Ө. Сұлтанғазин атындағы
Қостанай мемлекеттік педагогикалық университеті
Жаратылыстану-математика факультеті
Физика-математикалық пәндер кафедрасы

Асқанбаева Ғ.Б., Беркімбай Р.Ә.

Аналитикалық геометрия

Есептер жинағы

Қостанай
2019

ӘОЖ 514.7(075.8)
КБЖ 22.151 я73
А 88

Құрастырушылар:
Асқанбаева Ғ.Б. – физика-математикалық пәндер кафедрасының аға оқытушысы,
Беркімбай Р.Ә. – физика-математикалық пәндер кафедрасының аға оқытушысы

Сын пікір берушілер:
Ысмағұл Р.С. – ф-м.ғ. кандидаты (А. Байтұрсынов атындағы ҚМУ, математика кафедрасының доценті)
Калжанов М.У. – ф-м.ғ. кандидаты (ҚМПУ, физика-математикалық пәндер кафедрасының доценті)

Асқанбаева Ғ.Б., Беркімбай Р.Ә.
А 88 Аналитикалық геометрия: оқу құралы /
Ғ.Б. Асқанбаева, Р.Ә. Беркімбай – Қостанай, 2019. – 148 б.

ISBN 978-601-7601-07-2

Оқу құралында аналитикалық геометрияның барлық бөлімдері қамтылған. Пәннің әрбір тарауы үшін қысқаша теориялық мәліметтер беріліп, есептер жинағы ұсынылған. Оқу құралының соңында есептердің жауаптары келтірілген.

Оқу құралы 6В01501 – Математика білім беру бағдарламасы бойынша оқитын студенттерге арналған.

ӘОЖ 514.7(075.8)
КБЖ 22.151 я73

Қостанай мемлекеттік педагогикалық университетінің ғылыми кеңесінің шешімімен баспаға ұсынылады

ISBN 978-601-7601-07-2

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ

Оқу құралы жоғары педагогикалық оқу орындарының аналитикалық геометрия курсының бағдарламасына сәйкес құрылған. Онда әр тақырып бойынша есептерді шешуге қажетті қысқаша теориялық материалдар берілген содан соң көптеген есептер қарастыралған.

Оқу құралы жазықтықтағы және кеңістіктегі аналитикалық геометрия атты екі бөлімнен тұрады.

Бірінші бөлім төрт тарауға бөлінген. Онда жазықтықтағы аналитикалық геометрияның қарапайым есептері, сызық теңдеуі, бірінші ретті сызықтар, екінші ретті сызықтардың геометриялық қасиеттері қарастырылған.

Екінші бөлім алты тараудан тұрады. Онда кеңістіктегі аналитикалық геометрияның қарапайым есептері, векторлық алгебра, беттердің және сызықтардың теңдеулері, жазықтық теңдеулері, кеңістіктегі түзу теңдеулері, екінші ретті беттердің теңдеулері қарастырылған.

Оқулықтың соңында есептердің жауаптары ұсынылған.

Оқулық «Аналитикалық геометрия» пәнін оқитын студенттерге олардың ой-өрістерін көтеруге, шығармашылық қабілетін дамытуға, алған білімдерін практикада қолдана білуге үйретуге, сөйтіп олардың білімдерін тереңдетуге арналған. Сонымен қатар бұл есептер жинағын техникалық мамандық студенттері, магистранттар, мектеп мұғалімдері өз жұмыстарында көмекші құрал ретінде қолдануға болады. Оқу құралы 5В010900 – Математика мамандығы бойынша оқитын студенттерге арналған.

1 БӨЛІМ. Жазықтықтағы аналитикалық геометрия

1 Жазықтықтағы аналитикалық геометрияның қарапайым есептері

1.1 Түзудегі декарттық координаталар

Оң бағыты таңдалған түзу ось деп аталады. Егер осы нүктелердің қайсысы кесіндінің басы, қайсысы ұшы екені белгілі болса, онда осьтің кейбір А және В нүктелерімен шектелген кесіндісі бағытталған кесінді деп аталады. Басы А және ұшы В болатын бағытталған кесінді АВ символымен белгіленеді. Бағытталған кесіндінің шамасы деп кесіндінің бағыты осьтің оң бағытымен бірдей болса, онда кесіндінің ұзындығына тең оң сан, ал егер кесіндінің бағыты осьтің оң бағытына қарама–қарсы болса, онда кесіндінің ұзындығына тең теріс сан аталады. АВ кесіндісінің шамасы АВ символымен, ал оның ұзындығы $|AB|$ деп белгіленеді. Егер А және В нүктелері беттессе, онда олармен анықталатын кесінді нольдік деп аталады; $AB = BA = 0$ болатыны айқын (нольдік кесіндінің бағыты айқындалмаған деп есептеледі).

Еркін a түзуі берілсін. Онда ұзындық өлшемінің бірлігі ретінде кейбір кесіндіні таңдаймыз, a түзуінде оң бағытты тағайындаймыз (сонда ол ось болып шығады) және осы түзуде қандай да бір нүктені O әрпімен белгілейміз. Сонда a түзуінде координаталар жүйесі енгізіледі.

a түзуінің (тағайындалған координаталар жүйесінде) кез келген M нүктесінің координатасы деп OM кесіндісінің шамасына тең x саны аталады: $x = OM$.

O нүктесі координаталар бас нүктесі деп аталады, оның координатасы нольге тең. $M(x)$ символы M нүктесінің координатасы x дегенді білдіреді.

Егер a түзуінің екі еркін нүктелері $M_1\ (x_1)$ және $M_2(x_2)$ болса, онда $|M_1\ M_2| = x_2 - x_1$ формуласы $M_1\ M_2$ кесіндісінің шамасын, ал $|M_1 M_2| =| x_2 - x_1|$ оның ұзындығын өрнектейді.

1. Мына нүктелерді салыңыз**:**

$A(3)$, $B(5)$, $C(-1)$, $D(\frac{2}{3})$, $E(-\frac{3}{7})$, $F(\sqrt{2})$ және $H(-\sqrt{5})$.

2. Координаталары мына теңдеулерді қанағаттандыратын нүктелерді салыңыз:

1) $|x| = 2$; 2) $|x-1| = 3$; 3) $|1- x|=2$; 4) $| 2+x| = 2$.

3. Координаталары мына теңсіздіктерді қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орнын сипаттаңыз**:**

1) $|x| >2$; 2) $x - 3\le0$; 3) $12- x<0$; 4) $2x-3\le0$;

5) $3x-5>0$; 6) $1<x<3$; 7) $-2\le x\le3$; 8) $\frac{2-x}{x-1}>0$;

9) $\frac{2x-1}{x-2}>1$; 10) $\frac{2-x}{x-1}<0$; 11) $\frac{2x-1}{x-2}<1$;
12) $x^2-8x+15\le 0$; 13) $\boldsymbol{x}^2 - 8x+15>0$;
14) $x^2+x-12>0$; 15) $x^2+x-12\le 0$.

4. Мына нүктелермен берілген кесіндінің AB шамасын және $|AB|$ ұзындығын анықтаңыз:
1) $A(3)$ және $B(11)$; 2) A (5) және B (2);
3) A (–1) және B (3); 4) A (–5) және B (–3); 5) A (–1) және B (–3);
6) $A(-7)$ және B (–5).

5. Егер төмендегілер белгілі болса, онда A нүктесінің координаталарын табыңыз:
1) B (3) және $AB = 5$; 2) B (2) және $AB = -3$; 3) B (–1) және $BA = 2$; 4) B (–5) және $BA = -3$; 5) $B(0)$ және $|AB| = 2$; 6) B (2) және $|AB| = 3$;
7) $B(-1)$ және $|AB|=5$; 8) $B(-5)$ және $|AB| = 2$.

6. Координаталары мына теңсіздіктерді қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орнын сипаттаңыз:
1) $|x|<1$; 2) $|x|>2$; 3) $|x|\le 2$; 4) $|x|\ge 3$; 5) $|x-2|<3$;
6) $|x-5|\le 1$; 7) $|x-1|\ge 2$; 8) $|x-3|=1$; 9) $|x+1|<3$;
10) $|x+2|>1$; 11) $|x+5|\le 1$; 12) $|x+1|\ge 2$.

7. Мына мәліметтер бойынша C нүктесі AB кесіндісін бөлетін $\lambda=\frac{AC}{CB}$ қатынасын анықтаңыз: 1) $A(2)$; $B(6)$ және $C(4)$; 2) A (2), B (4) және $C(7)$;
3) $A(-1)$, $B(5)$ және $C(3)$; 4) $A(1)$, $B(13)$ және $C(5)$;5) $A(5)$, B (–2) және $C(-5)$.

8. Үш нүкте A (–7), B (–1) және $C(1)$ берілген. Олардың әрқайсысы қалған екеуімен шектелген кесіндіні бөлетін λ қатынасын анықтаңыз.

9. Берілген $M_1(x_1)$ және $M_2(x_2)$ нүктелерімен шектелген M_1M_2 кесіндісін $M(x)$ нүктесі бөлетін $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}$ қатынасын анықтаңыз.

10. Берілген $M_1(x_1)$ және $M_2(x_2)$ нүктелерімен шектелген M_1M_2 кесіндісін берілген қатынаста бөлетін M нүктесінің x координатасын анықтаңыз.

11. Берілген $M_1(x_1)$ және $M_2(x_2)$ нүктелерімен шектелген кесіндінің ортасының x координатасын анықтаңыз.

12. Мына жағдайлардың әрқайсысында берілген нүктелермен шектелген кесіндінің ортасының x координатасын анықтаңыз:
1) $A(3)$ және $B(5)$; 2) $C(-1)$ және $D(5)$; 3) $M_1(-1)$ және $M_2(-3)$;
4) $P_1(-5)$ және P_1 (1); 5) $Q_1(3)$ және $Q_2(-4)$.

13. Егер төмендегілер белгілі болса, онда M нүктесінің координаталарын анықтаңыз:
1) $M_1(3)$, $M_2(7)$ және $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}=2$; 2) $A(2)$, $B(-5)$ және $\lambda=\frac{AM}{MB}=3$;

3) $C(-1)$, $D(3)$ және $\lambda = \frac{CM}{MD} = \frac{1}{2}$; 4) $A(-1)$, $B(3)$ және $\lambda = \frac{AM}{MB} = -2$;

5) $A(1)$, $B(-3)$ және $\lambda = \frac{BM}{MA} = -3$; 6) $A(-2)$, $B(-1)$ және $\lambda = \frac{BM}{MA} = -\frac{1}{2}$.

14. Екі нүкте берілген: *A* (5) және *B* (–3). Анықтаңыз:
1) В нүктесіне қарағанда А нүктесіне симметриялы болатын М нүктесінің координатасын;
2) А нүктесіне қарағанда В нүктесіне симметриялы болатын *N* нүктесінің координатасын.

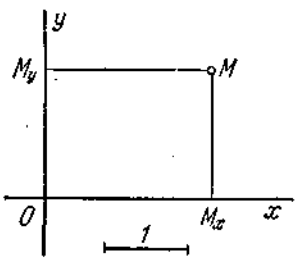
15. *A* (–2) және 5(19) нүктелерімен шектелген кесінді тең үш бөлікке бөлінген. Бөлу нүктелерінің координаталарын табыңыз.

16. Кесінді *P(*–25) және *Q(*–9) нүктелерімен тең үш бөлікке бөлінген. Кесіндінің шеткі *A* және *B* нүктелерінің координаталарын табыңыз.

1.2 Жазықтықтағы декарттық координаталар

Жазықтықтағы тік бұрышты декарттық координаталар жүйесі ұзындықты өлшеу үшін сызықтық бірлік және қандай да бір ретпен нөмірленген өзара перпендикуляр екі ось берілуімен анықталады.

Осьтердің қиылысу нүктесі координаталар бас нүктесі, ал осьтердің өздері координаталық осьтер деп аталады. Координаталық осьтердің біріншісі абсцисса осі, ал екіншісі ордината осі деп аталады.



Координаталар бас нүктесі *O* әрпімен, абсцисса осі *Ox*, ордината осі *Oy* символдарымен белгіленеді. Берілген жүйеде *M* нүктесінің координаталары деп $x = OM_x$, $y = OM_y$ сандары аталады (1–сурет), мұнда M_x және M_y нүктелері *M* нүктесінің сәйкес *Ox* және *Oy* осьтеріне проекциялары. Абсцисса осіндегі OM_x кесіндісінің шамасын OM_x, ал ордината осіндегі OM_y кесіндісінің шамасын OM_y деп белгілейді. *x* саны *M* нүктесінің абсциссасы, ал *y* саны осы нүктенің ординатасы деп аталады. *M(x;y)* символы *M* нүктесінің абсциссасы *x,* ал ординатасы *y* дегенді білдіреді. *Oy* осі бүкіл жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі, оның *Ox* осінің оң бағытында орналасқан бөлігі оң деп, ал екіншісі сол деп аталады. Дәл осы сияқты *Ox* осі жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі, оның *Oy* осінің оң бағытында орналасқан бөлігі жоғары деп, ал екіншісі төменгі деп аталады.

Екі координаталық осьтер бірігіп жазықтықты төрт ширекке бөледі, оларды келесі ереже бойынша нөмірлейді: бірінші координаталық ширек деп жоғары жарты жазықтықтың оң жақ бөлігі, екінші – жоғары жарты жазықтықтың сол жақ бөлігі, үшінші – төменгі жарты жазықтықтың сол жақ бөлігі, төртінші – төменгі жарты жазықтықтың оң жақ бөлігі аталады.

17. Нүктелерді салыңыз:

$A(2; 3)$, $B(-5; 1)$, $C(-2; -3)$, $D(0; 3)$, $E(-5; 0)$, $F(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$

18. Нүктелердің абсцисса осіне проекцияларының координаталарын табыңыз:

$A(2: -3)$, $B(3;-1)$, $C(-5;1)$, $D(-3;-2)$, $E(-5; -1)$.

19. Нүктелердің ордината осіне проекцияларының координаталарын табыңыз:

$A(-3;2)$, $B(-5; 1)$, $C(3; -2)$, $D(-1; 1)$, $E(-6; -2)$.

20. Төмендегі нүктелерге Ox осіне қарағанда симметриялы нүктелердің координаталарын табыңыз:

1) $A(2; 3)$; 2) $B(-3; 2)$; 3) $C(-1; -1)$;
4) $D(-3; -5)$; 5) $E(-4; 6)$; 6) $F(a; b)$.

21. Төмендегі нүктелерге Oy осіне қарағанда симметриялы нүктелердің координаталарын табыңыз:

1) $A(-1; 2)$; 2) $B(3; -1)$; 3) $C(-2; -2)$;
4) $D(-2; 5)$; 5) $E(3; -5)$; 6) $F(a; b)$.

22. Төмендегі нүктелерге координаталар бас нүктесіне қарағанда симметриялы нүктелердің координаталарын табыңыз:

1) $A(3; 3)$; 2) $B(2; -4)$; 3) $C(-2; 1)$;
4) $D(5; -3)$; 5) $E(-5; -4)$; 6) $F(a; b)$.

23. Төмендегі нүктелерге бірінші координаталық бұрыштың биссектрисасына қарағанда симметриялы нүктелердің координаталарын табыңыз:

1) $A2; 3)$; 2) $B(5; -2)$; 3) $C(-3; 4)$.

24. Төмендегі нүктелерге екінші координаталық бұрыштың биссектрисасына қарағанда симметриялы нүктелердің координаталарын табыңыз:

1) $A(3; 5)$; 2) $B(-4; 3)$; 3) $C(7; -2)$.

25. $M(x; y)$ нүктесі қай координаталық ширектерде орналасуы мүмкін екенін анықтаңыз, егер:

1) $xy > 0$; 2) $xy < 0$; 3) $x-y = 0$; 4) $x+y = 0$;
5) $x+y = 0$; 6) $x+y < 0$; 7) $x - y > 0$; 8) $x-y < 0$;

1.3 Полярлық координаталар

Полярлық координаталар жүйесі полюс деп аталатын қандайда бір O нүктесі, осы нүктеден шығатын полярлық ось деп аталатын OA сәулесі және ұзындықты өлшеу үшін масштаб берілуімен анықталады. Сонымен қатар полярлық жүйе берілгенде O нүктесі айналасындағы қай бұрылу оң (чертежде әдетте сағат тіліне қарсы бұрылу оң деп саналады) деп есептелетіні айтылуы қажет. Еркін *M* (берілген жүйеге қарағанда) нүктесінің полярлық координаталары деп ρ = *OM* және θ = < *AOM* сандары аталады. Мұнда θ бұрышын тригонометрияда сияқты түсіну керек. ρ саны *M* нүктесінің бірінші координатасы немесе полярлық радиус, ал θ саны екінші координата немесе полярлық бұрыш деп аталады (θ санын амплитуда деп те атайды).

M (ρ; θ) символы *M* нүктесінің полярлық координаталары ρ және θ екенін білдіреді.

θ полярлық бұрышының шексіз көп мәндері бар (олардың бір–бірінен айырмашылығының шамасы ± 2nπ, мұнда *n* – бүтін оң сан). – π < θ < + π теңсіздігін қанағаттандыратын полярлық бұрыштың мәні бас мән деп аталады.

Декарттық және полярлық координаталар жүйесін бір уақытта қарастырған кезде мынаған келісеміз: 1) бірдей масштабты қолдану; 2) полярлық бұрышты анықтағанда абсциссаның оң жарты осін ординатаның оң жарты осіне беттестіретін ең қысқа жол бағытындағы бұру оң деп есептелу (сонымен, егер декарттық жүйенің осьтері кәдімгі жағдайда болса, яғни *Ox* оң жаққа, ал *Oy* осі жоғары жаққа бағытталған, онда полярлық бұрышты есептеу де кәдімгі, яғни сағат тіліне қарсы бағыттағы бұрыштар оң деп есептелу керек).

Егер полярлық координата жүйесінің полюсі тікбұрышты декарттық координаталар жүйесінің бас нүктесімен, ал полярлық ось абсциссаның оң жарты осімен беттессе, онда еркін нүктенің полярлық координаталарынан осы нүктенің декарттық координаталарына көшу мына формула бойынша жүзеге асады:

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta.$$

Бұл жағдайда

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ tg\theta = \frac{y}{x}$$

декарттық координатадан полярлық координатаға көшу формулалары болады.

Екі полярлық координаталар жүйесін бір кезде қарастырғанда оң бұру бағыттарын және масштабты екі жүйе үшін бірдей деп есептеуге келісеміз.

26. Полярлық координаталармен берілген нүктелерді салыңыз:

$A(3;\ \frac{\pi}{2}),\ B(2;\ \pi),\ C(3;\ -\frac{\pi}{4}),\ D(4;\ 3\frac{1}{7}),\ E(5;\ 2)$ және $F(1;\ -1)$

(*D, E* және *F* нүктелері үшін салуды транспортирмен қолданып жуықтап орындаңыз).

27. Полярлық координаталар жүйесінде берілген

$M_1(3;\ \frac{\pi}{4})$, $M_2(2;-\frac{\pi}{2})$, $M_3(3;-\frac{\pi}{3})$, $M_4(1;\ 2)$ және $M_s(5;\ -1)$

нүктелеріне полярлық оське қарағанда симметриялы нүктелердің полярлық координаталарын анықтаңыз.

28. Полярлық координаталар жүйесінде берілген

$M_1(1;\ \frac{\pi}{4})$, $M_2(5;-\frac{\pi}{2})$, $M_3(2;-\frac{\pi}{3})$, $M_4(4;\ \frac{5}{6}\pi)$ және $M_s(3;\ -2)$

нүктелеріне полюске қарағанда симметриялы нүктелердің полярлық координаталарын анықтаңыз.

29. Диагональдарының қиылысу нүктесі полюспен беттесетін *ABCD* параллелограмының екі төбесі $A(3;\ -\frac{4}{9}\pi)$ және $B(5;\frac{3}{13}\pi)$ полярлық координаталар жүйесінде берілген. Осы параллелограмның қалған екі төбесін анықтаңыз.

30. Полярлық координаталар жүйесінде $A(\ 8;-\frac{2}{3}\pi)$ және $B(6;\frac{\pi}{3})$ нүктелері берілген. *A* және *B* нүктелерін қосатын кесіндінің ортасының полярлық координаталарын есептеңіз.

31. Полярлық координаталар жүйесінде $A(3;\frac{\pi}{2})$, $B(2;-\frac{\pi}{4})$, $C(1;\pi)$, $D(5;—\frac{3}{4}\pi)$, $E(3;\ 2)$ және $F(2;\ -1)$ нүктелері берілген. Полярлық осьтің оң бағыты қарама–қарсы өзгертілген. Осы нүктелердің полярлық координаталарын жаңа жүйеде анықтаңыз.

32. Полярлық координаталар жүйесінде $M_1(3;\ \frac{\pi}{3})$, $M_2(1;\ \frac{2}{3}\pi)$, $M_3(2;\ 0)$, $M_4(5;\frac{\pi}{4})$, $M_s(3;\ -\frac{2}{3}\pi)$ және $M_6(1;\ \frac{11}{12}\pi)$ нүктелері берілген. Полярлық ось жаңа жағдайда M_1 нүктесінен өтетіндей етіп бұрылған. Берілген нүктелердің жаңа (полярлық) жүйеде координаталарын анықтаңыз.

33. Полярлық координаталар жүйесінде M_1 $(12;\ \frac{4}{9}\pi)$ және M_2 $(12;\ -\frac{2}{9}\pi)$ нүктелері берілген. M_1 және M_2 нүктелерін қосатын кесіндінің ортасының полярлық координаталарын есептеңіз.

34. Полярлық координаталар жүйесінде $M_1(\rho_1;\ \theta_1)$ және M_2 $(\rho_2;\ \theta_2)$ нүктелері берілген. Олардың *d* арақашықтығын есептеңіз.

35. Полярлық координаталар жүйесінде $M_1(5;\ \frac{\pi}{4})$ және M_2 $(8;\ -\frac{\pi}{12})$ нүктелері берілген. Олардың *d* арақашықтығын есептеңіз.

36. Полярлық координаталар жүйесінде квадраттың сыбайлас екі төбесі $M_1(12;\ -\frac{\pi}{10})$ және M_2 $(3;\ \frac{\pi}{15})$ берілген. Оның ауданын табыңыз.

37. Полярлық координаталар жүйесінде квадраттың қарама–қарсы екі төбесі $P(6; -\frac{7}{12}\pi)$ және $Q(4; \frac{1}{6}\pi)$ берілген. Оның ауданын табыңыз.

38. Полярлық координаталар жүйесінде дұрыс үшбұрыштың екі төбесі $A(4; -\frac{1}{12}\pi)$ және $B(8; \frac{7}{12}\pi)$ берілген. Оның ауданын табыңыз.

39. *OAB* үшбұрышының бір төбесі полюсте, ал қалған екеуі $A(\rho_1, \theta_1)$ и $B(\rho_1, \theta_1)$ нүктелерінде орналасқан. Осы үшбұрыштың ауданын табыңыз.

40. *OAB* үшбұрышының бір төбесі *O* полюсінде, ал қалған екеуі $A\ (5; \frac{\pi}{4})$ және $B(4; \frac{\pi}{12})$ нүктелерінде орналасқан. Осы үшбұрыштың ауданын табыңыз.

41. Төбелері $A(3; \frac{1}{8}\pi)$, $B(8; \frac{7}{24}\pi)$, $C(6; \frac{5}{8}\pi)$ полярлық координаталармен берілген үшбұрыштың ауданын есептеңіз.

