграл деп аталады. Жұлдыздар динамикасында Кузмин потенциалы атауы бекіген, себебі осы потенциалдардағы денелер үшін Кузминнің үшінші интегралы сақталады.

2. Үшінші интегралды қолдану амалы.

Нөльдік жылдамдықтар қысығының теңдеуі.

$$v_R^2 + v_z^2 = \frac{\mu}{r} - \frac{J^2}{2r^2\cos^2\Psi} + I = 0 \qquad (7)$$

(7) теңдеуді r қатысты шешіп нөлдік жылдамдық қисығының радиус-векторын табамыз:

$$r_{1,2} = -\frac{\mu}{2E}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{\mu^2\cos^2\Psi}}\right) \qquad (8)$$

Меридиандық жазықтықта орбиталар тобының қандай жәшікті толтыратындығын анықтайық:

$$r = \frac{P}{1 - \frac{e}{\sin i}\sin\Psi} \qquad (9)$$

Орбита соңдары келесі мәндермен анықталады

$$r = \frac{P}{1 \pm e} \quad \Psi = \pm i, \qquad (10)$$

(10) өрнекті (7) өрнекке қойып, орбита элементтерін p, e, i қозғалыс интегралы E, J, I арқылы анықтау үшін теңдеулер жүйесін аламыз:

$$p\cos^2 i = \frac{J^2}{\mu}, \qquad (11)$$

$$\frac{p}{1-e^2} = -\frac{\mu}{2J} \qquad (12)$$

(11) және (12) пайдаланып (10) қоямыз

$$r_{1,2} = -\frac{\mu}{2I}\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{2IJ^2}{\mu^2\cos^2 i}}\right) \qquad (13)$$

(8) формуладан айырмашылығы онда $\cos\Psi$, ал мында $\cos i$.

Мақсат – орбита элементтерін p, e, i үш интеграл I, J, k арқылы өрнектеу. Ол үшін k-ны орбита элемнеттерінен табу керек. Одан кейін (11) және (12) теңдеулерді қолданып, осы p, e, i элементтерді интегралдардың I, J, k функциясы ретінде табуға болады. Ол үшін үш теңдеуді қатар шешу керек:

1. Энергия теңдеуі

ISSN 2310-3353 ISSN 2310-3353

$$I = v_R^2 + v_z^2 - \frac{2\mu}{\sqrt{R^2 + z^2}} \tag{14}$$

2)Үшінші интеграл теңдеуі

$$k = \left(Rv_z - zv_R\right)^2 + z^2 v_\theta^2 \tag{15}$$

және нөлдік жылдамдықтар контуры теңдеуі

$$\frac{\partial k}{\partial v_R} v_z - \frac{\partial k}{\partial v_z} v_R = \left(z^2 - R^2\right) v_R v_z + Rz\left(v_R^2 - v_z^2\right) = 0 \tag{16}$$

Екінші теңдеуден v_z табамыз

$$v_z = \frac{z}{R} v_R \pm \frac{\sqrt{k - z^2}^2 v_\theta^2}{R} \tag{17}$$

Алынған өрнекті үшінші теңдеуге қойып, барлық мүшелерді v_R-дің дәрежесі бойынша топтастырамыз.

$$v_R\left(R^2 + z^2\right) \pm z\sqrt{k - z^2 v_\theta^2 = 0} \tag{18}$$

немесе

$$v_R = \mp \frac{z}{R^2 + z^2} \sqrt{k - z^2 v_\theta^2} \tag{19}$$

v_z – үшін формулаға қоямыз.

$$v_z = \pm \frac{R}{R^2 + z^2} \sqrt{k - z^2 v_\theta^2} \tag{20}$$

Енді табылған v_R және v_z -терді бірінші теңдеуге қоямыз. Келесі теңдеуді аламыз:

$$k + J^2 - 2\mu\sqrt{R^2 + z^2} = 2I\left(R^2 + z^2\right) \tag{21}$$

Сфералық координаталар жүйесіне өтіп, () теңдеуді келесі түрде аламыз.

$$k + J^2 - 2\mu r - 2Ir^2 = 0 \tag{22}$$

Осыдан орағыш қисықтың контурында жататын нүктелер координатасын r табамыз

$$r_{1,2} = -\frac{\mu}{2I}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2I}{\mu^2}\left(k + J^2\right)}\right) \tag{23}$$

Жәшіктегі нүктелерді сипаттайтын () формуламен салыстырамыз. Сонда алатынымыз

$$k + J^2 = J^2 \big/ \cos^2 i \tag{24}$$

немесе

$$k = \frac{J^2}{\cos^2 i}\left(1 - \cos^2 i\right) = J^2 tg^2 i \tag{25}$$

p, e элемнттерін I, J, k -дан функция түрінде жазайық.

$$p = \frac{J^2 + k}{\mu} \tag{26}$$

$$e^2 = 1 + \frac{2I}{\mu^2}\left(J^2 + K\right) \tag{27}$$

Бұл теңдеулер i, p, e орбита тұрақтыларын I, J, k қозғалыс интегралдарымен байланыстырады. Мұндағы k – Кузмин интегралы.