42. Полярлық координата жүйесінің полюсі тікбұрышты декарттық координаталар жүйесінің бас нүктесімен, ал полярлық ось абсциссаның оң жарты осімен беттескен болсын. Полярлық координаталар жүйесінде $M_1(6; \frac{\pi}{2})$, $M_2\,(5; 0)$, $M_3\,(2; \frac{\pi}{4})$, $M_4(10; \frac{\pi}{3})$, $M_5(8; \frac{2}{3}\pi)$ және $M_6(12; -\frac{\pi}{6})$ нүктелері берілген. Осы нүктелердің декарттық координаталарын анықтаңыз.

43. Полярлық координата жүйесінің полюсі тікбұрышты декарттық координаталар жүйесінің бас нүктесімен, ал полярлық ось абсциссаның оң жарты осімен беттескен болсын. Полярлық координаталар жүйесінде $M_1(0;5)$, $M_2\,(–3; 0)$, $M_3(\sqrt{3}; 1)$, $M_4(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $M_6\ (1; -\sqrt{3})$ нүктелері берілген. Осы нүктелердің декарттық координаталарын анықтаңыз.

1.4 Аналитикалық геометрияның қарапайым есептері

I. Екі нүктенің ара қашықтығы.

а) сандық осьтегі.

Бізге сандық ось берілсін. $M_1(x_1)$ және $M_2(x_2)$– осьтегі кез келген нүктелер болсын. $M_1M_2 = x_2 - x_1$ – кесіндінің шамасы. $\rho(M_1M_2) = d = |x_2 - x_1|$ – кесіндінің ұзындығы

б) Жазықтықта тікбұрышты декарттық координаталар жүйесі берілсін(ТБКЖ).

Егер жазықтықта $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ нүктелері берілсе, онда $d\ =\ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ – жазықтықтағы екі нүктенің арақашықтығының формуласы.

II. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу:

Егер $M(x;\ y)$ нүктесі $M_1(x_1,\ y_1)$ және $M_2(x_2;\ y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзу бойында жатса және M нүктесі M_1M_2 кесіндісін бөлетін қатынас $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ берілсе, онда M нүктесінің координаталары мына формуламен анықталады: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$; $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$

Егер M нүктесі M_1M_2 кесіндісінің ортасы болса, онда оның координаталары мына формуламен анықталады: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

44. Егер кесіндінің ұзындығы d және оның оське көлбеу бұрышы φ белгілі болса, онда оның u осіне проекциясын есептеңіз:

l) $d = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; 2) $d = 6$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; 3) $d = 7$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$;

4) $d = 5$, $\varphi = 0$; 5) $d = 5$, $\varphi = \pi$; 6) $d = 4$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

45. Егер координаталық осьтерге проекциялары белгілі болса, онда координаталар бас нүктесінен шығатын кесінділерді чертежде салыңыз:

1) $X = 3$, $Y = 2$; 2) $X = 2$, $Y = -5$; 3) $X = -5$, $Y = 0$;

4) $X = -2$, $Y = 3$; 5) $X = 0$, $Y = 3$; 6) $X = -5$, $Y = -1$.

46. Егер координаталық осьтерге проекциялары белгілі болса, онда бас нүктесі $M(2; -1)$ нүктесінде жататын кесінділерді чертежде салыңыз:

а) $X = 4$, $Y = 3$; б) $X = 2$, $Y = 0$; в) $X = -3$, $Y = 1$;

г) $X = -4$, $Y = -2$; д) $X = 0$, $Y = -3$; е) $X = 1$, $Y = -3$.

47. $M_1(1;\ -2)$, $M_1\ (2;\ 1)$, $M_2\ (5;\ 0)$, $M_3\ (-1;\ 4)$ және $M_4(0;\ -3)$ нүктелері берілген. Мына кесінділердің координаталық осьтерге проекцияларын табыңыз:

1) M_1M_2, 2) M_3M_2 3) M_4M_5, 4) M_5M_3.

48. M_1M_2 кесіндісінің координаталық осьтерге проекциялары $X = 5$, $Y = -4$ берілген. Кесіндінің бас нүктесі $M_1(-2;\ 3)$ белгілі болса, онда оның соңының координаталарын табыңыз.

49. AB кесіндісінің координаталық осьтерге проекциялары $X = 4$, $Y = -5$ берілген. Кесіндінің соңы $B(1;\ -3)$ нүктесінде болатыны белгілі болса, онда оның басының координаталарын табыңыз.

50. Координаталар бас нүктесінен шығатын кесінділерді олардың әрқайсысының ұзындығы d және полярлық бұрышы θ бойынша чертежде салыңыз: l) $d = 5$, $\theta = \frac{\pi}{5}$; 2) $d = 3$, $\theta = \frac{5}{6}\pi$;

3) $d = 4$, $\theta = -\frac{\pi}{3}$; 4) $d = 3$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

51. Бастары M (2;3) нүктесінде болатын кесінділерді олардың әрқайсысының ұзындығы d және полярлық бұрышы θ бойынша чертежде салыңыз:

1) $d = 2$, $\theta = -\frac{\pi}{10}$; 2) $d = 1$, $\theta = \frac{\pi}{9}$; 3) $d = 5$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$

52. Олардың әрқайсысының ұзындығы d және полярлық бұрышы θ белгілі болса, онда олардың координаталық осьтерге проекцияларын есептеңіз:

l) $d = 12$, $\theta = \frac{2}{3}\pi$; 2) $d = 6$, $\theta = -\frac{\pi}{6}$; 3) $d = 2$, е $= -\frac{\pi}{4}$.

53. Кесінділердің координаталық осьтерге проекциялары берілген:
1) $X = 3$, $Y = –4$; 2) $X =12$, $Y =5$; 3) $X = –8$, $Y = 6$. Олардың әрқайсысының ұзындығын табыңыз.

54. Кесінділердің координаталық осьтерге проекциялары берілген:
1) $X = 1$, $Y = \sqrt{3}$; 2) $X = 3\sqrt{2}$, $Y = –3\sqrt{2}$; 3) $X = – 2\sqrt{3}$, $Y = 2$.
Олардың әрқайсысының ұзындығын d және полярлық бұрышын θ есепте.

55. $M_1(2; –3)$, $M_2(1; –4)$, $M_3(–1; –7)$ және $M_4(–4; 8)$ нүктелері берілген. Мына кесінділердің ұзындығын және полярлық бұрышын есептеңіз:
1) M_1M_2, 2) M_1M_3 3) M_2M_4, 4) M_4M_3.

56. Кесіндінің d ұзындығы 5–ке тең, ал оның абсцисса осіне проекциясы 4–ке тең. Егер кесінді ордината осімен а) сүйір, б) доғал бұрыш жасайтын болса, онда осы кесіндінің ордината осіне проекциясын табыңыз.

57. MN кесіндісінің ұзындығы 13–ке тең, оның басы $M(3;–2)$ нүктесінде, ал абсцисса осіне проекциясы 12–ге тең. Егер кесінді ордината осімен а) сүйір, б) доғал бұрыш жасайтын болса, онда осы кесіндінің соңының координаталарын табыңыз.

58. MN кесіндісінің ұзындығы 17–ге тең, оның соңы N (–7; 3) нүктесінде, ал ордината осіне проекциясы 15–ке тең. Егер кесінді абсцисса осімен а) сүйір, б) доғал бұрыш жасайтын болса, онда осы кесіндінің басының координаталарын табыңыз.

59. Кесіндінің координаталар осьтеріне проекциялары $X = 1$, $Y = -\sqrt{3}$ белгілі болса, онда оның Ox осімен $\theta = -\frac{2}{3}\pi$ бұрыш жасайтын оське проекциясын табыңыз.

60. Екі нүкте $M_1(1; –5)$ және $M_2(4; –1)$ берілген. M_1M_2 кесіндісінің Ox осімен $\theta = -\frac{\pi}{6}$ бұрыш жасайтын оське проекциясын табыңыз.

61. Екі нүкте $P(–5; 2)$ және Q(3; 1) берілген. PQ кесіндісінің Ox осімен $\theta = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ бұрыш жасайтын оське проекциясын табыңыз.

62. Екі нүкте $M_1(2;–2)$ және $M_2(7;–3)$ берілген. M_1M_2 кесіндісінің $A(5;–4)$, $B(– 7; 1)$ нүктесінен өтетін және 1) A–дан B–ға; 2) B–дан A–ға бағытталған оське проекциясын табыңыз.

63. A (0; 0), B(3; –4), C(–3; 4), D(– 2; 2) және E(10; –3) нүктелері берілген. Мына нүктелердің: 1) A және B; 2) B және C; 3) A және C; 4) С және D; 5) A және D; 6) D және E арақашықтығын d табыңыз.
64. Квадраттың екі сыбайлас төбелері A(3; –7) және B(–1;4) берілген. Оның ауданын табыңыз.
65. Квадраттың екі қарама–қарсы төбелері P(3; 5) және Q(l; –3) берілген. Оның ауданын табыңыз.
66. Егер дұрыс үшбұрыштың екі төбесі A(–3; 2) және B(1; 6) берілсе, онда оның ауданын табыңыз.
67. $ABCD$ параллелограмының үш төбесі A(3; –7), B(5; –7), C(–2; 5) берілген, ал төртінші D төбесі В төбесіне қарама–қарсы. Осы параллелограмның диагоналдарының ұзындықтарын анықтаңыз.
68. Ромбтың қабырғасы $5\sqrt{10}$ –ге тең, ал оның екі қарама–қарсы төбелері P(4; 9) және Q(–2; 1). Осы ромбтың ауданын есептеңіз.
69. Ромбтың қабырғасы $5\sqrt{2}$ –ге тең, ал оның екі қарама–қарсы төбелері Р(3; –4) және Q(l; 2). Осы ромбтың биіктігінің ұзындығын есептеңіз.
70. A(3; –5), B(–2; –7) және C(18; 1) нүктелері бір түзуде жататынын дәлелдеңіз.
71. Төбелері A_1(1; 1), A_2(2; 3) және A_3(5; –1) болатын үшбұрыштың тікбұрышты болатынын дәлелдеңіз.
72. A(2; 2), B(–1; 6), C(–5; 3) және D(–2; –1) нүктелері квадраттың төбелері болатынын дәлелдеңіз.
73. Төбелері M_1(1; 1), M_2(0; 2) және M_3(2; –1) болатын үшбұрыштың ішкі бұрыштарының ішінде доғал бұрыш бар ма?
74. Төбелері M(–1; 3), N(1; 2) және P(0; 4) болатын үшбұрыштың барлық ішкі бұрыштары сүйір болатынын дәлелдеңіз.
75. A (5; 0), B(0; 1) және С(3; 3) нүктелері үшбұрыштың төбелері болса, онда оның ішкі бұрыштарын есептеңіз.
76. A(– $\sqrt{3}$; 1) B(0; 2) және С(–2$\sqrt{3}$; 2) нүктелері үшбұрыштың төбелері болса, онда оның А төбесіндегі сыртқы бұрышын есептеңіз.
77. N (2; –3) нүктесінен қашықтығы 5–ке тең болатын абсцисса осіндегі М нүктесін табыңыз.
78. N(–8; 13) нүктесінен қашықтығы 17–ге тең болатын ордината осіндегі М нүктесін табыңыз.
79. Екі нүкте M(2; 2) және N(5; –2) берілген. Абсцисса осінде MPN бұрышы тік болатындай P нүктесін табыңыз.
80. A (4; 2) нүктесі арқылы екі координаталық осьтерді жанайтын шеңбер жүргізілген. Оның C центрін және R радиусын анықтаңыз.
81. M_1(1; –2) нүктесі арқылы Ox осін жанайтын және радиусы 5–ке тең болатын шеңбер жүргізілген. Шеңбердің C центрін анықтаңыз.

82. $A(1;\ 0)$ және $B(–1;\ –2)$ нүктелері арқылы өтетін түзуге қарағанда $M_1(1;\ 2)$ нүктесіне симметриялы болатын M_2 нүктесінің координаталарын анықтаңыз.
83. Квадраттың қарама–қарсы екі төбелері $A(3;\ 0)$ және $C(–4;\ 1)$ берілген. Оның басқа екі төбелерін табыңыз.
84. Квадраттың екі сыбайлас төбелері $A(2;\ –1)$ және $B(–1;\ 3)$. берілген. Оның басқа екі төбелерін табыңыз.
85. Үшбұрыштың төбелері $M_1(–3;\ 6)$, $M_2(9;\ –10)$ және $M_3(–5;\ 4)$ берілген. Осы үшбұрышқа сырттай сызылған дөңгелектің C центрін және R радиусын анықтаңыз.
86. Біртекті стерженьнің шеткі нүктелері $A(3;\ –5)$ және $B(–1;\ 1)$ берілген. Оның ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз.
87. Біртекті стерженьнің ауырлық центрі $M(1;\ 4)$, ал оның бір шеткі нүктесі $P(–2;\ 2)$ нүктесінде орналасқан. Оның екінші Q шеткі нүктесінің координаталарын анықтаңыз.
88. Үшбұрыштың төбелері $A(1;\ –\ 3)$, В$(3;\ –\ 5)$ и $C(5;\ 7)$ берілген. Оның қабырғаларының орталарын табыңыз.
89. $A\ (3;\ –1)$ және $B(2;\ 1)$ нүктелері берілген. Анықтаңыз:
1) B нүктесіне қарағанда A нүктесіне симметриялы болатын M нүктесінің координаталарын;
2) A нүктесіне қарағанда B нүктесіне симметриялы болатын N нүктесінің координаталарын.
90. $M(1;\ –1)$, $N(–\ 1;\ 4)$ және $P(–2;\ 2)$ нүктелері үшбұрыштың қабырғаларының орталары болады. Оның төбелерін табыңыз.
91. Параллелограмның үш төбесі $A(3;\ –5)$, $B(5;\ –3)$, $C(–\ 1;\ 3)$ берілген. B төбесіне қарама–қарсы орналасқан D төбесін анықтаңыз.
92. Параллелограмның екі сыбайлас төбелері $A(–3;\ 5)$, $B(1;\ 7)$ және диагональдарының қиылысу нүктесі $M(1;\ 1)$ берілген. Оның қалған екі төбесін табыңыз.
93. $ABCD$ параллелограмының үш төбесі $A\ (2;\ 3)$, $B(4;\ –1)$ және $C(0;\ 5)$ берілген. Оның төртінші D төбесін табыңыз.
94. Үшбұрыштың төбелері $A(1;\ 4)$, $B(3;\ –9)$, $C(–5;\ 2)$ берілген. Оның B төбесінен жүргізілген медианасының ұзындығын табыңыз.
95. $A(1;\ –3)$ және $B(4;\ 3)$ нүктелерімен шектелген кесінді тең үш бөлікке бөлінген. Бөліну нүктелерінің координаталарын табыңыз.
96. Үшбұрыштың төбелері $A(2;\ –5)$, $B(1;–2)$, $C(4;\ 7)$ берілген. Оның AC қабырғасы мен B төбесінің ішкі бұрышының биссектрисасының қиылысу нүктесін табыңыз.
97. Үшбұрыштың төбелері $A(3;\ –5)$, $B(–3;\ 3)$ және $C(–1;\ –2)$ берілген. Оның A төбесінің ішкі бұрышының биссектрисасының ұзындығын табыңыз.

98. Үшбұрыштың төбелері $A(-1; -1)$, $B(3; 5)$, $C(-4; 1)$ берілген. Оның A төбесінің сыртқы бұрышының биссектрисасы мен BC қабырғасының созындысының қиылысу нүктесін табыңыз.

99. Үшбұрыштың төбелері $A(3; -5)$, $B(1; -3)$, $C(2; -2)$ берілген. Оның B төбесінің сыртқы бұрышының биссектрисасының ұзындығын табыңыз..

100. Бір түзуде жататын үш нүкте $A(1; -1)$, $B(3; 3)$ және $C(4; 5)$ берілген. Олардың әрқайсысы қалған екі нүктемен шектелген кесіндіні бөлетін λ қатынасын анықтаңыз.

101. Кесінді $P(2; 2)$ және $Q(1; 5)$ нүктелерімен тең үш бөлікке бөлінген. Кесіндінің шеткі A және B нүктелерінің координаталарын табыңыз.

102. Түзу $M_1(-12; -13)$ және $M_2(-2; -5)$ нүктелерінен өтеді. Осы түзуде абсциссасы 3 болатын нүктені табыңыз.

103. Түзу $M\ (2; -3)$ және $N(-6; 5)$ нүктелерінен өтеді. Осы түзуде ординатасы –5 болатын нүктені табыңыз.

104. Түзу $A(7; -3)$ және $B(23; -6)$ нүктелерінен өтеді. Осы түзудің абсцисса осімен қиылысу нүктесін табыңыз.

105. Түзу $A\ (5; 2)$ және $B(-4;-7)$ нүктелерінен өтеді. Осы түзудің ордината осімен қиылысу нүктесін табыңыз.

106. Төртбұрыштың төбелері $A(-3; 12)$, $B(3; -4)$, $C(5; -4)$ және $D(5; 8)$ берілген. Оның AC диагоналі BD диагоналін қандай қатынаста бөледі.

107. Төртбұрыштың төбелері $A(-2; 14)$, $B(4; -2)$, $C(6; -2)$ және $D(6; 10)$ берілген. Оның AC және BD диагональдарының қиылысу нүктесін анықтаңыз.

108. Біртекті үшбұрышты пластинканың төбелері $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2,)$ және $C(x_3; y_3)$ берілген. Оның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.

Нұсқау. Ауырлық центрі медианалардың қиылысу нүктесінде орналасады.

109. Үшбұрыш медианаларының қиылысу нүктесі M абсцисса осінде, оның екі төбесі А $(2;-3)$ және $B(-5; 1)$ нүктелері, үшінші төбесі C ордината осінде жатыр. M және C нүктелерінің координаталарын табыңыз.

110. Біртекті үшбұрышты пластинканың төбелері $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2,)$ және $C(x_3; y_3)$ берілген. Егер оның қабырғаларының орталарын қосатын болсақ, онда жаңа біртекті үшбұрышты пластинка шығады. Екі пластинканың ауырлық центрлерінің беттесетінін дәлелдеңіз.

Нұсқау. 108 есептің қорытындысын пайдаланыңыз.

111. Біртекті пластинка қабырғасы 12–ге тең квадрат тәріздес. Одан квадрат қиылып алынған. Қию сызықтары квадраттың центрінен өтеді, ал координата осьтері пластинканың қабырғалары бойымен бағытталған. Осы пластинканың ауырлық центрін табыңыз.

112. Біртекті пластинка қабырғалары a және b болатын тіктөртбұрыш тәріздес. Одан тіктөртбұрыш қиылып алынған. Қию сызықтары квадраттың центрінен өтеді, ал координата осьтері пластинканың

қабырғалары бойымен бағытталған. Осы пластинканың ауырлық центрін табыңыз.
113. Біртекті пластинка қабырғасы *2a* болатын квадрат тәріздес. Одан үшбұрыш қиылып алынған. Қию сызықтары сыбайлас екі қабырғаларының орталарын қосады, ал координата осьтері пластинканың қабырғалары бойымен бағытталған. Осы пластинканың ауырлық центрін табыңыз.
114. Мына $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ және $C(x_3;\ y_3)$ нүктелерде *m, n* және *p* массалары шоғырланған. Осы үш масса жүйесінің ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз.
115. $A(4;\ 2)$, $B(7;\ -2)$ және $C(1;\ 6)$ нүктелері біртекті проволкадан жасалған үшбұрыштың төбелері болады. Осы үшбұрыштың ауырлық центрін анықтаңыз.

1.5 Үшбұрыштың ауданы

$A\ (x_1,\ y_1)$, $B\ (x_2;\ y_2)$, $C\ (x_3,\ y_3)$ үш нүктесі қандай болса да *ABC* үшбұрышының ауданы *S* мына формуламен есептеледі:

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Егер *AB* кесіндісінен *AC* кесіндісіне ең қысқа бұрылу оң болса, онда бұл формуланың оң жағы $+S$, ал бұл бұрылу теріс болса, онда $-S$ болады.
116. Төбелері мына нүктелерде болатын үшбұрыштың ауданын есептеңіз:
1) $A(2;\ -3)$, $B(3;\ 2)$ және $C(-2;\ 5)$; 2) $M_1(-3;\ 2)$, $M_2(5;\ -2)$ және $M_3(1;\ 3)$;
3) $M(3;\ -4)$, $N(-2;\ 3)$ және $P(4;\ 5)$.
117. Үшбұрыштың төбелері $A(3;\ 6)$, $B(-1;\ 3)$ және $C(2;\ -1)$ берілген. Оның *C* төбесінен жүргізілген биіктігінің ұзындығын есептеңіз.
118. Үш төбесі $A\ (-2;\ 3)$, $B\ (4;\ -5)$ және $C(-\ 3;\ 1)$ нүктелерінде болатын параллелограмның ауданын есептеңіз.
119. Параллелограмның үш төбесі $A\ (3;\ 7)$, $B\ (2;\ -\ 3)$ және $C(-\ 1;\ 4)$ берілген. Оның *B* төбесінен *AC* қабырғасына жүргізілген биіктігінің ұзындығын есептеңіз.
120. Біртекті төртбұрышты пластинканың тізбектелген төбелері $A(2;1)$, $B(5;3)$, $C(-1;7)$ және $D(-7;\ 5)$ берілген. Оның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.
121. Біртекті бесбұрышты пластинканың тізбектелген төбелері $A\ (2;3)$, $B(0;6)$, $C(-1;5)$, $D(0;1)$ және $E(1;1)$ берілген. Оның ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.
122. Үшбұрыштың ауданы $S=3$, оның екі төбесі $A(3;1)$ және $B(1;\ -3)$, ал үшінші *C* төбесі *Oy* осінде жатыр. *C* төбесінің координаталарын табыңыз.

123. Үшбұрыштың ауданы S=4, оның екі төбесі $A(2;1)$ және $B(3; -2)$, ал үшінші C төбесі Ox осінде жатыр. C төбесінің координаталарын табыңыз.
124. Үшбұрыштың ауданы S=3, оның екі төбесі $A(3;1)$ және $B(1; -3)$, ал үшбұрыштың ауырлық центрі Ox осінде жатыр. Үшінші C төбесінің координаталарын табыңыз.
125. Параллелограмның ауданы S=12 кв. бірл., оның екі төбесі $A(-1;3)$ және $B(-2;4)$. Егер оның диагональдарының қиылысу нүктесі абсцисса осінде жатса, онда осы параллелограмның қалған екі төбесін табыңыз.
126. Параллелограмның ауданы S=17 кв. бірл., оның екі төбесі $A(2;1)$ және $B(5; -3)$. Егер оның диагональдарының қиылысу нүктесі ордината осінде жатса, онда осы параллелограмның қалған екі төбесін табыңыз.

1.6 Координаталарды түрлендіру

Осьтерді параллель жылжыту арқылы тікбұрышты декарттық координаталарды түрлендіру формулалары мына түрде анықталады:

$$x = x' + a,\ y = y' + b.$$

Мұнда x, y жазықтықтағы еркін M нүктесінің ескі осьтерге қарағандағы координаталары, ал x', y' – осы нүктенің жаңа осьтерге қарағандағы координаталары, a, b – ескі осьтерге қарағандағы жаңа O' бас нүктенің координаталары (сонымен қатар a абсцисса осі бағытымен жылжыту шамасы, b – ордината осі бағытымен жылжыту шамасы дейді).

Осьтерді α бұрышына бұрғанда (тригонометриядағы сияқты түсініп) тікбұрышты декарттық координаталарды түрлендіру формулалары мына түрде анықталады:

$$x = x' \cos\alpha - y \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha - y' \cos\alpha.$$

Мұнда x, y жазықтықтағы еркін M нүктесінің ескі осьтерге қарағандағы координаталары, ал x', y' –осы нүктенің жаңа осьтерге қарағандағы координаталары. Мына формулалар

$$x = x' \cos\alpha - y \sin\alpha + a,$$
$$y = x' \sin\alpha + y \cos\alpha + \mathrm{b}$$

осьтер жүйесін Ox бағытында a шамаға, Oy бағытында b шамаға параллель жылжытып және сонымен қатар осьтерді α бұрышқа бұрғанда координаталарды түрлендірулерді анықтайды. Көрсетілген барлық формулалар масштабты өзгертпегендегі координаталарды түрлендірулерге сай келеді. Төменде келтірілген есептерде де масштаб өзгермейді деп есептеледі.
127. Егер координаталар бас нүктесі (осьтердің бағытын өзгертпей) мына нүктелерге көшірілсе, онда координаталарды түрлендіру формулаларын жазыңыз: 1) $A(3;4)$; 2) $B(-2;1)$; 3) $C(-3;5)$.

128. Координаталар бас нүктесі (осьтердің бағытын өзгертпей) мына нүктеге O' (3;–4) көшірілген. $A(1,3)$, $B(-3;0)$ және $C(-1;4)$ нүктелерінің координаталары жаңа жүйеде анықталған. Осы нүктелердің ескі жүйедегі координаталарын есептеңіз.

129. $A(2;1)$, $B(-1;3)$ және $C(-2;5)$ нүктелері берілген. Егер координаталар бас нүктесі (осьтердің бағытын өзгертпей) 1) A нүктеге; 2) B нүктеге; 3) C нүктеге көшірілсе, онда олардың жаңа жүйедегі координаталарын табыңыз.

130. Егер координаталарды түрлендіру формулалары мына теңдіктермен берілсе: 1) $x = x' + 3$, $y = y' + 5$; 2) $x = x' - 2$, $y = y' + 1$;
3) $x = x'$, $y = y' - 1$; 4) $x = x' - 5$, $y = y'$; онда жаңа жүйенің O' бас нүктесінің ескі жүйедегі координаталарын анықтаңыз.

131. Егер координата осьтері мына бұрыштардың біріне бұрылса:
1) 60°; 2) –45°; 3) 90°; 4) –90°; 5) 180° онда координаталарды түрлендіру формулаларын жазыңыз.

132. Координата осьтері $\alpha = 60°$ бұрышына бұрылған. $A(2\sqrt{3}; -4)$, $B(\sqrt{3};0)$ және $C(0;-2\sqrt{3})$ нүктелерінің координаталары жаңа жүйеде анықталған. Осы нүктелердің ескі координаталар жүйесіндегі координаталарын есептеңіз.

133. $M(3;1)$, $N(-1;5)$ және $P(-3;-1)$ нүктелері берілген. Егер координата осьтері: 1) –45°; 2) 90°; 3) –90°; 4) 180° бұрышына бұрылған болса, онда олардың жаңа жүйедегі координаталарын табыңыз.

134. Егер координаталарды түрлендіру формулалары мына теңдіктермен берілсе: 1) $x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$; 2) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'$, $y = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$

Онда осьтер бұрылған α бұрышты анықтаңыз.

135. Егер $A(3; -4)$ нүктесі жаңа абсцисса осінде, ал $B(2;3)$ нүктесі жаңа ордината осінде жатса, сонымен қатар ескі және жаңа координаталар жүйелерінің бағыттары бірдей болса, онда жаңа координалар жүйесінің O' бас нүктесінің координаларын анықтаңыз.

136. Егер $M_1(1;-3)$ нүктесі жаңа абсцисса осінде, ал $M_2(1;-7)$ нүктесі жаңа ордината осінде жатса, сонымен қатар ескі және жаңа координаталар жүйелерінің бағыттары бірдей болса, онда координаталарды түрлендіру формулаларын жазыңыз.

137. Екі жүйенің Ox, Oy және Ox', Oy' координата осьтерінің бас нүктесі O ортақ және олардың бірі екіншісіне бір бұрышқа бұрғаннан түрленеді. $A(3;-4)$ нүктесінің координаталары оның біріншісіне қарағанда анықталған. Ox' осінің оң бағыты OA кесіндісімен анықталатыны белгілі болса, онда координаталарды түрлендіру формулаларын қорытып шығарыңыз.

138. Координаталар бас нүктесі $O'(-1;2)$ нүктесіне көшірілген, ал координата осьтері $\alpha = \text{arctg}\frac{5}{12}$ бұрышына бұрылған. M_1 (3;2), $M_2(2;-3)$ және $M_3(13;-13)$ нүктелерінің координаталары жаңа жүйеде анықталған. Осы нүктелердің ескі координаталар жүйесіндегі координаталарын есептеңіз.

139. A (5;5), $B(2;-1)$ және $C(12;-6)$ үш нүктесі берілген. Егер координаталар бас нүктесі B нүктесіне көшірілген, ал координата осьтері $\alpha = \text{arctg}\frac{3}{4}$ бұрышына бұрылған болса, онда осы нүктелердің жаңа жүйедегі координаталарын табыңыз.

140. Егер координаталарды түрлендіру формулалары мына теңдіктермен берілсе: 1) $x = y' + 3$, $y = x' - 2$; 2) $x = -x' - 1$, $y = -y' + 3$;

3) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 5$ $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' - 3$,

онда жаңа бас нүктенің ескі координаталарын және осьтер бұрылған α бұрышты анықтаңыз.

141. $M_1(9;-3)$ және $M_2(-6;5)$ екі нүктесі берілген. Координаталар бас нүктесі M_1 нүктесіне көшірілген, ал координата осьтері жаңа абсцисса осінің оң бағыты M_1M_2 кесіндісінің бағытымен беттесетіндей етіп бұрылған. Координаталарды түрлендіру формулаларын қорытып шығарыңыз.

142. Полярлық координаталар жүйесінің полярлық осі тікбұрышты декарттық жүйенің абсцисса осіне параллель және онымен бірдей бағытталған. O(1;2) полюстің тікбұрышты декарттық координаталары және $M_1(7;\frac{\pi}{2})$, $M_2(3;0)$, $M_3(5;-\frac{\pi}{2})$, $M_4(2;\frac{2}{3}\pi)$ және $M_5(2;-\frac{\pi}{2})$ нүктелерінің полярлық координаталары берілген. Осы нүктелердің тікбұрышты декарттық жүйедегі координаталарын анықтаңыз.

143. Полярлық жүйенің полюсі тікбұрышты декарттық жүйенің бас нүктесімен беттеседі, ал полярлық ось бірінші координаталық бұрыштың биссектрисасы бойымен бағытталған. $M_1(5;\frac{\pi}{4})$, $M_2(3;-\frac{\pi}{2})$, $M_3(1;\frac{3}{2}\pi)$, $M_4(6;\frac{3}{4}\pi)$ және $M_5(2;-\frac{\pi}{12})$ нүктелерінің полярлық координаталары берілген. Осы нүктелердің тікбұрышты декарттық жүйедегі координаталарын анықтаңыз.

144. Полярлық координаталар жүйесінің полярлық осі тікбұрышты декарттық жүйенің абсцисса осіне параллель және онымен бірдей бағытталған. O(3;2) полюстің және $M_1(5;2)$, $M_2(3;1)$, $M_3(3;5)$, $M_4(3+\sqrt{2};2-\sqrt{2})$ және $M_5(3+\sqrt{3};3)$ нүктелерінің тікбұрышты декарттық координаталары берілген. Осы нүктелердің полярлық координаталарын анықтаңыз.

145. Полярлық жүйенің полюсі тікбұрышты декарттық жүйенің бас нүктесімен беттеседі, ал полярлық ось бірінші координаталық бұрыштың биссектрисасы бойымен бағытталған. $M_1(–1;1)$, $M_2(\sqrt{2};–\sqrt{2}$ $M_3(1;\sqrt{3})$, $M_4(–\sqrt{3};1)$ және $M_5(2\sqrt{3};–2)$ нүктелерінің тікбұрышты декарттық координаталары берілген. Осы нүктелердің полярлық координаталарын анықтаңыз.

2 Жазықтықтағы сызықтың теңдеуі

2.1 Екі айнымалы функция

Егер жазықтықтың (немесе жазықтықтың бөлігінің) әрбір М нүктесіне кейбір *u* саны сәйкестендірілетін ереже көрсетілген болса, онда жазықтықта (немесе жазықтықтың бөлігінде) «нүктенің функциясы берілді»; функцияның берілуін символмен $u = f(M)$ түріндегі теңдікпен өрнектейді. *M* нүктесіне сәйкестендірілетін *u* саны функцияның *M* нүктесіндегі мәні деп аталады. Мысалы, егер А – жазықтықтың бекітілген нүктесі, *M* – еркін нүкте болса, онда А–дан *M*–ге дейінгі арақашықтық М нүктесінің функциясы. Бұл жағдайда $f(M) = AM$.

Кейбір $u = f(M)$ функциясы берілген болсын және сонымен қатар координаталар жүйесі енгізілсін. Сонда *M* еркін нүктесі *x,y* координаталарымен анықталады. Берілген функцияның *M* нүктесіндегі мәні де соған сәйкес *x,y* координаталарымен анықталады немесе $u = f(M)$ екі *x* және *y* айнымалы функция дейді. Екі *x,y* айнымалы функция $f(x, y)$ символымен белгіленеді; егер $f(M) = f(x, y)$ болса, онда $u = f(x, y)$ формуласы берілген функцияның таңдалған координаталар жүйесіндегі өрнегі деп аталады. Өткен мысалда $f(M) = AM$; егер басы *A* нүктесінде болатын тікбұрышты декарттық координаталар жүйесін енгізсек, онда осы функцияның өрнегін аламыз: $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

146. Арақашықтығы *a* болатын *P* және *Q* екі нүкте және $f(M) = d_1^2 - d_2^2$ функциясы берілген, мұнда $d_1 = MP$ және $d_2 = MQ$. Егер координаталар басы ретінде *P* нүктесі алынып, ал *Ox* осі *PQ* кесіндісі бойынша бағытталса, онда осы функцияның өрнегін анықтаңыз.

147. 146 есебінің шартында $f(M)$ функциясының өрнегін анықтаңыз (тікелей және 146 есептің нәтижесін пайдаланып координаталарды түрлендіру көмегімен), егер:

1) координаталар басы ретінде *PQ* кесіндісінің ортасы таңдалған, ал *Ox* осі *PQ* кесіндісі бойынша бағытталған;

2) координаталар басы ретінде *P* нүктесі таңдалған, ал *Ox* осі *QP* кесіндісі бойынша бағытталған.

148. Қабырғасы *a* болатын квадрат және $f(M)=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$ функциясы берілген, мұнда $d_1=MA$, $d_2=MB$, $d_3=MC$, $d_4=MD$. Егер координаталар осьтері ретінде квадраттың диагональдары (*Ox* осі *AC* кесіндісі, *Oy* осі *BD* кесіндісі бойынша) алынса, онда осы функцияның өрнегін анықтаңыз.

149. 148 есептің шартында $f(M)$ өрнегін анықтаңыз (тікелей және 148 есептің нәтижесін пайдаланып координаталарды түрлендіру көмегімен), егер координаталар басы ретінде *A* нүктесі таңдалған, ал координаталар осьтері оның қабырғалары бойынша (*Ox* осі *AB* кесіндісі, *Oy* осі *AD* кесіндісі бойынша) бағытталған.

150. $f(x,y)=x^2+y^2-6x+8y$ функциясы берілген. Егер координаталар басы (осьтерінің бағыттары өзгермей) $O'(3;-4)$ нүктесіне көшірілген болса, онда жаңа координаталар жүйесінде осы функцияның өрнегін анықтаңыз.

151. $f(x,y)=x^2-y^2-16$ функциясы берілген. Егер координаталар осьтері $45°$ бұрышқа бұрылған болса, онда жаңа координаталар жүйесінде осы функцияның өрнегін анықтаңыз.

152. $f(x,y)=x^2+y^2$ функциясы берілген. Егер координаталар осьтері кейбір α бұрышқа бұрылған болса, онда жаңа координаталар жүйесінде осы функцияның өрнегін анықтаңыз.

153. Ол нүктеге координаталар басын көшіргенде $f(x,y)=x^2-2xy+y^2-6x+3$ функциясы түрлендіргеннен соң жаңа айнымалыларға қарағанда бірінші дәрежелі мүшелері болмайтындай нүктені табыңыз.

154. Ол нүктеге координаталар басын көшіргенде $f(x,y)=x^2-4xy+4y^2+2x+y-7$ функциясы түрлендіргеннен соң жаңа айнымалыларға қарағанда бірінші дәрежелі мүшелері болмайтындай нүктені табыңыз.

155. $f(x,y)=x^2-2xy+y^2-6x+3$ функциясының өрнегі түрлендіргеннен соң жаңа айнымалылардың көбейтіндісі бар мүшесі болмауы үшін координаталар осьтерін қандай бұрышқа бұру керек?

156. $f(x,y)=3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2$ функциясының өрнегі түрлендіргеннен соң жаңа айнымалылардың көбейтіндісі бар мүшесі болмауы үшін координаталар осьтерін қандай бұрышқа бұру керек?

2.2 Сызықтың теңдеуі ұғымы.
Сызықты теңдеу көмегімен беру

Егер $F(x, y) = 0$ түріндегі теңдік *x, y* сандар жұбының кейбіреулері үшін ақиқат болса, онда ол екі айнымалысы бар теңдеу деп аталады. Егер бұл сандарды теңдеудегі *x* және *y* айнымалыларының орнына қойғанда оның сол бөлігі нөлге айналса, онда $x = x_0$, $y=y_0$ екі саны кейбір $F(x, y) = 0$ түріндегі теңдеуді қанағаттандырады дейді.

Сызықта жататын әрбір нүктенің координаталары қанағаттандыратын, ал сызықта жатпайтын әрбір нүктенің координаталары қанағаттандырмайтын екі айнымалы теңдеу берілген сызықтың теңдеуі (таңдалған координаталар жүйесінде) деп аталады.

Енді біз «$F(x, y) = 0$ сызығының теңдеуі берілді» деудің орнына қысқаша $F(x, y) = 0$ сызығы берілді дейміз.

Егер $F(x, y) = 0$ және $\Phi(x, y) = Q$ екі сызықтың теңдеулері берілсе, онда

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ \Phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

жүйесінің шешімдері олардың барлық қиылысу нүктелерінің координаталарын береді. Дәлірек айтқанда осы жүйенің шешімі болатын әрбір сандар жұбы бір қиылысу нүктесін анықтайды.

*) Координаталар жүйесі аталмаған жағдайларда ол тікбұрышты декарттық деп есептеледі.

157. $M_1(2;-2)$, $M_2(2;2)$, $M_3(2;-1)$, $M_4(3;-3)$, $M_5(5;-5)$, $M_6(3;-2)$ нүктелері берілген. Берілген нүктелердің қайсысы $x+y=0$ теңдеуімен анықталатын сызықта жатады және қайсысы жатпайтынын анықтаңыз. Бұл теңдеумен қандай сызық анықталған? (Оны чертежде кескіндеңіз).

158. $x^2+y^2=25$ теңдеуімен анықталған сызықта абсциссалары мына сандарға:
а) 0, б) – 3, в) 5, г) 7 тең және осы сызықта ординаталары мына сандарға:
д) 3, е) – 5, ж) – 8 тең болатын нүктелерді табыңыз.Бұл теңдеумен қандай сызық анықталған? (Оны чертежде кескіндеңіз).

159. Мына теңдеулермен қандай сызықтар анықталатынын тағайындаңыз (оларды чертежде кескіндеңіз):
1) $x-y=0$; 2) $x+y=0$; 3) $x-2=0$; 4) $x+3=0$; 5) $y-5=0$; 6) $y+2=0$;
7) $x=0$; 8) $y=0$; 9) $x^2-xy=0$; 10) $xy+y^2=0$; 11) $x^2-y^2=0$; 12) $xy=0$;
13) $y^2-9=0$; 4) $xy^2-8xy+15=0$; 15) $y^2+5y+4=0$;
16) $x^2y-7xy+10y=0$; 17) $y=|x|$; 18) $x=|y|$; 19) $y+|x|=0$;
20) $x+|y|=0$; 21) $y=|x-1|$; 22) $y=|x+2|$; 23) $x^2+y^2=16$;
24) $(x-2)^2+(y-1)^2=16$; 5) $(x+5)^2+(y-1)^2=9$; 26) $(x-1)^2+y^2=4$;
27) $x^2+(y+3)^2=1$; 28) $(x-3)^2+y^2=0$; 29) $x^2+2y^2=0$;
30) $2x^2+3y^2+5=0$ 31) $(x-2)^2+(y+3)^2+1=0$.

160. Сызықтар берілген:
1) $x+y=0$; 2) $x-y=0$; 3) $x^2+y^2-36=0$;
4) $x^2+y^2-2x==0$; 5) $x^2+y^2+4x-6y-1=0$.
Олардың қайсысы бас нүктеден өтетінін анықтаңыз.

161. Сызықтар берілген:

1) $x^2+y^2=49$; 2) $(x–3)^2+(y+4)^2=5$; 3) $(x+6)^2+(y–3)^2=25$;
4) $(x+5)^2+(y–4)^2=9$; 5) $x^2+y^2–12x+16y=0$; 6) $x^2+y^2–2x+8y+7=0$;
7) $x^2+y^2–6x+4y+12=0$.
Олардың: а) Ox осімен; б) Oy осімен қиылысу нүктелерін табыңыз.

162. Екі сызықтың қиылысу нүктелерін табыңыз:

1) $x^2+y^2=8,\ x–y=0$;
2) $x^2+y^2–16x+4y+18=0,\ x+y=0$;
3) $x^2+y^2–2x+4y–3=0,\ x^2+y^2=25$;
4) $x^2+y^2–8x+10y+40=0,\ x^2+y^2=4$.

163. Полярлық координаталар жүйесінде нүктелер берілген:

$M_1(1;\frac{\pi}{3})$, $M_2(2;0)$, $M_3(2;\frac{\pi}{4})$, $M_4(\sqrt{3};\frac{\pi}{6})$, $M_5(1;\frac{2}{3}\pi)$.

Осы нүктелердің қайсылары полярлық координаталар арқылы $\rho = 2cos\theta$ теңдеуімен берілген сызықта жатады және қайсылары жатпайды? Бұл теңдеумен қандай сызық анықталған? (Оны чертежде кескіндеңіз).

164. $\rho = \frac{3}{\cos\theta}$ теңдеуімен анықталған сызықта полярлық бұрыштары мына сандарға: а) $\frac{\pi}{3}$,б) $-\frac{\pi}{3}$, в) 0, г) $\frac{\pi}{6}$ тең болатын нүктелерді табыңыз.Бұл теңдеумен қандай сызық анықталған? (Оны чертежде кескіндеңіз).

165.$\rho = \frac{1}{\sin\theta}$ теңдеуімен анықталған сызықта полярлық радиустары мына сандарға: а) 1, б) 2, в) $\sqrt{2}$ тең болатын нүктелерді табыңыз. Бұл теңдеумен қандай сызық анықталған? (Оны чертежде кескіндеңіз).

166. Мына теңдеулермен полярлық координаталарда қандай сызықтар анықталатынын тағайындаңыз (Оны чертежде кескіндеңіз):

1) $\rho = 5$; 2) $\theta = \frac{\pi}{3}$; 3) $\theta = \frac{\pi}{4}$; 4) $\rho\cos\theta = 2$; 5) $\rho\sin\theta = 1$;

6) $\rho = 6\cos\theta$; 7) $\rho = 10\sin\theta$; 8) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ 9) $\sin\rho = \frac{1}{2}$.

167. Чертежде мына Архимед спиральдарын салыңыз:

1) $\rho = 5$, 2) $\rho = 5\theta$; 3) $\rho = \frac{\theta}{\pi}$; 4) $p = –1$.

168. Чертежде мына гиперболалық спиральдарды салыңыз:

1) $\rho = \frac{1}{\theta}$; 2) $\rho = \frac{5}{\theta}$; 3) $\rho = \frac{\pi}{\theta}$; 4) $\rho = -\frac{\pi}{\theta}$.

169. Чертежде мына логарифмдік спиральдарды салыңыз: $\rho = 2^{\theta}$, $\rho = (\frac{1}{2})^{\theta}$.

170. Полюстен шығатын және полярлық оське $\theta = \frac{\pi}{6}$ бұрышпен көлбейтін сәулені $\rho = 3\theta$ Архимед спиралі қиятын кесінділердің ұзындықтарын анықтаңыз. Чертежін сызыңыз.

171. $\rho = \frac{5}{\pi}\theta$ Архимед спиралінде полярлық радиусы 47–ге тең C нүктесі алынған. C нүктесінің полярлық радиусын бұл спираль қанша бөлікке бөлетінін анықтаңыз. Чертежін сызыңыз.

172. $\rho = \frac{6}{\pi}$ гиперболалық спиральда полярлық радиусы 12–ге тең P нүктесін табыңыз. Чертежін сызыңыз.

173. $\rho = 3^{\theta}$ логарифмдік спиральда полярлық радиусы 81–ге тең Q нүктесін табыңыз. Чертежін сызыңыз.

2.3 Берілген сызықтың теңдеуін құру

Өткен параграфтың есептерінде сызық берілген теңдеуі көмегімен анықталды. Енді біз оған кері есептерді қарастырамыз: олардың әрқайсысында сызық геометриялық түрде анықталады, ал оның теңдеуін табу қажет болады.

1–мысал. Тікбұрышты декарттық координаталар жүйесінде берілген екі нүктеге $A_1(-a;\, 0)$ және $A_2(a;\, 0)$ дейінгі арақашықтықтарының квадраттарының қосындысы тұрақты $4a^2$ болатын нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз.

Шешуі. Сызықтың кез келген нүктесін M әрпімен, ал осы нүктенің координаталарын x және y әріптерімен белгілейміз. M нүктесі сызықта кез келген орында тұратындықтан x және y айнымалы шамалар болады, оларды ағымдағы координаталар деп атайды.

Сызықтың геометриялық қасиетін символмен жазамыз:

$$(MA_1)^2 + (MA_2)^2 = 4a^2 \qquad (1)$$

Бұл қатынаста M нүктесі қозғалғанда MA_1 және MA_2 кесінділерінің ұзындықтары өзгеруі мүмкін. Оларды M нүктесінің ағымдағы координаталарымен өрнектейміз:

$$MA_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2},\ \ MA_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}\,.$$

Алынған өрнектерді (1) теңдікке қойып M нүктесінің x және y координаталарын байланыстыратын теңдеуді аламыз:

$$(x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 = 4a^2. \qquad (2)$$

Осы берілген сызықтың теңдеуі болады.

Шынында да осы сызықта жататын әрбір M нүктесі үшін (1) шарт орындалады, ендеше M нүктесінің координаталары (2) теңдеуді қанағаттандырады, ал осы сызықта жатпайтын әрбір M нүктесі үшін (1) шарт орындалмайды, ендеше M нүктесінің координаталары (2) теңдеуді қанағаттандырмайды.