3. Таңдап алынған потенциал үшін Кузмин интегралының орында-латындығын анықтау.

Кузмин интегралы орындалу үшін төменде келтірілетін теңдеулер қанағаттандырылуы керек. Алдымен кузмин интегралының түрін келтірейік Идлис (1961):

$$K = (Rv_z - zv_R)^2 + z^2 v_\theta^2 + z_0^2(v_z^2 - 2\Phi^*) \tag{28}$$

мұндағы z_0 – тұрақты, ал Φ^* – келесі теңдеулерді қанағаттандыратын функция.

$$z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial R} = z^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{29}$$

$$z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} = (R^2 + z_0^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial R} \tag{30}$$

(28) және (30) қатынастардың үйлесімділігі шарты келесі теңдікті қанағаттан-дыруы керек.

$$3\left(z \frac{\partial U}{\partial R} - R \frac{\partial U}{\partial z}\right) - \left(R^2 + z_0^2 - z^2\right)\frac{\partial^2 U}{\partial R \partial z} + Rz\left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{31}$$

Енді Кузмин интегралының біз таңдап алған потенциал үшін орындалатындығын тексеріп көрейік. Потенциал түрі келесідей:

$$\Phi(R, z) = \frac{GM}{\left\{R^2 + \left[a + \left(z^2 + b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{1/2}} \tag{32}$$

Алдымен (31) теңдеудің дербес туындылы мүшелерін жеке-жеке тауып алайық.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{GM\left(-\frac{1}{2}\right)2R}{\left\{R^2 + \left[a + \left(z^2 + b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{3/2}} = -\frac{GMR}{\left\{R^2 + \left[a + \left(z^2 + b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{3/2}} \tag{33}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = GM\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{R^2 + \left[a + \left(z^2 + b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{-3/2}\left[\left[a + \left(z^2 + b^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right]' = -GM\left\{R^2 + \left[a + \left(z^2 + b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{-3/2} \cdot$$

$$\cdot\left[\left(\left(z^2 + b^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right]' = -\frac{GMz}{\left\{R^2 + \left[a + \left(z^2 + b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{3/2}\left(z^2 + b^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{34}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z} = \left[-\frac{GM}{\left\{R^2 + \left[a + \left(z^2 + b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{3/2}}\right] = -GM\left(-\frac{3}{2}\right)\left\{R^2 + \left[a + \left(z^2 + b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{-5/2} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2z\left(z^2 + b^2\right)^{-1/2} =$$

$$= 3GM \frac{z}{\left\{R^2 + \left[a + \left(z^2 + b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{-5/2}\left(z^2 + b^2\right)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} = -GMR\left(-\frac{3}{2}\right)\left\{R^2 + \left[a + \left(z^2 + b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{-5/2} 2R = \frac{GMR^2}{\left\{R^2 + \left[a + \left(z^2 + b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{5/2}}$$

(35 и 36)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=-\frac{GM}{\left\{R^2+\left[a+\left(z^2+b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{3/2}\left(z^2+b^2\right)^{1/2}}-\frac{GM3z^2}{\left\{R^2+\left[a+\left(z^2+b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{2}\left(z^2+b^2\right)}-\frac{GM3z^2}{\left\{R^2+\left[a+\left(z^2+b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{3}\left(z^2+b^2\right)} \qquad (37)$$

Осы дербес туындылардан алынған өрнекерді жоғарыдағы теңдікке қойып орындала ма, жоқпа тексереміз:

$$-\frac{3GMRz}{\left\{R^2+\left[a+\left(z^2+b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}+\frac{3GMRz}{\left\{R^2+\left[a+\left(z^2+b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}\left(z^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{3GMR^2z}{\left\{R^2+\left[a+\left(z^2+b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{\frac{5}{2}}\left(z^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{3GMzz_0^2}{\left\{R^2+\left[a+\left(z^2+b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{\frac{5}{2}}\left(z^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{3GMz^3}{\left\{R^2+\left[a+\left(z^2+b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{\frac{5}{2}}\left(z^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{3GMR^3z}{\left\{R^2+\left[a+\left(z^2+b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{\frac{5}{2}}}-\frac{GMRz}{\left\{R^2+\left[a+\left(z^2+b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}\left(z^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{3GMRz^3}{\left\{R^2+\left[a+\left(z^2+b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{3}\left(z^2+b^2\right)}-\frac{GMRz^3}{\left\{R^2+\left[a+\left(z^2+b^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}\left(z^2+b^2\right)}\neq 0 \qquad (38)$$

4. Қорытынды.