Сонымен есеп шешілді. Бірақ (2) теңдеуді ықшамдауға болады, жақшаларды ашып және ұқсас мүшелерді біріктіріп берілген сызықтың теңдеуін мына түрде аламыз: $x^2 + y^2 = a^2$

Бұдан берілген сызық центрі координаталар басында орналасқан және радиусы a болатын шеңбер болатынын түсінеміз.

2–мысал. Центрі $C(\rho_0;\theta_0)$ нүктесінде, радиусы r болатын шеңбердің теңдеуін полярлық координаталар жүйесінде құрыңыз.

Шешуі. Шеңбердің кез келген нүктесін M деп, ал оның полярлық координаталарын ρ және θ әріптерімен белгілейміз. M нүктесі шеңберде кез келген орында болатындықтан, онда ρ және θ айнымалы шамалар болады. Декарттық жүйедегі сияқты оларды ағымдағы координаталар деп атайды.

Шеңбердің барлық нүктелері центрден r қашықтықта болады, осы шартты символмен жазамыз: $CM = r$; CM шамасын M нүктесінің ағымдағы координаталары арқылы өрнектейміз (косинус теоремасын пайдаланамыз: $CM = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0\rho\cos(\theta - \theta_0)}$)

Алынған өрнекті (1) теңдікке қойып M нүктесінің ρ және θ координаталарын байланыстыратын теңдеуді табамыз:

$\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0\rho\cos(\theta - \theta_0)} = r$

Осы берілген шеңбердің теңдеуі болады.

Шынында да осы шеңберде жататын әрбір M нүктесі үшін (1) шарт орындалады, ендеше M нүктесінің координаталары (2) теңдеуді қанағаттандырады, ал осы шеңберде жатпайтын әрбір M нүктесі үшін (1) шарт орындалмайды, ендеше M нүктесінің координаталары (2) теңдеуді қанағаттандырмайды.

Сонымен есеп шешілді. Алынған теңдеуді ықшамдап және радикалдан құтыламыз: $\rho^2 - 2\rho_0\rho\cos(\theta - \theta_0) = r^2 - \rho_0^2$

174. Координаталық осьтерден бірдей қашықтықта орналасқан нүктелердің геометриялық орнын теңдеу түрінде жазыңыз.

175. Oy осінен қашықтықта a орналасқан нүктелердің геометриялық орнын теңдеу түрінде жазыңыз.

176. Ox осінен қашықтықта b орналасқан нүктелердің геометриялық орнын теңдеу түрінде жазыңыз.

177. P (6;–8) нүктеден абцисса осімен қиылысатындай әртүрлі сәулелер жүргізілген. Олардың орталарының геометриялық орнын теңдеу түрінде жазыңыз.

178. C(10;–3) нүктеден ордината осімен қиылысатындай әртүрлі сәулелер жүргізілген. Олардың орталарының геометриялық орнын теңдеу түрінде жазыңыз.

179. Әр қозғалу сәтінде мына нүктелерден қашықтықтары бірдей болатын нүктелердің траекториясының теңдеуін жазыңыз:

1) $A(3;2)$ және $B(2;3)$;   2) $A(5;-1)$ және $B(1;-5)$;

3) $A(5;-2)$ және $B(-3;-2)$;   4) $A(3;-1)$ және $B(3;5)$.

180. $A(-a;0)$ және $B(a;0)$ нүктелеріне дейінгі қашықтықтарының квадраттарының айырымы c–ға тең болатын нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз.

181. Центрі координаталар бас нүктесінде жататын радиусы r болатын шеңбердің теңдеуін құрыңыз.

182. Центрі $C(\alpha;\beta)$ болатын және радиусы r–ге тең шеңбердің теңдеуін құрыңыз.

183. Шеңбердің теңдеуі $x^2+y^2=25$ берілген. Оның ұзындығы 8 болатын хордаларының орталарының геометриялық орнының теңдеуін құрыңыз.

184. $A(-3;0)$ және $B(3;0)$ нүктелеріне дейінгі қашықтықтарының квадраттарының қосындысы 50–ге тең болатын нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз.

185. Квадраттың төбелері $A(a;a)$, $B(-a;a)$, $C(-a;-a)$ және $D(a;-a)$. Осы квадраттың қабырғаларына дейінгі қашықтықтарының квадраттарының қосындысы $6a^2$ болатын нүктелердің геометриялық орнының теңдеуін құрыңыз.

186. $(x^2-8)^2+y^2=64$ шеңберінің әртүрлі хордалары координаталар бас нүктесі арқылы жүргізілген. Осы хордалардың орталарының геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз.

187. $F_1(-3;0)$ және $F_2(3;0)$ екі нүктеден қашықтықтарының қосындысы тұрақты шама 10–ға тең болатын нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз.

188. $F_1(-5;0)$ және $F_2(5;0)$ екі нүктеден қашықтықтарының айырмасы тұрақты шама 6–ға тең болатын нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз.

189. $F(3;0)$ нүктеден қашықтығы $x+3=0$ түзуіне дейінгі қашықтыққа тең болатын нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз.

190. $F_1(-c;0)$ және $F_2(c;0)$ екі нүктеден қашықтықтарының қосындысы тұрақты шама $2a$–ға тең болатын нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз. Бұл геометриялық орын эллипс деп аталады, F_1 және F_2 – нүктелері эллипстің фокустары.

Эллипстің теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ болатынын дәлелдеңіз, мұнда $b^2=a^2-c^2$.

191. $F_1(-c;0)$ және $F_2(c;0)$ екі нүктеден қашықтықтарының айырмасы тұрақты шама $2a$–ға тең болатын нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз. Бұл геометриялық орын гипербола деп аталады, F_1 және F_2 – нүктелері гиперболаның фокустары. Гиперболаның теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ болатынын дәлелдеңіз, мұнда $b^2 = c^2 - a^2$.

192. $F(\frac{p}{2};0)$ нүктеден қашықтығы $x = -\frac{p}{2}$ түзуіне дейінгі қашықтыққа тең болатын нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз. Бұл геометриялық орын парабола деп аталады, F – нүктесі параболаның фокусы, бұл түзу – оның директрисасы.

193. Берілген $F(-4;0)$ нүктеден қашықтығының 4x+25 = 0 түзуіне дейінгі қашықтыққа қатынасы $\frac{4}{5}$–ке тең болатын нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз.

194. Берілген $F(-5;0)$ нүктеден қашықтығының 5x+16=0 түзуіне дейінгі қашықтыққа қатынасы $\frac{5}{4}$–ке тең болатын нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз.

195. Берілген екі шеңберден $(x+3)^2+y^2=1$, $(x-3)^2+y^2=81$ ең қысқа қашықтықтары тең болатын нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз.

196. Берілген екі шеңберден $(x+10)^2+y^2=289$, $(x-10)^2+y^2=1$ ең қысқа қашықтықтары тең болатын нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз.

197. Берілген шеңберден $(x-5)^2+y^2=9$ және берілген түзуден x+2=0 ең қысқа қашықтықтары тең болатын нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз.

198. Түзу полярлық оське перпендикуляр және одан 3–ке тең кесінді қияды. Осы түзудің полярлық координаталарда теңдеуін құрыңыз.

199. Сәуле полюстен шығады және полярлық оське $\frac{\pi}{3}$ бұрышпен көлбейді. Осы сәуленің полярлық координаталарда теңдеуін құрыңыз.

200. Түзу полюс арқылы өтеді және полярлық оське 45° бұрышпен көлбейді. Осы түзудің полярлық координаталарда теңдеуін құрыңыз.

201. Полярлық осьтен қашықтығы 5–ке тең нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін полярлық координаталарда құрыңыз.

202. Радиусы $R = 5$ болатын шеңбер полюс арқылы өтеді және оның центрі полярлық осьте жатады. Осы шеңбердің полярлық координаталар жүйесінде теңдеуін құрыңыз.

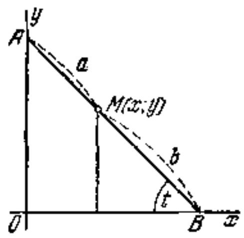
203. Радиусы $R = 3$ болатын шеңбер полярлық осьті полюсте жанайды. Осы шеңбердің полярлық координаталар жүйесінде теңдеуін құрыңыз.

2.4 Сызықтың параметрлік теңдеуі

Кейбір *M* нүктесінің координаталарын *x* және *y* әріптерімен белгілейміз; аргументі *t* болатын екі функцияны қарастырамыз:

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t)). \end{array}\right\} \qquad (1)$$

t өзгергенде *x* және *y* шамалары өзгереді, ендеше *M* нүктесі орын ауыстырады. (1) теңдікті *M* нүктесінің траекториясы болатын сызықтың параметрлік теңдеуі деп атайды; *t* аргументі параметр деп аталады. Егер (1) теңдікте *t* параметрінен құтылсақ, онда *M* нүктесінің траекториясын мына түрде аламыз: $F(x,y)=0$.



204. *AB* стержені өзінің шеттері *A*–дан *B*–ға координаталық осьтер бойынша сырғиды. *M* нүктесі стерженьді екі бөлікке *AM* = *a* және *BM* = *b* бөледі. *t* = <*OBA* (8–сурет) бұрышын параметр ретінде алып *M* нүктесінің траекториясының параметрлік теңдеуін құрыңыз. Содан соң *t* параметрінен құтыл және *M* нүктесінің траекториясын *F*(*x*, *y*) = 0 түрінде табыңыз.

205. *M* нүктесінің траекториясы теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (190–есепті қара) болатын эллипс. *OM* кесіндісінің *Ox* оське көлбеу бұрышын *t* параметрі ретінде алып *M* нүктесінің траекториясының параметрлік теңдеуін құрыңыз.

206. *M* нүктесінің траекториясы теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (191–есепті қара) болатын гипербола. *OM* кесіндісінің *Ox* оське көлбеу бұрышын *t* параметрі ретінде алып *M* нүктесінің траекториясының параметрлік теңдеуін құрыңыз.

207. *M* нүктесінің траекториясы теңдеуі $y^2=2px$ (192–есепті қара) болатын парабола. Төмендегілерді *t* параметрі ретінде алып *M* нүктесінің траекториясының параметрлік теңдеуін құрыңыз:

1) *M* нүктесінің ординатасын;

2) *OM* кесіндісінің *Ox* оське көлбеу бұрышын;

3) *FM* кесіндісінің *Ox* оське көлбеу бұрышын, мұнда *F* нүктесі параболаның фокусы.

208. Мына сызықтардың параметрлік теңдеулері берілген:

1) $\rho = 2R\cos\theta$; 2) $\rho = 2R\sin\theta$; 3) $\rho = 2p\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$.

Абсциссаның оң жарты осін полярлық оське беттестіріп және параметр ретінде полярлық бұрышты алып осы сызықтардың параметрлік теңдеулерін тікбұрышты декарттық координаталарда құрыңыз.

209. Сызықтардың параметрлік теңдеулері берілген:

1) $\left.\begin{array}{r} x = t^2 - 2t + 1, \\ y = t - 1; \end{array}\right\}$ 2) $\left.\begin{array}{r} x = a\cos t, \\ y = a\sin t; \end{array}\right\}$ 3) $\left.\begin{array}{r} x = a\sec t, \\ y = btgt; \end{array}\right\}$

4) $\left.\begin{array}{r} x = \frac{a}{2}(t + \frac{1}{t}), \\ y = \frac{b}{2}(t - \frac{1}{t}); \end{array}\right\}$ 5) $\left.\begin{array}{r} x = 2R\cos^2 t, \\ y = R\sin 2t; \end{array}\right\}$ 6) $\left.\begin{array}{r} x = R\sin 2t, \\ y = 2R\sin^2 t; \end{array}\right\}$ 7) $\left.\begin{array}{r} x = 2pctg^2 t, \\ y = 2pctgt \end{array}\right\}$

t параметрінен құтылып осы сызықтардың теңдеулерін F(x, y) = 0 түрінде табыңыз.

3 Бірінші ретті сызықтар

3.1 Түзудің жалпы теңдеуі. Түзудің бұрыштық коэффиценті бар теңдеуі

Декарттық координатада әрбір түзу бірінші дәрежелі теңдеу арқылы анықталады. Керісінше әрбір бірінші дәрежелі теңдеу жазықтықта түзуді анықтайды.

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

Кез келген A, B және C коэффициенттерімен берілген (1) теңдеуі **түзудің жалпы теңдеуі** деп аталады. А және В коэффициенттері бір мезгілде нөлге тең емес.

$k(x - x_0) = y - y_0$ – $M_0\left(x_0, y_0\right)$ нүктесі арқылы өтетін және k бұрыштық коэффициенті бар түзудің теңдеуі.

$y = kx + b$ – теңдеуі **түзудің бұрыштық коэффициентпен берілген теңдеуі** деп аталады. b– берідген түзудің координата басынан бастап есептеген кездегі, Oy осінен қиып түсетін кесіндісінің шамасы.

Егер түзу $Ax + By + C = 0$ жалпы теңдеуімен берілген болса, онда оның бұрыштық коэффициенті $k = -\frac{A}{B}$.

$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ – берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі.

Екі түзу арасындағы бұрыш. Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттары

а) $L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ екі түзу берілсін.

L_1 түзуінің нормаль векторы $\overline{n_1} = \{\, A_1, B_1 \,\}$, ал L_2 түзуінің нормаль векторы $\overline{n_2} = \{\, A_2, B_2 \,\}$. Осы екі түзу арасындағы бұрышты табу үшін $\overline{n_1}$ және $\overline{n_2}$ нормаль векторларының арасындағы φ бұрышын табу керек.

$$\overline{n_1}\,\overline{n_2} = |\overline{n_1}||\overline{n_2}|\cos\varphi, \quad \cos\varphi = \frac{\overline{n_1}\,\overline{n_2}}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|}, \quad \cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

L_1 және L_2 түзулерінің параллельдік шарты $\overline{n_1}$ және $\overline{n_2}$ векторларының коллинеарлық шартынан шығады.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

L_1 және L_2 түзулерінің перпендикулярлық шарты $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$ –ден шығады.

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

б) Егер L_1 және L_2 түзулерінің теңдеулері бұрыштық коэффициентпен берілсе
$$y = k_1x + b_1$$
$$y = k_2x + b_2$$

яғни α_1 және α_2 – Ox осімен жасайтын L_1 және L_2 түзулерінің көлбеулік бұрыштары, ал φ – осы екі түзу арасындағы бұрыш болса, онда $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} \qquad tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}$$ – L_1 және L_2 түзулерінің арсындағы φ бұрышын анықтайтын формула. Егер түзулер арасындағы бұрыштың тангенсі нөлге тең болса, онда берілген түзулер параллель болады.

$tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} = 0 \;\Rightarrow\; k_2 - k_1 = 0, 1 + k_2k_1 \neq 0 \;\Rightarrow\; k_2 = k_1$ – екі түзудің **параллельдік шарты.**

$L_1 \perp L_2$, онда $\varphi = 90^0$. φ бұрышының тангенсі жоқ. Формуланың бөлімі нөлге тең болады.

$$k_1k_2 + 1 = 0 \qquad k_2 = -\frac{1}{k_1}$$ – екі түзудің **перпендикулярлық шарты.**

210. $M_1(3;\ 1)$, $M_2(2;\ 3)$, $M_3(6;\ 3)$, $M_4(-\ 3;\ -3)$, $M_5(3;\ -1)$ және $M_6(-\ 2;\ 1)$ нүктелерінің қайсысы $2x - 3y - 3 = 0$ түзуінде жататынын және қайсысы жатпайтынын анықтаңыз.

211. P_1, P_2, P_3, P_4, және P_5 нүктелері $3x - 2y - 6 = 0$ түзуінде жатады, олардың абсциссалары сәйкес 4, 0, 2, – 2 және – 6 сандары. Осы нүктелердің ординаталарын табыңыз.

212. Q_1; Q_2, Q_3, Q_4 және Q_5 нүктелері $x - 3y + 2 = 0$ түзуінде жатады, олардың ординаталары сәйкес 1, 0, 2, – 1, 3 сандары. Осы нүктелердің абсциссаларын табыңыз.

213. $2x - 3y - 12 = 0$ түзуінің координаталық осьтермен қиылысу нүктелерін анықта және бұл түзуді чертежде салыңыз.

214. $3x - 4y - 29 = 0$, $2x + 5y + 19 = 0$ екі түзудің қиылысу нүктесін табыңыз.

215. ABC үшбұрышының AB, BC және AC қабырғалары сәйкес мына теңдеулермен берілген: $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Оның төбелерінің координаталарын анықтаңыз.
216. Параллелограммның екі қабырғасының теңдеулері $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ және оның бір диагоналінің теңдеуі $3x+2y+3 = 0$ берілген. Осы параллелограммның төбелерінің координаталарын анықтаңыз.
217. Үшбұрыштың қабырғалары $x+5y - 7 = 0$, $3x - 2y - 4 = 0$, $7x+y+19 = 0$ түзулерінде жатыр. Оның ауданын S есептеңіз.
218. Үшбұрыштың ауданы S = 8 кв. бірл.,оның екі төбесі $A(1; -2)$ және $B(2; 3)$ нүктелері, ал үшінші C төбесі $2x + y - 2 = 0$ түзуінде жатады. C төбесінің координаталарын анықтаңыз.
219. Үшбұрыштың ауданы S=1,5 кв. бірл., оның екі төбесі $A(2; -3)$ және $B(3; -2)$ нүктелері, осы үшбұрыштың ауырлық центрі $3x - y - 8 = 0$ түзуінде жатады. Үшінші C төбесінің координаталарын анықтаңыз.
220. k бұрыштық коэффициенті және оның Oy осінен қиятын b кесіндісі белгілі болса, онда түзудің теңдеуін құр және түзуді чертежде салыңыз:
1) $k = 4$, $b = 3$;   2) $k = 3$, $b = 0$;   3) $k = Q$, $b = -2$;
4) $k = -\frac{3}{4}$, $b = 3$; 5) $k = -2$, $b = -5$; 6) $k = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$.
221. Мына түзулердің әрқайсысына k бұрыштық коэффициентін және Oy осінен қиятын b кесіндісін анықтаңыз:
1) $5x-y+3= 0$; 2) $2x+3y-6 = 0$; 3) $5x + 3y + 2 = 0$; 4) $3x + 2y = 0$; 5) $y - 3 = 0$.
222. $5x+3y - 3 = 0$ түзуі берілген. Берілген түзуге: 1) параллель;
2) перпендикуляр түзудің k бұрыштық коэффициентін анықтаңыз.
223. $2x+3y+4 = 0$ түзуі берілген. $M_0(2; 1)$ нүктесінен өтетін және берілген түзуге: 1) параллель; 2) перпендикуляр түзудің теңдеуін құрыңыз.
224. Тіктөртбұрыштың екі қабырғасының теңдеулері $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ және оның бір төбесі $A(2; -3)$ берілген. Осы тіктөртбұрыштың қалған екі қабырғасының теңдеулерін құрыңыз.
225. Тіктөртбұрыштың екі қабырғасының теңдеулері $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ және оның бір диагоналінің теңдеуі $7x + y - 15 = 0$ берілген. Тіктөртбұрыштың төбелерін табыңыз.
226. $P(-6; 4)$ нүктесінің $4x - 5y + 3 = 0$ түзуіне проекциясын табыңыз.
227. $P(-5; 13)$ нүктесіне $2x - 3y - 3 = 0$ түзуіне қарағанда симметриялы Q нүктені табыңыз.
228. Мына жағдайлардың әрқайсысында берілген екі түзуге параллель және олардың ортасында жататын түзудің теңдеуін құрыңыз:

1) $3x - 2y - 1 = 0$, $3x - 2y - 13 = 0$;
2) $5x + y + 3 = 0$, $5x + y - 17 = 0$;
3) $2x + 3y - 6 = 0$, $4x + 6y + 17 = 0$;
4) $5x + 7y + 15 = 0$, $5x + 7y + 3 = 0$;
5) $3x - 15y - 1= 0$, $x - 5y - 2 = 0$.

229. Берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің k бұрыштық коэффициентін есептеңіз:
а) M_1,(2; –5), M_2(3; 2); б) P(– 3; 1), Q(7; 8); в) A(5; –3), B(– 1; 6).
230. Үшбұрыштың төбелері A (5; –4), B(–1; 3), C(–3; –2) арқылы өтетін және қарама–қарсы қабырғасына параллель болатын түзулердің теңдеулерін құрыңыз.
231. Үшбұрыштың қабырғаларының орталары M_1(2; 1), M_2(5; 3) және M_3(3; –4) берілген. Оның қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.
232. Екі нүкте P(2; 3) және Q(–1; 0) берілген. Q нүктесінен өтетін және PQ кесіндісіне перпендикуляр болатын түзудің теңдеуін құрыңыз.
233. Егер P(2; 3) нүктесі координаталар басынан түзуге жүргізілген перпендикулярдың табаны болса, онда ол түзудің теңдеуін құрыңыз.
234. Үшбұрыштың төбелері M_1(2; 1), M_2(–1; –1) және M_3(3; 2) берілген. Оның биіктіктерінің теңдеулерін құрыңыз.
235. Үшбұрыштың қабырғалары $4x – y – 7 = 0$, $x+3y – 31 = 0$, $x + 5y – 7 = 0$ теңдеулерімен берілген. Оның биіктіктерінің қиылысу нүктесін табыңыз.
236. Үшбұрыштың төбелері A(1; –1), B(–2; 1) және С(3; 5) берілген. A төбесінен B төбесінен жүргізілген медианаға түсірілген перпендикулярдың теңдеуін құрыңыз.
237. Үшбұрыштың төбелері A (2; –2), B(3; –5) және С(5; 7) берілген. C төбесінен A төбесінің ішкі бұрышының биссектрисасына түсірілген перпендикулярдың теңдеуін құрыңыз.
238. Төбелері A(3; 2), B(5; –2), C(1; 0) болатын үшбұрыштың қабырғаларының және медианаларының теңдеулерін құрыңыз.
239. M_1(–1; 2) және M_2(2; 3) нүктелері арқылы түзу жүргізілген. Осы түзудің координата осьтерімен қиылысу нүктелерін анықтаңыз.
240. Үш нүкте $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$ бір түзуде жату шартын мына түрде

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

жазуға болатынын дәлелдеңіз.
241. Берілген екі нүкте M_1 (x_1; y_2) және M_2(x_2; y_2) арқылы өтетін түзудің теңдеуін мына түрде

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

жазуға болатынын дәлелдеңіз.

242. Дөңес төртбұрыштың төбелері $A(-3; -1)$, $B(3; 9)$, $C(7; 6)$ және $D(-2; -6)$ тізбектеліп берілген. Оның диагональдарының қиылысу нүктесін анықтаңыз.
243. $ABCD$ параллелограмының екі сыбайлас төбелері $A(-3; -1)$, $B(2; 2)$ және диагональдарының қиылысу нүктесі $Q(3; 0)$ берілген. Осы параллелограмның қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.
244. Тіктөртбұрыштың екі қабырғасының теңдеулері $5x+1y-7=0$, $5x+2y-36=0$ және оның диагоналының теңдеуі $3x+7y-10=0$ берілген. Осы тіктөртбұрыштың қалған қабырғаларының және екінші диагоналының теңдеулерін құрыңыз.
245. Үшбұрыштың төбелері $A(1; -2)$, $B(5; 4)$ және $C(-2; 0)$ берілген. A төбесінің ішкі және сыртқы бұрыштарының биссектрисаларының теңдеулерін құрыңыз.
246. $P(3; 5)$ нүктесінен өтетін $A(-7; 3)$ және $B(11;-15)$ нүктелерінен бірдей қашықтықта болатын түзудің теңдеуін құрыңыз.
247. $P(-8; 12)$ нүктесінің $A(2;-3)$ және $B(-5; 1)$ нүктелерінен өтетін түзуге проекциясын табыңыз.
248. $A(3;-4)$ және $B(-1;-2)$ нүктелерінен өтетін түзуге қарағанда $M_2(8;-9)$ нүктесіне симметриялы M_1 нүктесін табыңыз.
249. Абсцисса осінде $M(1;2)$ және $N(3; 4)$ нүктелерінен қашықтықтарының қосындысы ең кіші болатын P нүктесін табыңыз.
250. Ордината осінде $M(-3;2)$ және $N(2;5)$ нүктелерінен қашықтықтарының айырмасы ең үлкен болатын P нүктесін табыңыз.
251. $2x-y-5=0$ түзуінде $A(-7;1)$, $B(-5;5)$ нүктелерінен қашықтықтарының қосындысы ең кіші болатын P нүктесін табыңыз.
252. $3x-y-1=0$ түзуінде $A(4;1)$ және $B(0;4)$ нүктелерінен қашықтықтарының айырмасы ең үлкен болатын P нүктесін табыңыз.
253. Екі түзу арасындағы φ бұрышты анықтаңыз:
1) $5x-y+7=0$, $3x+2y=0$; 2) $3x-2y+7=0$, $2x+3y-3=0$;
3) $x-2y-4=0$, $2x-4y+3=0$; 4) $3x+2y-1=0$, $5x-2y+3=0$.
254. $2x+3y+4=0$ түзуі берілген. $M_0(2; 1)$ нүктесінен өтетін берілген түзумен $45°$ бұрыш жасайтын түзудің теңдеуін құрыңыз.
255. $A(-4;5)$ нүктесі диагоналі $7x-y+8=0$ түзуінде жататын квадраттың төбесі болады. Осы квадраттың қабырғаларының және екінші диагоналының теңдеулерін құрыңыз.
256. Квадраттың қарама–қарсы төбелері $A(-1;3)$ және $C(6; 2)$ берілген. Оның қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.
257. $E(1;-1)$ нүктесі қабырғаларының біреуі $x-2y+12=0$ түзуінде жататын квадраттың центрі болады. Осы квадраттың қалған қабырғалары жатқан түзулердің теңдеулерін құрыңыз.

258. $M_0(-2;3)$ нүктесінен Ox осімен α бұрыш жасайтын жарық сәулесі бағытталған. $\mathrm{tg}\alpha = 3$ екені белгілі. Сауле Ox осіне жетіп одан шағылады. Түскен және шағылған сәулелер жатқан түзулердің теңдеулерін құрыңыз.

259. Жарық сәулесі $x-2y+5=0$ түзуі бойымен бағытталған. Сәуле $3x-2y+7=0$ түзуіне жетіп одан шағылады. Шағылған сәуле жатқан түзудің теңдеуін құрыңыз.

260. Үшбұрыштың қабырғаларының теңдеулері $3x+4y-1=0$, $x-7y-17=0$, $7x+y+31=0$ берілген. Бұл үшбұрыштың тікбұрышты болатынын дәлелдеңіз. Есепті үшбұрыштың бұрыштарын салыстыру арқылы шығарыңыз.

261. $M_1(x_1,y_1)$ нүктесінен өтетін $Ax + By + C = 0$ түзуіне параллель болатын түзудің теңдеуі мына түрде: $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ болатынын дәлелдеңіз.

262. $M_1(2, -3)$ нүктесінен өтетін және мына түзулерге:
1) $3x-7y+3=0$; 2) $x+9y-11=0$; 3) $16x-24y-7=0$; 4) $2x+3=0$; 5) $3y-1=0$ параллель болатын түзудің теңдеуін құрыңыз. Есепті берілген бұрыштардың бұрыштық коэффициенттерін есептемей шешіңіз.

Н ұ с қ а у. Алдыңғы есептің қорытындысын пайдаланыңыз.

263. Түзулердің $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ перпендикулярлық белгісін мына түрде: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ жазуға болады.

264. Мына түзулер жұбының қайсысы перпендикуляр болатынын тағайында:

1) $3x - y + 5 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$;
2) $3x - 4y + 1 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$;
3) $6x - 15y + 7 = 0$, $10x + 4y - 3 = 0$;
4) $9x - 12y + 5 = 0$, $8x + 6y - 13 = 0$;
5) $7x - 2y + 1 = 0$, $4x + 6y + 17 = 0$;
6) $5x - 7y + 3 = 0$, $3x - 2y - 5 = 0$.

Есепті берілген бұрыштардың бұрыштық коэффициенттерін есептемей шешіңіз.

Н ұ с қ а у. 263 есепте қорытылған түзулердің перпендикулярлық белгісін пайдаланыңыз.

265. Түзулердің $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ арасындағы φ бұрышын табуға болатын формуланы мына түрде: $tg\varphi = \dfrac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$ жазуға болатынын дәлелдеңіз.

266. Екі түзу құратын φ бұрышын анықтаңыз:

1) $3x - y + 5 = 0$, $2x + y - 7 = 0$;
2) $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} - 5 = 0$, $(3 + \sqrt{2})x + (\sqrt{6} - \sqrt{3})y + 7 = 0$;
3) $x\sqrt{3} + y\sqrt{2} - 2 = 0$, $x\sqrt{6} - 3y + 3 = 0$.

Есепті берілген бұрыштардың бұрыштық коэффициенттерін есептемей шешіңіз.

Нұсқау. 265–есепте алынған екі түзу арасындағы бұрышты табу формуласын пайдаланыңыз.

267. Үшбұрыштың екі төбесі M_1 (–10;2) және M_2 (6;4) берілген, оның биіктіктері N(5;2) нүктесінде қиылысады. Үшінші M_3 төбесінің координаталарын анықтаңыз.
268. ABC үшбұрыштың екі төбесі A (3;–1) және B(5;7) берілген, оның биіктіктері N(4;–1) нүктесінде қиылысады. Осы үшбұрыштың қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.
269. ABC үшбұрышының AB қабырғасының теңдеуі $5x - 3y + 2 = 0$, AN биіктігінің теңдеуі $4x–3y +1=0$ және BN биіктігінің теңдеуі $7x +2y - 22 = 0$ берілген. Осы үшбұрыштың қалған екі қабырғасының және үшінші биіктігінің теңдеуін құрыңыз.
270. Егер ABC үшбұрышының төбелерінің бірі A(1;3) және екі медианасының теңдеулері $x - 2y + 1 = 0$ және $y - 1 = 0$ берілген. Оның қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.
271. Егер үшбұрыштың төбелерінің бірі B (–4;–5) және екі биіктігінің теңдеулері $5x + 3y - 4 = 0$ және $3x + 8y +13 = 0$ берілген. Оның қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.
272. Егер үшбұрыштың төбелерінің бірі A (4;–1) және екі биссектрисасының теңдеулері $x - 1= 0$ және $x - y - 1=0$ берілген. Оның қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.
273. Егер үшбұрыштың төбелерінің бірі B(2; 6) және бір төбесінен шығатын биіктігі $x -7y + 15 = 0$ мен биссектрисасының $7x + y + 5 = 0$ теңдеулері берілген. Оның қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.
274. Егер үшбұрыштың төбелерінің бірі B(2;–1) және әр төбесінен шығатын биіктігі $3x - 4y + 27 = 0$ мен биссектрисасының $x + 2y - 5 = 0$ теңдеулері берілген. Оның қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.
275. Егер үшбұрыштың төбелерінің бірі C (4;– 1) және бір төбесінен шығатын биіктігі $2x - 3y + 12 = 0$ мен медианасының $2x + 3y = 0$ теңдеулері берілген. Оның қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.
276. Егер үшбұрыштың төбелерінің бірі B (2;– 7) және әр төбесінен шығатын биіктігі $3x + y + 11 = 0$ мен медианасының $x + 2y + 7 = 0$ теңдеулері берілген. Оның қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.
277. Егер үшбұрыштың төбелерінің бірі C(4;3) және бір төбесінен шығатын биссектриса $x + 2y - 5 = 0$ мен медианасының $4x + 13y - 10 = 0$ теңдеулері берілген. Оның қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.
278. Егер үшбұрыштың төбелерінің бірі A(3;–1) және әр төбесінен шығатын биссектриса $x - 4y + 10 = 0$ мен медианасының $6x + 10y - 59 = 0$ теңдеулері берілген. Оның қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.
279. Координаталар бас нүктесінен өтетін және $x–y+12=0$, $2x+y+9=0$ түзулерімен ауданы 1,5 кв. бірл. тең болатын үшбұрыш құрайтын түзудің теңдеуін құрыңыз.

280. $P(3;0)$ нүктесінен өтетін түзулердің ішінен $2x - y - 2 = 0$, $x + y + 3 = 0$ түзулерімен шектелген кесіндісі P нүктесімен қаққа бөлінетінін табыңыз.
281. $P(-3;-1)$ нүктесі арқылы әртүрлі түзулер жүргізілген. Олардың әрқайсысының $x - 2y - 3 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$ түзулерімен шектелген кесінділері P нүктесінде қаққа бөлінетінін дәлелдеңіз.
282. $P(0;1)$ нүктесі арқылы әртүрлі түзулер жүргізілген. Олардың ішінде $x - 2y - 3 = 0$, $x - 2y + 17 = 0$ түзулерімен шектелген кесіндісі P нүктесінде қаққа бөлінетін түзу жоғын дәлелдеңіз.
283. Координаталар бас нүктесінен өтетін және $2x-y+5=0$, $2x-y+10=0$ түзулерімен шектелген кесіндісінің ұзындығы $\sqrt{10}$ –ға тең болатын түзудің теңдеуін құрыңыз.
284 $C(-5;\ 4)$ нүктесі арқылы өтетін және $x+2y+1=0$, $x+2y-1=0$ түзулерімен шектелген кесіндінің ұзындығы 5-ке тең болатын түзудің теңдеуін құрыңыз.

3.2 Түзудің толық емес теңдеулері. Түзудің «кесінділік» теңдеуі

Егер $Ax + By + C = 0$ теңдеуіндегі A, B және C коэффициенттерінің бірде біреуі нөлге тең болмаса, онда $Ax + By + C = 0$ теңдеуі **толық теңдеу** деп аталады.

Ал егер A, B және C коэффициенттерінің кем дегенде біреуі нөлге тең болса, онда $Ax + By + C = 0$ теңдеуі **толық емес теңдеу** деп аталады.
Толық емес теңдеулердің түрлері:
1. $C = 0, \Rightarrow Ax + By = 0$ – координата басы арқылы өтетін түзу.
2. $B = 0, \Rightarrow Ax + C = 0,\ x = -\dfrac{C}{A} = C,\ x = a$ – Oy осіне параллель түзу
3. $A = 0, \Rightarrow By + C = 0.\quad y = -\dfrac{C}{B}$ немесе $y = b$ – Ox – ке параллель түзу,
4. $B = 0, C = 0, \Rightarrow Ax = 0$ Oy осін анықтайды.
5. $A = 0, C = 0, \Rightarrow By = 0$ Ox осін анықтайды.
$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ – теңдеуі түзудің «кесінділік» теңдеуі деп аталады.
Бұл теңдеудегі a және b коэффициенттерінің геометриялық мағынасы: олар түзудің сәйкес Ox және Oy осьтерінен қиып түсетін кесінділердің шамаларына тең.
285. a–ның қандай мәнінде $(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$ түзуі
1) абсцисса осіне параллель; 2) ордината осіне параллель;
3) координаталар басынан өтеді. Әр жағдайда түзу теңдеуін жазыңыз.
286. m және n –ның қандай мәндерінде $(m+2n-3)x+(2m-n+1)y+6m+9=0$ түзуі абсцисса осіне параллель және ордината осінен –3–ке тең кесінді

қиятынын (координаталар басынан санағанда) анықта. Осы түзудің теңдеуін жазыңыз.

287. m және n–ның қандай мәндерінде $(2m–n+5)x+(m+3n–2)y+2m+7n+19=0$ түзуі ордината осіне параллель және абсцисса осінен +5–ке тең кесінді қиятынын (координаталар басынан санағанда) анықтаңыз. Осы түзудің теңдеуін жазыңыз.

288. Мына жағдайларда екі түзу қиылысатынын дәлелдеңіз және олардың қиылысу нүктесін табыңыз.

1) $x + 5y – 35 = 0$, $3x+2y – 27 = 0$;
2) $14x – 9y – 24 = 0$, $7x –2y – 17 = 0$;
3) $12x + 15y – 8 = 0$, $16x + 9y – 7 = 0$;
4) $8x – 33y – 19 = 0$, $12x + 55y – 19 = 0$;
5) $3x + 5 = 0$, $y – 2 = 0$.

289. Мына жағдайларда берілген екі түзу параллель болатынын дәлелдеңіз:

1) $3x + 5y – 4 = 0$, $6x + 10y + 7 = 0$;
2) $2x – 4y + 3 = 0$, $x – 2y = 0$;
3) $2x – 1 = 0$, $x + 3 = 0$;
4) $y + 3=0$, $5y – 7 = 0$.

290. Мына жағдайларда берілген екі түзу беттесетінін дәлелдеңіз:

1) $3x + 5y – 4 = 0$, $6x + 10y – 8 = 0$;
2) $x – y\sqrt{2} = 0$, $x\sqrt{2} – 2y = 0$;
3) $x\sqrt{3} – 1 = 0$, $3x – \sqrt{3} = 0$.

291. $ax – 2y – 1 = 0$, $6x – 4y – b = 0$ екі түзуі a және b–ның қандай мәндерінде
1) ортақ бір нүктесі бар; 2) параллель; 3) беттесетінін анықтаңыз.

292. $mx+8y+n=0$, $2x+my–1=0$ екі түзуі m және n –ның қандай мәндерінде
1) параллель; 2) беттеседі; 3) перпендикуляр болатынын анықтаңыз.

293. $(m – 1)x + my – 5 = 0$, $mx + (2m – 1)y + 7= 0$ екі түзуі m–ның қандай мәнінде абцисса осінде жатқан нүктеде қиылысады.

294. $mx + (2m + 3 + m + 6 = 0$, $(2m + 1)x + (m – 1)y + m – 2= 0$ екі түзуі m–ның қандай мәнінде ордината осінде жатқан нүктеде қиылысады.

295. Мына жағдайларда үш түзу бір нүктеде қиылысатынын анықтаңыз:

1) $2x + 3y – 1 = 0$, $4x – 5y + 5 = 0$, $3x – y + 2 = 0$;
2) $3x – y + 3 = 0$, $5x + 3y – 7 = 0$, $x – 2y – 4 = 0$;
3) $2x – y +1= 0$, $x + 2y – 17= 0$, $x + 2y – 3 = 0$.

296. Егер $A_1x +B_1y +C_1 = 0$, $A_1x +B_2 y + C = 0$, $A_3 x +B_3 y +C_3 = 0$ үш түзуі бір нүктеде қиылысатын болса, онда $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$ болатынын дәлелдеңіз.

297. Егер $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$ болса онда $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ үш түзуі бір нүктеде қиылысады немесе параллель болатынын дәлелдеңіз.

298. a –ның қандай мәнінде $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $ax + y - 13 = 0$ үш түзуі бір нүктеде қиылысатынын анықтаңыз.

299. Мына түзулер берілген: 1)$2x + 3y - 6 = 0$; 2)$4x - 3y + 24 = 0$; 3)$2x + 3y - 9 = 0$; 4) $3x - 5y - 2 = 0$; 5) $5x + 2y - 1 = 0$. Олардың «кесінділік» теңдеулерін құрыңыз және ол түзулерді чертежде салыңыз.

300. $3x - 4y - 12 = 0$ түзуімен координаталық бұрыштан қиылған үшбұрыштың ауданын есептеңіз.

301. $M_1(3;-7)$ нүктесінен өтетін және координаталық осьтерден шамалары бірдей (әр кесінді координаталар басынан бағытталған деп есептеледі) нөлден өзгеше кесінділерді қиятын түзу теңдеуін құрыңыз.

302. $P(2;3)$ нүктесінен өтетін және координаталық осьтерден координаталар басынан есептегенде ұзындықтары тең болатын кесінділер қиятын түзу теңдеуін құрыңыз.

303. $C(1;1)$ нүктесінен өтетін және координаталық бұрыштан ауданы 2 кв. бірл. тең үшбұрыш қиятын түзу теңдеуін құрыңыз.

304. $B(5;-5)$ нүктесінен өтетін және координаталық бұрыштан ауданы 50 кв. бірл. тең үшбұрыш қиятын түзу теңдеуін құрыңыз.

305. $P(8;6)$ нүктесінен өтетін және координаталық бұрыштан ауданы 12 кв. бірл. тең үшбұрыш қиятын түзу теңдеуін құрыңыз.

306. $P(12;6)$ нүктесінен өтетін және координаталық бұрыштан ауданы 150 кв. бірл. тең үшбұрыш қиятын түзу теңдеуін құрыңыз.

307. Координаталық бұрыштан ауданы 3 кв. бірл. тең үшбұрыш қиятын түзу $M(4;3)$ нүктесінен жүргізілген. Осы түзудің координаталар осьтерімен қиылысу нүктелерін анықтаңыз.

308. $M_1(x_1; y_1)$ нүктесінен, мұнда $x_1y_1 > 0$ координаталық бұрыштан ауданы S–ке тең болатын үшбұрыш қиятын $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ түзуі жүргізілген. x_1, y_1 және S шамалары арасындағы қатынас қандай болғанда a және b кесінділері бірдей таңбалы болатынын анықтаңыз. Шектелген кесіндісінің ұзындығы 5–ке тең болатын түзудің теңдеуін құрыңыз.

3.3 Түзудің нормальдық теңдеуі. Нүктеден түзуге дейінгі арақашықтық

Теорема: Егер $Ax+By+C=0$ және $A_1x+B_1y+C_1=0$ жалпы теңдеулері бір түзуді ғана анықтаса, онда $A_1=At, B_1=Bx, C_1=Cx$ теңсіздіктері ақиқат болатындай t саны табылады.

$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ – теңдеуі **түзудің нормальдық теңдеуі** деп аталады.

Кез келген M нүктесінің берілген L түзуінен ауытқуы.

d – M нүктесінен L түзуіне дейінгі арақашықтық болсын.

Анықтама: Егер M нүктесі және O координата бас нүктесі берілген L түзуінің әр түрлі екі жағында жатса, онда M нүктесінің L түзуінен δ **ауытқуы** деп $+d$ санын атайды; ал егер M нүктесі және O координата бас нүктесі берілген L түзуінің бір жағында жатса, онда M нүктесінің L түзуінен δ **ауытқуы** деп $-d$ санын атайды.

Теорема: Түзудің (8) нормаль теңдеуінің сол жағы координаталары x_0, y_0 болатын M нүктесінің $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ теңдеуімен анықталатын L түзуден ауытқуына тең.

$$d=|\delta|$$

Түзудің жалпы теңдеуінен нормальдық теңдеуге өту алгоритмі.

$Ax+By+C=0$, $\quad x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$. Берілген теңдеулер бір түзуді анықтайтындықтан, қандай да бір t саны табылады.

$$tA=\cos\theta,\quad tB=\sin\theta,\quad tC=-p \tag{9}$$

$t^2\left(A^2+B^2\right)=1$, $t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ – нормальдық көбейткіш.

Мағынасы бойынша p арақашықтығы әрқашан да теріс емес болғандықтан, үшінші (9) теңіктерінен t таңбасының C таңбасына қарама–қарсы екендігі шығады. Сонымен түзудің $Ax+By+C=0$ жалпы теңдеуін нормальдық теңдеуге келтіру үшін C коэффициентінің таңбасына қарама–қарсы болатын t нормальдық көбейткішке көбейту керек.

$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ – нүктеден түзуге дейінгі арақашықтықты есептейтін формула.

309. Мына түзу теңдеулерінің қайсысы нормаль теңдеу болатынын анықтаңыз:

1) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$; 2) $\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0$; 3) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+2=0$; 4) $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$;
5) $-x+2=0$; 6) $x-2=0$; 7) $y+2=0$; 8) $-y-2=0$.

310. Мына жағдайлардың әрқайсысында түзудің жалпы теңдеуін нормал ь түрге келтіріңіз:

1) $4x-3y-10=0$; 2) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0$;

3) $12x-5y+13=0$; 4) $x+2=0$; 5) $2x-y-\sqrt{5}=0$.

311. Түзудің теңдеулері берілген:

1) $x-2=0$; 2) $x+2=0$; 3) $y-3=0$; 4) $y+3=0$;

5) $x\sqrt{3}+y-6=0$; 6) $x-y+2=0$; 7) $x+y\sqrt{3}+2=0$;

8) $x\cos\beta-y\sin\beta-q=0$, $q>0$; β – сүйір бұрыш;

9) $x\cos\beta+y\sin\beta+q=0$, $q>0$; β – сүйір бұрыш.

Берілген түзулерге нормальдың α полярлық бұрышын және p кесіндісін анықта; табылған α және p параметрлерінің мәні бойынша осы түзулерді чертежге салыңыз (соңғы екі жағдайда $\beta=30°$ және $q=2$ деп есептеп түзуді салыңыз).

312. Мына жағдайлардың әрқайсысына δ ауытқудың және d нүктеден түзуге дейінгі арақашықтықты есептеңіз:

1) $A(2;-1)$, $4x+3y+10=0$; 2) $B(0;-3)$, $5x-12y-23=0$;

3) $P(-2;3)$, $3x-4y-2=0$; 4) $Q(l;-2)$, $x-2y-5=0$.

313. $M(1;-3)$ нүктесі және координаталар бас нүктесі мына түзулердің әрқайсысының бір немесе әртүрлі жағында жағында жатады ма:

1) $2x-y+5=0$; 2) $x-3y-5=0$; 3) $3x+2y-1=0$;

2) $x-3y+2=0$; 5) $10x+24y+15=0$.

314. $A(2;-5)$ нүктесі бір қабырғасы $x-2y-7=0$ түзуінде жататын квадраттың төбесі болады. Осы квадраттың ауданын табыңыз.

315. Тіктөртбұрыштың екі қабырғасының теңдеулері $3x-2y-5=0$, $2x+3y+7=0$ және төбелерінің біреуі $A(-2;1)$ берілген. Осы тіктөртбұрыштың ауданын табыңыз.

316. $2x+y+3=0$ түзуі $A(-5;1)$ және $B(3;7)$ нүктелерімен шектелген кесіндіні қиятынын дәлелдеңіз.

317. $2x-3y+6=0$ түзуі $M_1(-2;-3)$ және $M_2(1;-2)$ нүктелерімен шектелген кесіндіні қимайтынын дәлелдеңіз.

318. $A(-3;5)$, $B(-1;-4)$, $C(7;-1)$ және $D(2;9)$ нүктелері төртбұрыштың тізбектелген төбелері болады. Осы төртбұрыш дөңес бола ма?

319. $A(-1;6)$, $B(1;-3)$, $C(4;10)$ және $D(9;0)$ нүктелері төртбұрыштың тізбектелген төбелері болады. Осы төртбұрыш дөңес бола ма?