Осы жұмыстың кіріспесінде жұлжыздар динамикасы туралы, ондағы үшінші интеграл мәселесі туралы мәлімет, қозғалыс теңдеулері және нөлдік жылдамдықтар контуры ұғымы берілді. Екінші бөлімде нөлдік жылдамдықтар қисығы теңдеуінен оның радиус векторы табылды. Одан әрі орбиталар тобы қандай жәшік толтыратындығы анықталды. Осы орбита элементтерін қозғалыс интегралдары арқылы өренктеу үшін үш теңдеулер жүйесі бірге шешілді. Үшінші бөлімде ғалам потенциалы таңдап алынды және осы потенциал үшін Кузмин интегралының орындалу шарты тексерілді.

Әдебиет тізімі

Велтман, И.К. Астрономия 1966 [Текст]: кинематика и динамика звездных систем / И.К. Велтман, Г.М. Идлис, В.А. Антонов. – М.: БИНИТИ. – 61-93 б.

Идлис, К.М. Структура и динамика звездных систем [Текст] / К.М. Идлис. – Алма-ата: Издательство Академии наук Казахской СССР, 1961. – 7-32 б.

Огородников, К.Ф. Динамика звездных систем [Текст] / К.Ф. Огородников. – М: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. – 243-310 б.

Bienaymé, O. Approximate integrals of motion [Text] / O. Bienaymé, G. Traven // Astronomy & Astrophysics. – 2013. – V. 549. – № A89. – P. 11.

Bienaymé, O. Quasi integral of motion for axisymmetric potentials [Text] / O. Bienaymé, A.C. Robin, B. Famaey // Astronomy & Astrophysics. – 2015. – V. 581. – № A123. – 1306 pp.

Binney, J. Galactic dynamics [Text] / J. Binney, S. Tremaine. – New Jersey: Princeton University Press, 1987. – 177-183 б.

Contopoulos, G. A third integral of Motion in a Galaxy [Text] / G. Contopoulos // Zeitschrift fur Astrophysik. – 1959. – № 49. – P. 273-291.

Contopoulos, G. On the Existence of a Third Integral of Motion [Text] / G. Contopoulos // The astronomical journal. – 1963. – V. 68. – № 1. – P. 1306.

Miyamoto, M. Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies [Text] / M. Miyamoto, R. Nagai // Astronomical Society of Japan, Publications. – 1975. – vol. 27. – №. 4. – P. 533-543.

Ollongren, A. Three – dimentional galactic stellar orbits [Text] / A. Ollongren // Bulletin of the astronomical institutes of the Netherlands. – 1962. – V. 16. – P. 521.

Ronaldo, S.S. Vieira and Javier Ramos-Caro [Text]: A simple formula for third integral of motion of disc-crossing stars in galaxy / S.S. Ronaldo // The Astrophysical jounal. – V. 786. – № 1. – 2014. – P. 27-34.

Мәлімет радакцияға түсті: 14.11.2016

КЕНЖАЛИЕВ, Д.И., САНДАЛ, Б.

ПРОВЕРКА ОБЯЗАТЕЛЬНОЙ ВЕРНОСТИ ТРЕТЬЕГО ИНТЕГРАЛА КУЗЬМИНА ДЛЯ ЗАДАННОГО ПОТЕНЦИАЛА

В вводной части этой работы приводятся сведения о звездной динамике, контуре нулевых скоростей, приводятся уравнения движения, а также раскрывается проблема третьего интеграла. Далее из уравнения контура нулевых скоростей авторы рассчитывают радиус и вектор. После чего определяют, какой ящик заполнит семейство орбит. Чтобы выразить элементы орбиты через интегралы движения, была совместно решена система из трех уравнений. В третьей части работы был выбран потенциал галактики и проверены условия выполняемости третьего интеграла Кузмина для этого потенциала.

Ключевые слова: *астрономия, астрофизика, динамика, интегралы движения, орбита.*

KENZHALIEV, D.I., SANDAL, B.

VERIFICATION OF OBLIGATORY LOYALTY OF THE KUZMIN'S THIRD INTEGRAL FOR THE GIVEN POTENTIAL

In the introductory part of this work is to give information about the stellar dynamics, bringing the idea of the problem of the third integral, zero speed circuit and the equations of motion are given. Then from the equation curve of zero velocities derive its radius vector. Once we have identified a family of orbits fill a box. To express the elements of the orbit through the integrals of motion, it was jointly solved system of three equations. In the third part, we have chosen the potential of the galaxy and checked the conditions of existence of the third Kuzmin integral to this potential.

Keywords: *astronomy, astrophysics, dynamics, integrals of motion, orbit.*