320. Үшбұрыштың төбелері $A(-10;-13)$, $B(-2;3)$ және $C(2;1)$ берілген. B төбесінен C төбесінен жүргізілген медианаға түсірілген перпендикулярдың ұзындығын табыңыз.

321. ABC үшбұрышының AB, BC және CA қабырғалары сәйкес $x+21y-22=0$, $5x-12y+7=0$, $4x-33y+146=0$ теңдеулерімен берілген. Осы үшбұрыштың ауырлық центрінен BC қабырғасына дейінгі арақашықтықты табыңыз.

322. Мына жағдайлардың әрқайсысында параллель түзулердің d арақашықтығын табыңыз:

1) $3x - 4y - 10 = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$;
2) $5x - 12y + 26 = 0$, $5x - 12y - 13 = 0$;
3) $4x - 3y + 15 = 0$, $8x - 6y + 25 = 0$;
4) $24x - 10y + 39 = 0$, $12x - 2y - 26 = 0$.

323. Квадраттың екі қабырғасы $5x - 12y - 65 = 0$, $5x - 12y + 26 = 0$ түзулерінде жатыр. Оның ауданын табыңыз.

324. $5x - 2y - 1 = 0$ түзуі $5x - 2y + 7 = 0$, $5x - 2y - 9 = 0$ түзулеріне параллель болатындығын және олардың арақашықтығын қаққа бөлетінін дәлелдеңіз.

325. Үш параллель түзулер $10x+15y - 3 = 0$, $2x+3y + 5 = 0$, $2x+3y - 9 = 0$ берілген. Бірінші түзу қалған екеуінің арасында жататындығын тағайында және ол қалған екеуінің арақашықтығын қандай қатынаста бөлетін есептеңіз.

326. $P(2;7)$ нүктесі арқылы олардың $Q(1;2)$ нүктесінен арақашықтығы 5–ке тең болатын екі түзу жүргізуге болатынын дәлелдеңіз. Осы түзулердің теңдеулерін құрыңыз.

327. $P(2;5)$ нүктесі арқылы олардың $Q(5;1)$ нүктесінен арақашықтығы 3–ке тең болатын екі түзу жүргізуге болатынын дәлелдеңіз. Осы түзулердің теңдеулерін құрыңыз.

328. $C(7; -2)$ нүктесі арқылы $A(4; -6)$ нүктесінен арақашықтығы 5–ке тең болатын бір ғана түзу жүргізуге болатынын дәлелдеңіз. Осы түзудің теңдеуін құрыңыз.

329. $B(4; -5)$ нүктесі арқылы $C(-2; 3)$ нүктесінен арақашықтығы 12–ге тең болатын түзу жүргізуге болмайтынын дәлелдеңіз.

330. $8x - 15y - 25 = 0$ түзуінен ауытқуы –2–ге тең болатын нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін қорытып шығарыңыз.

331. $3x - 4y - 10 = 0$ түзуіне параллель және одан арақашықтығы $d=3$ болатын түзулердің теңдеулерін құрыңыз.

332. Квадраттың сыбайлас төбелері $A(2; 0)$ және $B(-1; 4)$ берілген. Оның қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.

333. $A(5; -1)$ нүктесі квадраттың төбесі болады. Оның қабырғаларының біреуі $4x - 3y - 7 = 0$ түзуінде жатыр. Осы квадраттың қалған қабырғалары жатқан түзулердің теңдеулерін құрыңыз.

334. Квадраттың екі қабырғасының теңдеулері $4x - 3y + 3 = 0$, $4x - 3y - 17 = 0$ және төбелерінің біреуі $A(2; -3)$ берілген. Осы квадраттың қалған екі қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.

335. Квадраттың екі қабырғасының теңдеулері $5x+12y-10=0$, $5x+12y+29=0$ берілген. Егер $M_1(-3; 5)$ нүктесі осы квадраттың қабырғасында жатса, онда квадраттың қалған екі қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.
336. M нүктесінің $5x -12y -13=0$ және $3x - 4y -19 = 0$ түзулерінен ауытқулары сәйкес – 3 және – 5. M нүктесінің координаталарын табыңыз.
337. $P(-2; 3)$ нүктесінен өтетін $A(5; -1)$ және $B(3; 7)$ нүктелерінен бірдей қашықтықта жататын түзудің теңдеулерін құрыңыз.
338. Екі параллель түзуден бірдей қашықтықта жатқан нүктелердің геометриялық орындарының теңдеулерін құрыңыз:
1) $3x - y + 7 = 0$, 2) $x - 2y + 3 = 0$, 3) $5x - 2y - 6 = 0$,
$3x - y - 3 = 0$; $x -2y + 7 = 0$; $x -4y + 3 = 0$.
339. Қиылысқан екі түзуден құралған бұрыштың биссектрисасының теңдеуін құрыңыз:
1) $x - 3y + 5 = 0$, 2) $x - 2y - 3 = 0$, 3) $3x + 4y - 1 = 0$,
$3x-y-2 = 0$; $2x + 4y + 7 = 0$; $5x + 12y - 2 = 0$.
340. $P(2; -1)$ нүктесінен өтетін және $2x - y + 5 = 0$, $3x + 6y - 1 = 0$ түзулермен бірге теңбүйірлі үшбұрыш жасайтын түзулердің теңдеуін құрыңыз.
341. M $(1; -2)$ нүктесі және координаталар басы екі түзудің қиылысынан пайда болған бір, сыбайлас немесе вертикаль бұрышында жататындығын анықтаңыз:
1) $2x-y-5 = 0$, 2) $4x+3y-10 = 0$, 3) $x - 2y- 1=0$,
$3x+y+10 = 0$; $12x-5y-5 = 0$; $3x-y-2 = 0$.
342. M $(2; 3)$ және N $(5; -1)$ нүктелері екі түзудің қиылысынан пайда болған бір, сыбайлас немесе вертикаль бұрышында жататындығын анықтаңыз:
1) $x-3y-5 = 0$, 2)$2x+7y-5 = 0$, 3) $12x+y- 1=0$,
$2x+9y-2 = 0$; $x + 3y + 7 = 0$; $13x + 2y-5 = 0$.
343. Координаталар бас нүктесі қабырғалары $7x -5y-11=0$, $8x + 3y + 31=0$, $x + 8y-19 = 0$ теңдеулерімен берілген үшбұрыштың ішінде немесе сыртында жататындығын анықтаңыз.
344. M $(-3;2)$ нүктесі қабырғалары $x+y-4=0$, $3 -7y+8=0$, $4x-y-31=0$ теңдеулерімен берілген үшбұрыштың ішінде немесе сыртында жататындығын анықтаңыз.
345. Координаталар бас нүктесі $3x - 2y + 5 = 0$ және $2x + y - 3 = 0$ түзулерінен құралған сүйір немесе доғал бұрыштардың қайсысында жататындығын анықтаңыз.
346. M $(2; -5)$ нүктесі $3x -5y - 4 = 0$ және $x + 2y + 3 = 0$ түзулерінен құралған сүйір немесе доғал бұрыштардың қайсысында жататындығын анықтаңыз.

347. $3x - y - 4 = 0$ және $2x + 6y + 3 = 0$ түзулері арасындағы бұрыштың координаталар бас нүктесі жатқан биссектрисасының теңдеуін құрыңыз.
348. Координаталар бас нүктесін қамтитын бұрышқа сыбайлас $x - 7y + 5 = 0$, $5x + 5y - 3 = 0$ түзулері арасындағы бұрыштың биссектрисасының теңдеуін құрыңыз.
349. $x + 2y - 11 = 0$ және $3x - 6y - 5 = 0$ түзулері арасындағы бұрыштың $M(1; -3)$ нүктесі жатқан биссектрисасының теңдеуін құрыңыз.
350. $C(2;-1)$ бас нүктесін қамтитын бұрышқа сыбайлас $2x - 3y - 5 = 0$, $6x - 4y + 7 = 0$ түзулері арасындағы бұрыштың биссектрисасының теңдеуін құр.
351. $3x + 4y - 5 = 0$, $5x - 12y + 3 = 0$ түзулері арасындағы сүйір бұрыштың биссектрисасының теңдеуін құрыңыз.
352. $x - 3y + 5 = 0$, $3x - y + 15 = 0$ түзулері арасындағы доғал бұрыштың биссектрисасының теңдеуін құрыңыз.

3.4 Түзулер шоғының теңдеуі

Қандай–да бір S нүктесі арқылы өтетін түзулер жиынтығы, центрі S нүктесінде болатын түзулер шоғы деп аталады.

Егер $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ – S нүктесінде қиылысатын екі түзудің теңдеуі болса, онда

$$\alpha\,(A_1x + B_1y + C_1) + \beta\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad (1)$$

теңдеуі де S нүктесі арқылы өтетін түзуді анықтайды, мұндағы α, β – бір мезгілде нөлге тең емес қандай –да бір сандар.

(1) түріндегі теңдеуді центрі S нүктесінде болатын түзулер шоғының теңдеуі деп атайды.

Егер $\alpha \neq 0$, онда (1) теңдеуінің екі жағын да α–ға бөліп және $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ екенін ескеріп,

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (2)$$

теңдеуін аламыз.

Бұл теңдеу арқылы $\alpha = 0$ болған жағдайдан басқа, центрі S нүктесінде болатын түзулер шоғының кез келген түзуінің теңдеуін анықтауға болады.
353. $\alpha\,(2x + 3y - 1) + \beta(x - 2y - 4) = 0$ теңдеуімен берілген түзулер шоғының центрін табыңыз.
354. $\alpha\,(x + 2y - 5) + \beta\,(3x - 2y + 1) = 0$ түзулер шоғында жататын және
1) $A(3; -1)$ нүктесінен өтетін; 2) координаталар бас нүктесінен өтетін;
3) Ox осіне параллель; 4) Oy осіне параллель; 5) $4x + 3y - 5 = 0$ түзуіне параллель; 6) $2x + 3y + 7 = 0$ түзуіне перпендикуляр түзу теңдеуін табыңыз.
355. $3x - 2y + 5 = 0$, $4x + 3y - 1 = 0$ түзулерінің қиылысу нүктесінен өтетін және ордината осінен $b = -3$ кесіндісін қиятын түзу теңдеуін құрыңыз.

Берілген түзулердің қиылысу нүктесінің координаталарын таппай есепті шешіңіз.

356. $2x + y - 2 = 0$, $x - 5y - 23 = 0$ түзулерінің қиылысу нүктесінен өтетін және $M_1(5;\ -6)$ и $M_2(-1;\ -4)$ нүктелерімен шектелген кесіндіні қаққа бөлетін түзудің теңдеуін құрыңыз. Берілген түзулердің қиылысу нүктесінің координаталарын таппай есепті шешіңіз.

357. Түзулер шоғының $\alpha(3x - 4y - 3) + \beta(2x + 3y - 1) = 0$ теңдеуі берілген. Осы шоқтың төбелері $A(-1;\ 2)$, $B(4;\ -4)$ және $C(6;\ -1)$ нүктесінде жататын біртекті үшбұрышты пластинканың ауырлық центрінен өтетін түзуінің теңдеуін жазыңыз.

358. Түзулер шоғының $\alpha\ (3x - 2y - 1) + \beta\ (4x - 5y + 8) = 0$ теңдеуі берілген. Осы шоқтың $x + 2y + 4 = 0$ түзуінің $2x + 3y + 5 = 0$, $x + 7y - 1 = 0$ түзулері арасындағы кесіндісінің ортасы арқылы өтетін түзуінің теңдеуін жазыңыз.

359. Үшбұрыштың $x + 2y - 1 = 0$, $5x + 4y - 17 = 0$, $x - 4y + 11 = 0$ қабырғаларының теңдеулері берілген. Оның төбелерінің координаталарын таппай осы үшбұрыштың биіктіктерінің теңдеулерін құрыңыз.

360. $2x + 7y - 8 = 0$, $3x + 2y + 5 = 0$ түзулерінің қиылысу нүктесінен өтетін және $2x + 3y - 7 = 0$ түзуімен $45°$ бұрыш жасайтын түзудің теңдеуін құрыңыз. Есепті берілген түзулердің қиылысу нүктесін таппай есептеңіз.

361. ABC үшбұрыштың AN: $x + 5y - 3 = 0$, BN: $x + y - 1 = 0$ биіктіктерінің және AB: $x + 3y - 1 = 0$ қабырғасының теңдеулері берілген. Үшбұрыштың төбелерін және биіктіктерінің қиылысу нүктесін таппай басқа екі қабырғасы мен үшінші биіктiктігінің теңдеулерін құрыңыз.

362. ABC үшбұрышының бір төбесі $A(2;\ -1)$ және бір төбесінен жүргізілген $7x - 10y + 1 = 0$ биіктігінің және $3x - 2y + 5 = 0$ биссектрисасының теңдеулері берілген. Үшбұрыштың қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз. Есепті B және C төбелерінің координаталарын есептемей шешіңіз.

363. Түзулер шоғының $\alpha(2x + y + 8) + \beta(x + y + 3) = 0$ теңдеуі берілген. Осы шоқтың $x - y - 5 = 0$, $x - y - 2 = 0$ түзулері арасындағы кесіндісі $\sqrt{5}$ болатын түзуінің теңдеуін табыңыз.

364. Түзулер шоғының $\alpha(3x + y - 1) + \beta(2x - y - 9) = 0$ теңдеуі берілген. $x + 3y + 13 = 0$ түзуінің осы шоққа тиісті болатынын дәлелдеңіз.

365. Түзулер шоғының $\alpha(5x + 3y + 6) + \beta(3x - 4y - 37) = 0$ теңдеуі берілген. $7x + 2y - 15 = 0$ түзуінің осы шоққа тиісті емес екенін дәлелдеңіз.

366. Түзулер шоғының $\alpha(3x + 2y - 9) + \beta\ (2x + 5y + 5) = 0$ теңдеуі берілген. C–ның қандай мәнінде $4x - 3y + C = 0$ түзуі шоққа тиісті болады?

367. Түзулер шоғының $\alpha(5x + 3y - 7) + \beta(3x + 10y + 4) = 0$ теңдеуі берілген. a –ның қандай мәнінде $ax + 5y + 9 = 0$ түзуі шоққа тиісті болмайтынын табыңыз.

368. $\alpha(2x - 3y + 20) + \beta(3x + 5y - 27) = 0$ түзулер шоғының центрі диагоналі $x + 7y - 16 = 0$ түзуінде жататын квадраттың төбесі болады. Осы квадраттың екінші диагоналінің және қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.
369. Түзулер шоғының $\alpha(2x+5y + 4) + \beta(3x - 2y+25) = 0$ теңдеуі берілген. Осы шоқтың координаталық осьтерден (координаталар басынан санағанда) бірдей шамалы нольден өзгеше кесінділер қиятын түзуін табыңыз.
370. Түзулер шоғының $\alpha(2x + y + 1) + \beta(x - 3y - 10) = 0$ теңдеуі берілген. Осы шоқтың координаталық осьтерден (координаталар басынан санағанда) бірдей шамалы нольден өзгеше кесінділер қиятын түзулерін табыңыз.
371. Түзулер шоғының $\alpha(21x + 8y - 18) + \beta(11x+3y+12) = 0$ теңдеуі берілген. Осы шоқтың координаталық бұрыштардан ауданы 9 кв.бірл. тең болатын үшбұрыштар қиятын түзулерін табыңыз.
372. Түзулер шоғының $\alpha(2x + y + 4) + \beta(x - 2y - 3) = 0$ теңдеуі берілген. Осы шоқ түзулерінің ішінде $P(2; -3)$ нүктесінен $d = \sqrt{10}$ қашықтықта болатын жалғыз ғана түзу болатынын дәлелдеңіз. Ол түзудің теңдеуін жазыңыз.
373. Түзулер шоғының $\alpha(2x - y - 6) + \beta(x - y - 4) = 0$ теңдеуі берілген. Осы шоқ түзулерінің ішінде $P(3;-1)$ нүктесінен $d = 3$ қашықтықта болатын түзу жоқ екенін дәлелдеңіз.
374. $3x + y - 5 = 0$, $x - 2y + 10 = 0$ түзулерінің қиылысу нүктесінен өтетін және $C(-1;-2)$ нүктесінен арақашықтығы $d = 5$ болатын түзудің теңдеуін құр. Есепті берілген түзулердің қиылысу нүктесін таппай есептеңіз.
375. Түзулер шоғының $\alpha(5x + 2y + 4) + \beta(x + 9y - 25) = 0$ теңдеуі берілген. Осы шоқтың $2x - 3y+5= 0$, $12x+ 8y - 7 = 0$ түзулермен қосылып теңбүйірлі үшбұрыштар жасайтын түзулерінің теңдеулерін жазыңыз.
376. $11x + 3y - 7 = 0$, $12x+y - 19 = 0$ түзулерінің қиылысу нүктесінен өтетін және $A(3;-2)$, $B(-1; 6)$ нүктелерінен бірдей қашықтықта болатын түзудің теңдеуін құр. Есепті берілген түзулердің қиылысу нүктесін таппай есепте.
377. Екі түзулер шоғының $\alpha_1(5x + 3y - 2) + \beta_1(3x - y - 4) = 0$, $\alpha_2(x-y+1) + \beta_2(2x-y-2) = 0$. Центрлерін анықтамай екі шоққа да тиісті болатын түзу теңдеуін құрыңыз.
378. *ABCD* төртбұрышының *AB, BC,CD* және *DA* қабырғалары сәйкес $5x + y + 13 = 0$, $2x - 7y - 17 = 0$, $3x + 2y - 13 = 0$, $3x - 4y + 17 = 0$ теңдеулермен берілген. Осы төртбұрыштың төбелерінің координаталарын анықтамай оның *AC* және *BD* диагональдарының теңдеуін құрыңыз.

379. $\alpha(2x+3y+5)+\beta(3x-y+2)=0$ түзулер шоғының центрі екі биіктігі $x-4y+1=0$, $2x+y+1=0$ теңдеулерімен берілген үшбұрыштың төбелерінің бірі болады. Осы үшбұрыштың қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.
380. Түзудің p полюстан арақашықтығын және нормальдың α полярлық бұрышын біле отырып, оның полярлық теңдеуін қорытып шығарыңыз.
381. Егер мыналар белгілі болса, онда түзудің полярлық теңдеуін қорытып шығарыңыз:
1) түзудің полярлық оське β көлбеу бұрышы және полюстен осы түзуге түсірілген перпендикулярдың ρ ұзындығы. $\beta=\frac{\pi}{6}, \rho=3$ болса, онда осы түзудің теңдеуін жазыңыз.
2) түзудің полюстен бастап санағанда полярлық осьтен қиятын a_1 кесіндісін және осы түзудің нормалінің α полярлық бұрышы. $a=2$, $\alpha=-\frac{2}{3}\pi$ болса, онда осы түзудің теңдеуін жазыңыз.
3) түзудің полярлық оське β көлбеу бұрышы және түзудің полюстен бастап санағанда полярлық осьтен қиятын a кесіндісі. $\beta=\frac{\pi}{6}$, $a = 6$ болса, онда осы түзудің теңдеуін жазыңыз.
382. M_1 $(\rho_1;\ \theta_1,)$ нүктесінен өтетін және полярлық оське β бұрышпен көлбейтін түзудің полярлық теңдеуін қорытып шығарыңыз.
383. M_1 $(\rho_1;\ \theta_1,)$ нүктесінен өтетін және нормальдың полярлық бұрышы α–ге тең болатын түзудің полярлық теңдеуін қорытып шығарыңыз.
384. M_1 $(\rho_1;\ \theta_1,)$ және M_2 $(\rho_2;\ \theta_2)$ нүктелерінен өтетін түзудің теңдеуін құрыңыз.

4 Екінші ретті қисықтардың геометриялық қасиеттері

4.1 Шеңбердің теңдеуі

Центр деп аталатын, берілген нүктеден берілген қашықтықта орналасқан нүктелер жиынының теңдеуін құрамыз. Жазықтықта осылайша анықталған нүктелер жиыны шеңбер деп аталады.
Жазықтықта қандай–да бір тікбұрышты координаталар жүйесі және 0_1 (x_1, y_1) , M (x,y)нүктелері берілсін.

$$x^2+y^2=a^2$$

– центрі (0; 0) координаталар бас нүктесінде, радиусы $r = a$, болатын шеңбердің теңдеуі.
$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$ – центрі $C(a,\ b)$ нүктесінде, радиусы $r = a$, болатын шеңбердің теңдеуі.

385. Келесі жағдайлардың әрқайсысына шеңбердің теңдеуін құрыңыз:
1) шеңбердің центрі координаталар бас нүктесімен беттеседі және радиусы $R = 3$;
2) шеңбердің центрі C (2;–3) нүктесімен беттеседі және оның радиусы $R=7$;
3) шеңбер координатала басынан өтіп, центрі C (6;–8) нүктесімен беттеседі;
4) шеңбер A (2, 6) нүктесінен өтеді және оның центрі C (–1, 2) нүктесімен беттеседі;
5) A (3, 2) және B (–1, 6) нүктелері шеңбердің қандай да бір диаметрінің шеткі нүктелері;
6) шеңбердің центрі координаталар бас нүктесімен беттеседі және $3x – 4y + 20 = 0$ түзуі шеңберге жанама болып табылады;
7) шеңбердің центрі C (1;–1) нүктесімен беттеседі, ал $5x – 12y + 9 = 0$ түзуі шеңберге жанама болып табылады;
8) шеңбер A (3,1) және B (–1,3) нүктелерінен өтеді және оның центрі $3x – y – 2 = 0$ түзуі бойында орналасқан;
9) шеңбер үш нүкте арқылы өтеді: A (1, 1), B (1; – 1) және C (2; 0);
10) шеңбер үш нүкте арқылы өтеді : M_1(– 1; 5), M_2(– 2; – 2) и M_3 (5; 5).
386. Центрі C (3; – 1) нүктесі болатын шеңбер, $2x – 5y + 18 = 0$ түзуінен ұзындығы 6–ға тең хорда қиып өтеді. Осы шеңбердің теңдеуін құрыңыз.
387. Радиусы $R = \sqrt{5}$ болатын, $x – 2y – 1=0$ түзуін M_1 (3; 1) нүктесінде жанайтын шеңберлердің теңдеуін құрыңыз.
388. $2x + y – 5 = 0$, $2x + y +15 = 0$ параллель түзулердің біреуін A (2, 1) нүктесінде жанайтын шеңберлердің теңдеуін құрыңыз.
389. A (1, 0) нүктесінен өтетін, $2x + y + 2 = 0$, $2x + y – 18 = 0$, екі параллель түзулерді жанайтын шеңберлердің теңдеуін құрыңыз.
390. Центрі $2x + y = 0$ түзуінде жататын, $4x – 3y + 10 = 0$, $4x – 3y – 30 = 0$ түзулерін жанайтын шеңберлердің теңдеуін құрыңыз.
391. $7x – y – 5 = 0$, $x + y + 13 = 0$ қиылысатын түзулердің бірін M_1 (1; 2) нүктесінде жанайтын шеңберлердің теңдеуін құрыңыз.
392. Координаталар бас нүктесі арқылы өтетін және $x+2y–9=0$, $2x–y+2=0$ қиылысатын түзулерді жанайтын шеңберлердің теңдеуін құрыңыз.
393. Центрлері $4x–5y–3=0$ түзуінде жататын, $2x–3y–10=0$, $3x–2y+5=0$ түзулерін жанайтын шеңберлердің теңдеуін құрыңыз.
394. A (–1, 5) нүктесінен өтетін және $3x + 4y – 35 = 0$, $4x + 3y + 14 = 0$ қиылысатын түзулерді жанайтын шеңберлердің теңдеуін құрыңыз.
395. $4x – 3y – 10 = 0$, $3x – 4y – 5 = 0$ және $3x – 4y – 15 = 0$ түзулерін жанайтын шеңберлердің теңдеуін құрыңыз.
396. $3x + 4y – 35 = 0$, $3x – 4y – 35 = 0$ және $x – 1 = 0$ түзулерін жанайтын шеңберлердің теңдеуін құрыңыз.

397. Төмендегі теңдеулердің қайсысы шеңберлерді анықтайды? Әрқайсысының С–центрін және радиусын табыңыз:
1) $(x – 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$; 2) $(x + 2)^2 + y^2 = 64$; 3) $(x–5)^2 + (y + 2)^2 = 0$;
4) $x^2 + (y – 5)^2 = 5$; 5) $x^2+y^2 – 2x + 4y – 20 = 0$; 6) $x^2+y^2 – 2x + 4y + 14 = 0$;
7) $x^2 + y^2 + 4x – 2y + 5 = 0$; 8) $x^2 + y^2 + x = 0$, 9) $x^2 + y^2 + 6x – 4y + 14 = 0$;
10) $x^2 + y^2 + y =0$
398. Келесі теңдеулер қандай сызықтарды анықтайды? Осы сызықтардың сызбасын сызыңыз.
1) $y = +\sqrt{9 - x^2}$; 6) $y = 15 - \sqrt{64 - x^2}$;
2) $y = -\sqrt{25 - x^2}$; 7) $x = -2 - \sqrt{9 - y^2}$;
3) $x = -\sqrt{4 - y^2}$; 8) $x = -2 + \sqrt{9 - y^2}$;
4) $x = +\sqrt{16 - y^2}$; 9) $y = -3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$;
5) $y = 15 + \sqrt{64 - x^2}$; 10) $x = -5 + \sqrt{40 - 6y - y^2}$.
399. А(1; –2) нүктесі шеңберге қатысты қалай орналасқанын анықтаңыз: – шеңбердің ішінде ма, сыртында ма, әлде шеңбердің бойында ма?
1) $x^2 + y^2 = 1$; 2) $x^2 + y^2 = 5$; 3) $x^2 + y^2 = 9$;
4) $x^2 + y^2 – 8x – 4y – 5 = 0$; 5) $x^2 + y^2 – 10x + 8y = 0$.
400. Келесі теңдеулермен берілген шеңберлердің центрлік сызықтарының теңдеулерін анықтаңыз:
1) $(x – 3)^2 + y^2 = 9$ және $(x + 2)^2 + (y – 1)^2 = 1$;
2) $(x + 2)^2 + (y – 1)^2 = 16$ және $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 25$;
3) $x^2 + y^2 – 4x + 6y = 0$ және $x^2 + y^2 – 6x = 0$;
4) $x^2 +y – x + 2y = 0$ және $x^2 + y^2 + 5x + 2y – 1 = 0$.
401. $5x + 2y –13 = 0$ түзуіне перпендикуляр болатын $x^2+y^2 + 4x – 6y – 17 = 0$ шеңбердің диаметрінің теңдеуін жазыңыз.
402. Келесі жағдайлардың әрқайсысында нүктеден шеңберге дейінгі ең қысқа ара қашықтықты есептеңіз:
а) $A(6; – 8)$, $x^2 + y^2 = 9$; б) $B(3; 9)$, $x^2 + y^2 – 26x + 30y + 313 = 0$;
в) $C(– 7; 2)$, $x^2 + y^2 – 10x – 14y – 151=0$.
403. $7x – y + 12 = 0$ түзуі мен $(x – 2)^2 + (y –1)^2 = 25$ шеңберінің қиылысу нүктелерінің координаталарын анықтаңыз.
404. Берілген түзулер шеңберге қатысты қалай орналасқанын анықтаңыз: (қиылысады, жанасады немесе сыртында жатады):
1) $y = 2x – 3$ және $x^2 + y^2 – 3x + 2y – 3 = 0$;
2) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ және $x^2 + y^2 – 8x + 2y + 12 = 0$;
3) $y = x + 10$ және $x^2 + y^2 – 1 = 0$.
405. $y = kx$ түзуінің k бұрыштық коэффициентінің қандай мәндерінде келесі шарттардың орындалатынын анықтаңыз:
1) түзу $x^2 + y^2 – 10x + 16 = 0$ шеңберімен қиылысады;

2) түзу $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ шеңберімен жанасады;

3) түзу $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ шеңберінің сыртында жатады.

406. $y = kx + b$ түзуі $x^2 + y^2 = R^2$ шеңберін жанайтын шартты қорытып шығарыңыз.

407. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$ теңдеуімен берілген шеңберді $x - 2y - 3 = 0$ түзуі қиып өтетін хорданың ортасы арқылы өтетін, диаметрінің теңдеуін құрыңыз:

408. $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 169$ шеңберінің, M (8,5;3,5) нүктесінде қақ бөлінетін, хордасының теңдеуін жазыңыз.

409. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$ шеңберінің $A(1; 2)$ нүктесінде нүктесінде қақ бөлінетін, хордасының ұзындығын табыңыз.

410. $\alpha\ (x - 8y + 30) + \beta\ (x + 5y - 22) = 0$ түзулер шоғының теңдеуі берілген. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$ шеңберде ұзындығы $2\sqrt{3}$–ке тең хорданы қиып өтетін, осы түзулер шоғының түзулерін табыңыз.

411. $M_1(x_1;\ y_1)$ және $M_2(x_2;\ y_2)$ нүктелерінде қиылысатын $(x-m_1)^2+(y-n_1)^2=R_1^2$, $(x-m_2)^2+(y-n_2)^2=R_2^2$ екі шеңбер берілген. M_1, M_2 нүктелері және M_1M_2 түзуі арқылы өтетін кез келген шеңбер $\alpha\ [(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 - R_1^2] + \beta\ [(x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 - R_2^2] = 0$ теңдеуімен анықталатынын дәлелдеңіз.

412. A (1; –1) нүктесі арқылы және $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x + 12y - 35 = 0$ шеңберлерінің қиылысу нүктелері арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін құрыңыз.

413. Координаталар бас нүктесі арқылы және $(x+3)^2+(y+1)^2=25$, $(x-2)^2+(y+4)^2=9$ шеңберлерінің қиылысу нүктелері арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін құрыңыз.

414. $x^2 + y^2 + 3x - y = 0$, $3x^2 + 3y^2 + 2x+y = 0$ шеңберлерінің қиылысу нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін құрыңыз.

415. $x^2 + y^2 = 2x$ шеңберінің центрінен $x^2 + y^2 + 5x - 8y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x + 7y - 25 = 0$ шеңберлерінің қиылысу нүктелері арқылы өтетін түзуге дейінгі арақашықтықты табыңыз.

416. $x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$,$x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0$ шеңберлерінің ортақ хордасының ұзындығын табыңыз.

417. Шеңбердің центрі $x + y = 0$ түзуінің бойында орналасқан. Шеңбер $(x- 1)^2 + (y + 5)^2 = 50$ және $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 =10$ шеңберлерінің қиылысу нүктелерінен өтетіні белгілі болса, осы шеңбердің теңдеуін құрыңыз.

418. $x^2 + y^2 = 5$ шеңберге A (– 1, 2) нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін құрыңыз.

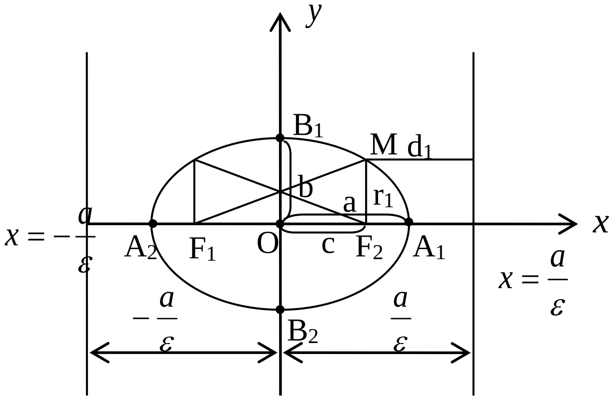
419. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ шеңберге $A(-5;7)$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін құрыңыз.

420. $16x^2 + 16y^2 + 48x - 8y - 43 = 0$ шеңберінде $8x - 4y + 73 = 0$ түзуіне жақын орналасқан M_1 нүктесін табу керек және M_1 нүктесінен осы түзуге дейінгі d қашықтықты есептеңіз.
421. $M_1(x_1, y_1)$ нүктесі $x^2 + y^2 = R^2$ шеңберінде жатады. Осы шеңберге M_1 жүргізілген жанаманың теңдеуін құрыңыз.
422. $M_1(x_1, y_1)$ нүктесі $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ шеңберінде жатады. Осы шеңберге M_1 жүргізілген жанаманың теңдеуін құрыңыз.
423. $(x - 2)^2 + y^2 = 5$ шеңбер мен $3x - y - 1 = 0$ түзуінің қиылысуынан пайда болған сүйір бұрышты анықтаңыз. (Түзу мен шеңбер арасындағы бұрыш деп, олардың қиылысу нүктесінде жүргізілген жанама мен түзу арасындағы бұрышты атайды).
424. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$, $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$ шеңберлері арасындағы бұрышты табыңыз. (Екі шеңбер арасындағы бұрыш деп, олардың қиылысу нүктелерінде жүргізілген жанамалар арасындағы бұрышты атайды)
425. $(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 = R_1^2$, $(x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 = R_2^2$ шеңберлерінің тік бұрыш жасап қиылысатын шартын қорытып шығарыңыз.
426. $x^2+y^2-2mx-2ny-m^2+n^2=0$, $x +y^2-2nx+2my+m^2-n^2 = 0$ шеңберлердің тік бұрыш жасап қиылысатынын дәлелдеңіз.
427. A $\left(\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right)$ нүктесінен $x^2 + y^2 = 5$ шеңберіне жанамалар жүргізілген. Олардың теңдеулерін құрыңыз.
428. A (1; 6) нүктесінен $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ шеңберіне жанамалар жүргізілген. Олардың теңдеулерін құрыңыз.
429. $\alpha(3x + 4y - 10) + \beta(3x - y - 5)=0$ түзулер шоғының теңдеуі берілген. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ шеңберін жанайтын, осы шоқтың түзулерін табыңыз.
430. A (4; 2) нүктесінен $x^2 + y^2 = 10$ шеңберіне жанамалар жүргізілген. Осы жанамалар арасындағы бұрышты анықтаңыз.
431. P (2; –3) нүктесінен $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 4$ шеңберіне жанамалар жүргізілген. Жанасу нүктелерін қосатын хорданың теңдеуін құрыңыз.
432. C (6; –8) нүктесінен $x^2 + y^2 = 25$ шеңберіне жанамалар жүргізілген. C нүктесінен жанасу нүктелерін қосатын хордаға дейінгі d қашықтықты есептеңіз.
433. P(–9 3) нүктесінен $x^2+y^2-6x+4y-78=0$ шеңберіне жанамалар жүргізілген. Шеңбердің центрінен жанасу нүктелерін қосатын хордаға дейінгі d қашықтықты есептеңіз.
434. M(4;–4) нүктесінен $x^2+y^2-6x+2y+5=0$ шеңберіне жанамалар жүргізілген. Жанасу нүктелерін қосатын хорданың d ұзындығын есептеңіз.
435. A(1;–2) нүктесінен $x^2+y^2 +6x + 2y+5 = 0$ шеңберіне жүргізілген жанаманың ұзындығын есептеңіз.

436. $2x + y - 7 = 0$ түзуіне параллель болатын, $x^2 + y^2 + 10x + 2y + 6 = 0$ шеңберіне жүргізілген жанаманың теңдеуін құрыңыз.
437. $x - 2y + 9 = 0$ түзуіне перпендикуляр болатын, $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ шеңберіне жүргізілген жанаманың теңдеуін құрыңыз.
438. Берілген R радиусы және полярлық координата арқылы берілген C (R; θ_0) центрі бойынша шеңбердің полярлық координатадағы теңдеуін құрыңыз.
439. Берілген R радиусы арқылы және полярлық координатадағы центрлері берілген шеңбердің полярлық координатадағы теңдеуін құрыңыз: 1) C(R; 0); 2) C(R; π); 3) C(R; $\frac{\pi}{2}$); 4) C(R; $-\frac{\pi}{2}$).
440. Келесі шеңберлердің әрқайсысының полярлық координатадағы центрлерін және радиустарын анықтаңыз:
1) $\rho = 4\cos\theta$; 2) $\rho = 3\sin\theta$; 3) $\rho = -2\cos\theta$; 4) $\rho = -5\cos\theta$;
5) $\rho = 6\cos(\frac{\pi}{3} - \theta)$; 6) $\rho = 8\sin(\theta - \frac{\pi}{3})$; 7) $\rho = 8\sin(\frac{\pi}{3} - \theta)$.
441. Шеңберлер полярлық координатадағы теңдеулерімен берілген:
1) $\rho = 3\cos\theta$; 2) $\rho = -4\sin\theta$; 3) $\rho = \cos 6\theta - \sin 6\theta$
Полярлық ось оң *Ox* жарты осімен, ал полюсі координаталар басымен сәйкес келетіндей етіп, олардың декарттық тікбұрышты координаталар жүйесіндегі теңдеулерін жазыңыз.
442. Декарттық тікбұрышты координаталар жүйесіндегі шеңберлердің теңдеулері:
1) $x^2 + y^2 = x$; 2) $x^2 + y^2 = -3x$; 3) $x^2 + y^2 = 5y$; 4) $x^2 + y^2 = -y$; 5) $x^2 + y^2 = x + y$.
Полярлық ось оң *Ox* жарты осімен, ал полюсі координаталар басымен сәйкес келетіндей етіп, олардың полярлық координаталардағы теңдеулерін жазыңыз.
443. $\rho = R$ шеңберін M_1 (R; θ_0) нүктесінде жанайтын жанаманың полярлық теңдеуін құрыңыз.

4.2 Эллипстің теңдеуі, қасиеттері

Анықтама: Фокустар деп аталатын берілген екі нүктеден қашықтықтарының қосындысы әрқашан тұрақты шама болатын нүктелердің геометриялық орындарын эллипс деп атайды .
F_1, F_2–фокустар, M– эллипстің кез келген нүктесі. F_1M, F_2M – эллипстің фокальдық радиустары.Анықтама бойынша $F_1M + F_2M = 2a$ тұрақты шама.
$F_1F_2 = 2c$ фокустар арасындағы арақашықтық. Эллипстің анықтамасы бойынша $2a > 2c$ немесе $a > c$. $F_2(-c;0)$,$F_1(c;0)$– фокустың координаталары.



Эллипс берілсін. Егер берілген эллипстің фокустары декартты тікбұрышты координаталар жүйесіндегі абсцисса осінің бойында, берілген координаталар жүйесіне қатысты симметриялы орналасса, онда осы координаталар жүйесіндегі эллипстің теңдеуі келесі түрде болады:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (1)} – \text{эллипстің канондық теңдеуі; } b^2=a^2-c^2;\ a>b.$$

$\frac{c}{a}=\varepsilon$ шамасы эллипстің эксцентриситеті деп аталады, эллипс үшін $\varepsilon < 1$.

$\begin{cases} r_2 = a + x\varepsilon \\ r_1 = a - x\varepsilon \end{cases}$ эллипстің фокальдық радиустары үшін анықталған формула.

Анықтама: Эллипстің фокальді осіне перпендикуляр және оның центрінен $x=\frac{a}{\varepsilon}$, $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ қашықтықта орналасқан екі түзу эллипстің директрисалары деп аталады.

Директрисаның қасиеті

Эллипстің кез келген нүктесінен фокусқа дейінгі арақашықтықтың сәйкес директсисаға дейінгі арақашықтыққа қатынасы ε – тұрақты шамаға тең.

$\boxed{\frac{r}{d}=\varepsilon}$ – директрисаның қасиеті

444. Келесі шарттар бойынша, фокустары абсцисса осінің бойында координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы орналасқан эллипстің теңдеуін құрыңыз:

1) жарты осьтері 5 және 2 болса;

2) үлкен осі 10–ға тең, ал фокустар арасындағы қашықтық 2c = 8 болса;

3) кіші осі 24, ал фокустар арасындағы қашықтық 2c = 10;

4) фокустар арасындағы қашықтық 2c = 6 және эксцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$ болса;

5) үлкен осі 20–ға тең, алэксцентриситеті $\varepsilon=\frac{1}{2}$ болса ;

6) кіші осі 10 және эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$ болса;

7) директрисалары арасындағы қашықтық 5–ке тең, ал фокустар арасындағы қашықтық 2с = 4 болса;

8) үлкен осі 8–ге тең, директрисалары арасындағы қашықтық 16–ға тең болса;

9) кіші осі 6–ға тең, директрисалары арасындағы қашықтық 13–ке тең болса;

10) директрисалары арасындағы қашықтық 32 және $\varepsilon = \frac{1}{2}$ болса.

445. Келесі шарттар бойынша, фокустары ордината осінің бойында координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы орналасқан эллипстің теңдеуін құрыңыз:

1) жарты осьтері 7 және 2–ге тең болса;

2) үлкен осі 10–ға тең, ал фокустар арасындағы қашықтық 2с = 8 болса;

3) 2с = 24 және эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{12}{13}$ болса;

4) кіші осі 16–ға тең және эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{3}{5}$ болса;

5) фокустар арасындағы қашықтық 2с = 6, ал директрисалары арасындағы қашықтық 16–ға тең болса;

6) директрисалары арасындағы қашықтық $10\frac{2}{3}$ және эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{3}{4}$ болса.

446. Келесі эллипстардың әрқайсысының жарты осьтерін анықтаңыз:

1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; 3)$x^2 + 25y^2 = 25$; 4) $x^2 + 5y^2 = 15$; 5) $4x^2 + 9y^2 = 25$;
6) $9x^2 + 25y^2 = 1$; 7) $x^2 + 4y^2 = 1$; 8) $16x^2 + y^2 = 16$;) $25x^2 + 9y^2 = 1$;
10) $9x^2 + y^2 = 1$.

447. Эллипс берілген $9x^2 + 25y^2 = 225$. Оның 1) жарты осьтерін; 2) фокустарын; 3) эксцентриситетін; 4) директрисасының теңдеулерін табыңыз.

448. Екі төбесі $x^2 + 5y^2 = 20$теңдеуімен берілген эллипстің фокустарында жататын, ал екі төбесі кіші осінің ұштарында жататын төртбұрыштың ауданын табыңыз.

449. Эллипс берілген $9x^2 + 5y^2 = 45$. Оның 1) жарты осьтерін; 2) фокустарын; 3) эксцентриситетін; 4) директрисасының теңдеулерін табыңыз.

450. Екі төбесі $9x^2 + 5y^2 = 1$ теңдеуімен берілген эллипстің фокустарында жататын, ал екі төбесі кіші осінің ұштарында жататын төртбұрыштың ауданын табыңыз.

451. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ теңдеуімен берлген эллипстің F (c; 0) фокусынан онымен бір жақта жатқан директрисаға дейінгі қашықтықты есептеңіз.

452. Жалғыз циркульді пайдаланып, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$эллипстің фокустарын салыңыз (координат осьтері мен масштаб бірлігі берілген деп есептеңіз).

453. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ теңдеуімен берлген эллипсте абсциссы –3–ке тең нүктелерді табыңыз.

454. Берілген нүктелер қайсысы $A_1(–2;3)$, $A_2(2;–2)$, A_3 (2;–4), $A_4(–1;3)$, $A_5(–4;–3)$, $A_6(3;–1)$, $A_7(3;–2)$, A_8 (2; 1), $A_9(0;\ 15)$ және $A_{10}(0;\ –16)$ $8x^2+5y^2 = 77$ эллипста жатады, қайсысы оның ішінде және қайсысы сыртында жататынын анықтаңыз.

455. Келесі теңдеулермен қандай сызықтар анықталатынын табыңыз:

1) $y=+\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$; 2) $y=-\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$;

3) $y=-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$; 4) $y=+\frac{1}{7}\sqrt{49-y^2}$.

Чертежде осы сызықтарды салыңыз.

456. Эллипстің эксцентриситеті $\varepsilon=\frac{2}{3}$, ал эллипстің М нүктесінің фокальдық радиусы 10–ға тең. М нүктесінен осы фокуспен бір жақта жататын директрисаға дейінгі қашықтықты есептеңіз.

457. Эллипстің эксцентриситеті $\varepsilon=\frac{2}{5}$, ал эллипстің М нүктесінен директрисаға дейінгі қашықтық 20–ға тең. М нүктесінен осы директрисамен бір жақта жататын фокусқа дейінгі қашықтықты есептеңіз.

458. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ эллипстің бойында жатқан M_1 $(2;-\frac{5}{3})$ нүктесі берілген. M_1 нүктесінің фокальдық радиустары жататын түзулердің теңдеулерін құрыңыз.

459. M_1 (– 4;2,4) нүктесінің $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ эллипстің бойында жататынына көз жеткізіп, M_1 нүктесінің фокальдық радиусын анықтаңыз.

460. Эллипстің эксцентриситеті $\varepsilon=\frac{1}{3}$ тең, оның центрі координаталар бас нүктесінде орналасқан, фокустарының бірі F(–2; 0). Эллипстің абсциссасы 2–ге тең M_1 нүктесінен осы фокуспен бір жақта жатқан директрисаға дейінгі қашықтықты есептеңіз.

461. Эллипстің эксцентриситеті $\varepsilon=\frac{1}{2}$тең , оның центрі координаталар бас нүктесінде орналасқан, директрисаларының бірі x=16 теңдеуімен берілген. Эллипстің абсциссасы –4–ке тең M_1 нүктесінен осы директрисамен бір жақта жатқан фокусқа дейінгі қашықтықты есептеңіз.

462. Эллипс $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$теңдеуімен берілген. Оң жақ фокусқа дейінгі ара қашықтығы 14– ке тең болатын эллипстің нүктелерін анықтаңыз.

463. Эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$теңдеуімен берілген. Сол жақ фокусқа дейінгі ара қашықтығы 2,5– ке тең болатын эллипстің нүктелерін анықтаңыз.

464. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{15}=1$ теңдеуімен берілген эллипстің фокусы арқылы үлкен осіне перпендикуляр жүргізілген. Осы перпендикулярдың эллипспен қиылысу нүктелерінен фокустарға дейінгі арақашықтықты табыңыз.

465. Келесі шарттар бойынша, фокустары абсцисса осінің бойында координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы орналасқан эллипстің теңдеуін құрыңыз:

1) M_1 (–2$\sqrt{5}$; 2) эллипстің нүктесі және оның кіші жарты осі b = 3 болса;

2) M_2 (2; –2) эллипстің нүктесі және оның үлкен жарты осі a = 4 болса;

3) M_1 (4; $-\sqrt{3}$) және M_2 (2$\sqrt{2}$, 3) эллипс нүктелері болса;

4) M_1 ($\sqrt{15}$;–1) эллипстің нүктесі және 2c=8 фокустар арасындағы қашықтық болса;

5) M_1 (2;$-\frac{5}{3}$) эллипстің нүктесі және оның эксцентриситеті $\varepsilon=\frac{2}{3}$ болса;

6) M_1 (8;12) эллипстің нүктесі және осы нүктеден сол жақ фокусқа дейінгі қашықтығы r_1=20 болса;

7) M_1 ($-\sqrt{5}$,2) эллипстің нүктесі және оның директрисаларының ара қашықтығы 10 болса.

466.1) егер эллипстің кіші осі оның фокустарынан 60 ° бұрышпен көрінсе;

2) егер фокустарды қосатын кесінді кіші осьтердің төбесінен тік бұрышпен көрінсе;

3) директрисалар арасындағы қашықтық фокустар арасындағы қашықтықтан үш есе үлкен болса эллипстің эксцентриситетін анықтаңыз.

467. Эллипстің F фокусы арқылы оның үлкен осіне перпендикуляр жүргізілген. Эллипстің эксцентриситетінің қандай мәнінде $O\overline{C}$ және $A\overline{B}$ кесінділері параллель болатынын анықтаңыз.

468. Егер эллипстің симметрия осьтерінің координаталар осьтеріне параллель екені белгілі болса, центрі C (x_0; y_0), жарты осьтері a, b болатын эллипстің теңдеуін құрыңыз.

469. Эллипс абсцисса осін A (3, 0) нүктесінде және ордината осін B(0; –4) нүктесінде жанайды. Оның симметрия осьтерінің координаталар осьтеріне параллель екенін біле отырып, эллипстің теңдеуін құрыңыз.

470. С (–3;2) нүктесі – екі координата осьтерін жанайтын эллипстің центрі. Симметрия осьтерінің координаталар осьтеріне параллель екенін біле отырып, эллипстің теңдеуін құрыңыз.

471. Келесі теңдеулердің әрқайсысы эллипстің теңдеуі екенін көрсетіңіз және оның С центрінің координаталарын, жарты осьтерін, экстентриситетін мен диресктрисаларының теңдеуін табыңыз.

1) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

2) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;

3) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

472. Келесі теңдеулермен қандай сызықтар анықталатынын табыңыз:

1) $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2}$;   2) $y = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{-6x - x^2}$;

3) $x = -2\sqrt{-5 - yx - y^2}$;   4) $y = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8 + 2y - y^2}$.

Осы сызықтардың сызбасын салыңыз.

473. Келесі берілгендер бойынша эллипстің теңдеуін құрыңыз:

1) үлкен осі 26, ал фокустары – $F_1(-10; 0)$, $F_2(14; 0)$;

2) кіші осі 2, ал фокустары $F_1(-1, -1)$, F_2 $(1, 1)$;

3) фокустары $F_1(2; \frac{3}{2})$, $F_2(2; -\frac{3}{2})$ және эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) фокустары $F_1(l,3)$, $F_2(3;1)$ мәндері және директрисалар арасындағы қашықтық $12\sqrt{2}$.

474. Эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{2}{3}$, фокусы $F(-4;1)$ және оған сәйкес директрисаның теңдеуі $x - 5 = 0$ болса, эллипстің теңдеуін құрыңыз.

475. Эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{1}{2}$, фокусы $F(-4;1)$ және оған сәйкес директрисаның теңдеуі $y + 3 = 0$ болса, эллипстің теңдеуін құрыңыз.

476. А (–3;–5) нүктесі фокусы $F(-1,-4)$ және оған сәйкес диресктрисаның теңдеуі $x-2=0$ болатын эллипске тиісті. Осы эллипстің теңдеуін құрыңыз.

477. Эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{1}{2}$, фокусы $F(3;0)$ және оған сәйкес директрисаның теңдеуі $x + y - 1 = 0$ болса, эллипстің теңдеуін құрыңыз.

478. M_1 (2;–1) нүктесі фокусы $F(l; 0)$ және оған сәйкес диресктрисаның теңдеуі $2x-y-10=0$ болатын эллипске тиісті. Осы эллипстің теңдеуін құрыңыз.

479. $M_1(3; -1)$ нүктесі – фокустары $y + 6 = 0$ түзуінде жатаын, эллипстің кіші осінің бір ұшының координатасы. Эллипстің эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$ екенін біле отырып, оның теңдеуін құрыңыз.

480. $x + 2y - 7 = 0$ түзу мен $x^2 + 4y^2 = 25$ эллипстің қиылысу нүктелерін табыңыз.

481. $3x+10y-25=0$ түзу мен $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ эллипстің қиылысу нүктелерін табыңыз.

482. $3x - 4y - 40 = 0$ түзу мен $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипстің қиылысу нүктелерін табыңыз.

483. Егер түзу мен эллипс келесі теңдеулермен берілсе, эллипске қатысты түзудің қалай орналасқанын анықтаңыз: қиылысады ма, жанайды ма немесе эллипстің сыртынан өтеді ма:

1) $2x-y-3=0$, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

2) $2x+y-10=0$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

3) $3x+2y-20=0$, $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$

484. m –нің қандай мәнінде $y=-kx+m$ түзуі :

1) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ теңдеуімен берілген эллипспен қиылысады;

2) оны жанайды; 3) эллипспен қиылыспайды.

485. Қандай шарт орындалғанда $y=kx+m$ түзуі $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсті жанайды.

486. $M_1(x_1; y_1)$ нүктесінде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипске жүргізілген жанаманың теңдеуін құрыңыз.

487. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипске бір диаметрдің ұштарынан жүргізілген жанамалардің параллель екенін дәлелдеңіз. (Эллипстің диаметрі деп, оның центрі арқылы өтетін ең үлкен хорда аталады).

488. $3x + 2y + 7 = 0$ түзуіне параллель болатын, $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$ эллипске жүргізілген жанамалардың теңдеулерін құрыңыз.

489. $2x-2y-13=0$ түзуіне перпендикуляр болатын, $x^2+4y^2=20$ эллипске жүргізілген жанамалардың теңдеулерін құрыңыз.

490. $4x-2y+23=0$ түзуіне параллель болатын, $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ эллипстің жанамаларының теңдеулерін құрыңыз және олардың арасындағы d қашықтықты есептеңіз.

491. $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ эллипсте $2x-3y+25=0$ түзуіне ең жақын орналасқан M_1 нүктесін табыңыз және осы нүктеден берілген түзуге дейінгі қашықтықты есептеңіз.

492. A($\frac{10}{3};\frac{5}{3}$) нүктесінен $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$эллипске жүргізілген жанамалардың теңдеулерін құрыңыз.

493. C(10;–8) нүктесінен $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ эллипске жанамалар жүргізілген. теңдеуін құрыңыз.

494. P(–16;9) нүктесінен $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ эллипске жанамалар жүргізілген. Осы P нүктесінен жанасу нүктелерін қосатын хордаға дейінгі қашықтықты есептеңіз.

495. Эллипс A (4;–1) нүктесі арқылы өтеді және x+4y–10=0 түзуін жанайды. Эллипстің осьтері координата осьтерімен беттесетіні белгілі болса, оның теңдеуін құрыңыз.

496. 3*x*–2*y*–20=0, *x*+6*y*–20 = 0 түзулерін жанайтын, осьтері координата осьтерімен беттесетін эллипстің теңдеуін құрыңыз.

497. Эллипстің центрінен оның кез келген нүктесінде жүргізілген жанамасы мен фокальдық осінің қиылысу нүктесіне дейінгі арақашықтық пен жанасу нүктесінен фокальдық оське түскен перпендикулярдың табанына дейінгі арақашықтықтардың көбейтіндісі тұрақты шама және ол эллипстің үлкен жарты осінің квадратына тең екенін дәлелдеңіз.

498. Эллипстің фокустарынан кез келген жанамаға дейінгі арақашықтықтардың көбейтіндісі оның кіші жарты осінің квадратына тең екенін дәлелдеңіз.

499. *x – y – 5 = 0* түзуі фокустары F_1(–3;0) және F_2(3,0) нүктелерінде орналасқан эллипсті жанайды. Осы эллипстің теңдеуін құрыңыз.

500. *3x+10y –25* = 0 түзуі эллипстің жанамасы және кіші жарты осі b = 2 болатын, фокустары абсцисса осінде координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы орналасқан эллипстің теңдеуін құрыңыз.

501. Эллипсті қандай да бір M нүктесінде жанайтын түзу F_1M, F_2M фокалдық радиустармен бірдей бұрыш жасайтынын және F_1MF_2. бұрышынан тыс өтетінін дәлелдеңіз.

502. $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ эллипстің сол жақ фокусынан Ox осімен α доғал бұрыш жасайтын жарық сәулесі бағытталған. tgα=–2 екені белгілі. Сәуле эллипске дейін жетіп, шағылады. Шағылған сәуле жатқан түзудің теңдеуін құрыңыз.

503. Екі эллипстің қиылысу нүктелерін анықтаңыз: $x^2+9y^2–45=0$, $x^2+9y^2–6x–27=0$.

504. Екі эллипстің $n^2m^2+m^2y^2–m^2n^2 = 0$, $m^2x^2 + n^2y^2 – m^2n^2 = 0$ $(m\neq n)$

қиылысуынан пайда болған төрт нүкте, центрі координаталар бас нүктесінде орналақан шеңбердің бойында жататынын көрсетіңіз және сол шеңбердің радиусын анықтаңыз.

505. α және β жазықтықтары $\varphi = 30^0$ бұрыш жасайды. α жазықтығында жатқан R =10 тең шеңберді β жазықтығына проекциялаудан шыққан эллипстің жарты осьтерін табыңыз.

506. Кіші жарты осі 6-ға тең эллипс, радиусы R=12 тең шеңбердің проекциясы болып табылады. Эллипс және шеңбер жатқан жазықтықтар арасындағы бұрышты анықтаңыз.

507. Дөңгелек цилиндрдің бағыттаушысы радиусы R=8 шеңбер болып табылады. Цилиндрдің осімен 30° бұрыш жасайтын, цилиндрдің көлденең қимасында алынған эллипстің жарты осьтерін анықтаңыз.

508. Дөңгелек цилиндрдің бағыттаушысы радиусы R=$\sqrt{3}$ шеңбер болып табылады. Цилиндрдің көлденең қимасында алынған эллипстің үлкен жарты осі a=2 болу үшін, жазықтық цилиндрдің осін қандай бұрыш жасап қиып өтетінін табыңыз.

509. Жазықтықтың абсцисса осіне бірқалыпты сығылуы деп, $x' = x,\ y' = qy$ теңдіктері орындалатындай жазықтықтың кез келген $M(x;\ y)$ нүктесін $M'(x';y')$ нүктесіне көшуін атайды, мұндағы q>0 – бірқалыпты сығылу коэффициенті деп аталады. Тура осылай жазықтықтың ордината осіне бірқалыпты сығылуы анықталады. Жазықтықтың Oy ордината осіне бірқалыпты сығылуы $x'=qx,\ y' = y$ теңдіктерінің көмегімен анықталады.

Егер жазықтықтың абсцисса осіне бірқалыпты сығылу коэффициенті $q=\frac{4}{5}$ болса, $x^2 + y^2=25$ шеңбері қандай сызыққа түрленетінін анықтаңыз.

510.Жазықтықтың Oy осіне бірқалыпты сығылу коэффициенті $\frac{3}{4}$–ке тең. Осындай сығылуда $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипске түрленетін сызықтың теңдеуін анықтаңыз.

511. Егер жазықтықтың Ox және Oy осьтеріне бірқалыпты сығылу коэффициенттері сәйкесінше $\frac{4}{3}$ және $\frac{6}{7}$ тең болса, осы сығылуларды бірінен кейін бірін орныдағаннан кейін $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипске түрленетін сызықтың теңдеуін анықтаңыз.

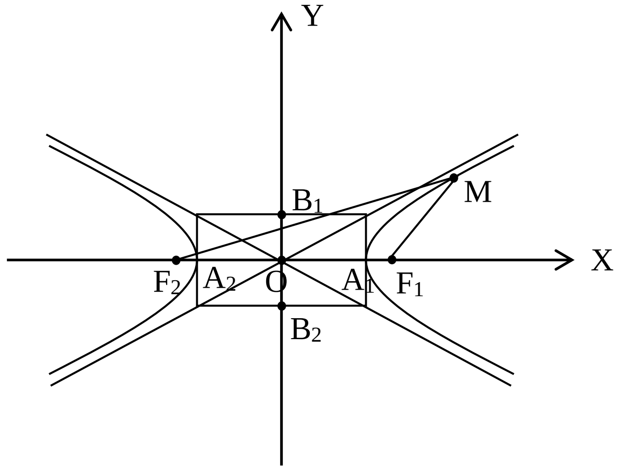
512. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ эллипсіне түрленетіндей, жазықтықтың Ox осіне бірқалыпты q сығылу коэффициентін анықтаңыз.

513. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{25}=1$ эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ эллипсіне түрленетіндей, жазықтықтың Oy осіне бірқалыпты сығылу коэффициентін анықтаңыз.

514. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипс $x^2+y^2=16$ шеңберіне түрленетіндей, жазықтықтың Ox және Oy осьтеріне бірқалыпты сығылу коэффициенттерін анықтаңыз.

4.3 Гиперболаның теңдеуі, қасиеттері

Анықтама: Фокустар деп аталатын берілген екі нүктеден қашықтықтарының айырымы арқашанда тұрақты шама болатын нүктелердің геометриялық орындарын гипербола деп атайды.
Көрсетілген айырым абсолют мәні бойынша алынады және 2a деп белгіленеді. Гиперболаның фокустарын F_1 және F_2 әріптерімен белгілейді, ал олардың арақашықтығы $F_1F_2=2c$ тең.
Анықтама бойынша $2a < 2c$, немесе $a < c$.



Гипербола берілсін. Координата осьтерін эллипсте сияқты таңдап аламыз. Онда таңдап алынған координаталар жүйесіндегі гиперболаның теңдеуі келесі түрде болады:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – (2) гиперболаның канондық теңдеуі, $b=\sqrt{c^2-a^2}$

$\varepsilon=\frac{c}{a}$ шамасы гиперболаның эксцентриситеті деп аталады, гипербола үшін

$$\underline{\varepsilon>1}$$

Гиперболаның эксцентриситеті оның негізгі төртбұрышының формасын, яғни гиперболаның формасын сипаттайды. ε аз болған сайын оның негізгі төртбұрышы созылыңқы болады.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ гиперболасы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболасымен түйіндес деп аталады.

$M(x;y)-$ гиперболаның кез келген нүктесі болсын. $F_2M=r_1$, $F_2M=r_1$ – M нүктесінің фокальдық радиустары.

$$\begin{cases} r_1 = \varepsilon x - a \\ r_2 = \varepsilon x + a \end{cases}$$ – гиперболаның оң тармағы үшін .

$$\begin{cases} r_1 = a - \varepsilon x \\ r_2 = -\varepsilon x - a \end{cases}$$ – гиперболаның сол тармағы үшін.

Анықтама: Гиперболаның, оны қиятын осіне перпендикуляр және центрден $\frac{a}{\varepsilon}$ арақашықтықта орналасқан екі түзу гиперболаның директрисалары деп аталады.

$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ – директрисалардың теңдеулеріі.

Егер r – кез келген нүктеден фокусақа дейінгі қашықтық , ал d – сол нүктеден - осы фокусқа сәйкес директрисаға дейінгі қашықтық болса, онда - $\frac{r}{d}$ қатынасы ε тұрақты шамаға тең. $\frac{r}{d} = \varepsilon$

515. Келесі шарттар бойынша, фокустары абсцисса осінің бойында координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы орналасқан гиперболаның теңдеуін құрыңыз:

1) гиперболаның осьтері осі 2a = 10 және 2b = 8;

2) 2c = 10 фокустар арасындағы қашықтық және кіші осі 2b = 8;

3) 2c = 6 фокустар арасындағы қашықтық және эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

4) үлкен осі 2a = 16 және эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

5) асимптоталарының теңдеулері y = $\pm\frac{4}{3}x$ және фокустар арасындағы қашықтық 2c= 20;

6) директрисалар арасындағы қашықтық 22 және 2c = 26;

7) директрисалар арасындағы қашықтық $\frac{32}{5}$ және кіші осі 2b = 6;

8) директрисалар арасындағы қашықтық $\frac{8}{3}$ және эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

9) асимптоталарының теңдеулері y=$\pm\frac{3}{4}x$ және директрисалар арасындағы қашықтық $12\frac{4}{5}$.

516. Келесі шарттар бойынша, фокустары ордината осінің бойында координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы орналасқан гиперболаның теңдеуін құрыңыз:

1) жарты осьтері a = 6, b = 18 тең болса;

2) фокустар арасындағы қашықтық 2c=8 және эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{5}{3}$болса;

3) асимптоталарының теңдеулері у=$\pm\frac{12}{5}x$ және төбелері арасындағы қашықтық 48–ге тең болса;

4) директрисалар арасындағы қашықтық $7\frac{1}{7}$ және эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{7}{5}$;

5) асимптоталарының теңдеулері у = $\pm\frac{4}{3}x$ және директрисалар арасындағы қашықтық $6\frac{2}{5}$ болса.

517. Келесі гиперболалардың әрқайсысының a және b жарты осьтерін анықтаңыз:

1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$ 3) $x^2 - 4y^2 = 16$;

4) $x^2 - y^2 = 1$; 5) $4x^2 - 9y^2 = 25$; 6) $25x^2 - 16y^2 = 1$; 7) $9x^2 - 16y^2 = 1$.

518. Гипербола берілген $16x^2 - 9y^2 = 144$. Оның 1) жарты осьтерін; 2) фокустарын; 3) эксцентриситетін; 4) асимптоталарының теңдеулерін; 5) директрисасының теңдеулерін табыңыз.

519 Гипербола берілген $16x^2 - 9y^2 = -144$. Оның 1) жарты осьтерін; 2) фокустарын; 3) эксцентриситетін; 4) асимптоталарының теңдеулерін; 5) директрисасының теңдеулерін табыңыз.

520. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ гиперболаның асимптоталары және $9x + 2y - 24 = 0$ түзуі арқылы құрылған үшбұрыштың ауданын есептеңіз

521. Келесі теңдеулермен қандай сызықтар анықталатынын табыңыз:

1) у = + $\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$, 2) у = $-3\sqrt{x^2 + 1}$, 3) х = $-\frac{4}{3}\sqrt{x^2 + 9}$, 4) у = + $\frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25}$.

Суретке осы сызықтарды сызыңыз.

522. $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$ гиперболаның бойында жатқан $M_1(10; -\sqrt{5})$ нүктесі берілген. M_1 нүктесінің фокальдық радиустары жататын түзулердің теңдеулерін құрыңыз. M_1 нүктесінің фокалды радиусы орналасқан сызықтар теңдеуін жазыңыз.

523. $M_1(-5; \frac{9}{4})$ нүктесінің $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ гипербола бойында жататынына көз жеткізіп, M_1 нүктесінің фокальдық радиустарын анықтаңыз.

524. Гиперболаның эксцентриситеті ε = 2, қандай да бір фокустан жүргізілген М нүктесінің фокальдық радиусы16–ға тең. М–нүктесінен осы фокуспен бір жақта жатқан директрисаға дейінгі қашықтықты есептеңіз.

525. Гиперболаның эксцентриситеті ε = 3, гиперболаның М нүктесінен директрисаға дейінгі қашықтық 4–ке тең. М–нүктесінен осы директрисамен бір жақта жатқан фокусқа дейінгі қашықтықты есептеңіз.

526. Гиперболаның эксцентриситеті $\varepsilon=2$, оның центрі координаталар бас нүктесінде жатыр және фокустарының бірі F (12, 0). Абсциссасы 13–ке тең гиперболаның M_1 нүктесінен дейін берілген фокусқа сәйкес директрисаға дейінгі қашықтықты есептеңіз.

527. Гиперболаның эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{3}{2}$, оның центрі координаталар бас нүктесінде жатыр және директрисаларының x = – 8 теңдеуімен берілген. Абсциссасы 10–ға тең гиперболаның M_1 нүктесінен дейін берілген директрисаға сәйкес дейінгі фокусқа қашықтықты есептеңіз.

528. Оң жақ фокусқа дейінгі қашықтығы 4,5 болатын, $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ гиперболаның нүктелерін табыңыз.

529. Сол жақ фокусқа дейінгі қашықтығы 7 болатын, $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ гиперболаның нүктелерін табыңыз.

530. $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ теңдеуімен берілген гиперболаның сол жақ фокусы арқылы төбелері арқылы өтетін оське перпендикуляр жүргізілген. Фокустардан осы перпендикулярдың гиперболамен қиылысу нүктелеріне дейінгі қашықтықтарды анықтаңыз.

531. Жалғыз циркульді пайдаланып, $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ гиперболаның фокустарын салыңыз(координата осьтері және масштаб бірлігі берілген деп есептеңіз).

532. Келесі шарттар бойынша, фокустары абсцисса осінің бойында координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы орналасқан гиперболаның теңдеуін құрыңыз:

1) $M_1(6; -1)$ және $M_2(-8; 2\sqrt{2})$ гиперболаның нүктелері болса;

2) $M_1(-5; 3)$ гиперболаның нүктесі және эксцентриситеті $\varepsilon = \sqrt{2}$ болса;

3) $M_1(\frac{9}{2}; -1)$ гиперболаның нүктесі және $y=\pm\frac{2}{3}x$ асимптоталарының теңдеулері болса;

4) $M_1(-3; \frac{5}{2})$ гиперболаның нүктесі және $y=\pm\frac{4}{3}$ директрисаларының теңдеулері болса;

5) $y=\pm\frac{3}{4}x$ асимптоталарының теңдеулері және $x = \pm\frac{16}{5}$ директрисаларының теңдеулері болса;

533. Теңқабырғалы гиперболаның эксцентриситетін анықтаңыз.

534. Егер төбелері арасындағы кесінді оған түйіндес гиперболаның фокустарынан 60° бұрышпен көрінсе, гиперболаның эксцентриситетін анықтаңыз.

535. Гиперболаның фокустары $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ теңдеуімен берілген эллипстің фокустарымен беттеседі. Егер эксцентриситеті ε=2 тең болса, гиперболаның теңдеуін құрыңыз.

536. Гиперболаның фокустары $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}$ = 1 теңдеуімен берілген эллипстің төбелерінде жатса, ал директрисалары осы эллипстің фокустары арқылы өтсе, гиперболаның теңдеуін құрыңыз.

537. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ теңдеуімен берілген гиперболаның фокусынан оның асимптотасына дейінгі қашықтық b –ға тең екенін дәлелдеңіз.

538. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболаның кез келген нүктесінен оның екі асимптоталарына жүргізілген қашықтықтың көбейтіндісінің тұрақты шама екенін және оның $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ –қа тең екенін дәлелдеңіз.

539. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболасының асимптоталарымен және оның кез келген нүктесінде асимптоталарға параллель түзулермен шектелген параллелограмм ауданының тұрақты шама екенін және ол $\frac{ab}{2}$ тең екенін дәлелдеңіз.

540. Жарты осьтері a және b, центрі $C(x_0; y_0)$ болатын және фокустары:
1) Ох осіне параллель; 2) Оу осіне параллель түзулерде орналасқан гиперболаның теңдеуін құрыңыз.

541. Келесі теңдеулердің әрқайсысы гиперболаны анықтайтынын көрсетіңіз және оның С центрінің координаталарын, жарты осьтерін, эксцентриситетін, асимптоталарының теңдеулерін және директрисаларының теңдеулерін табыңыз:
1) $16x^2 – 9y^9 – 64x – 54y–161 = 0$;
2) $9x^2 – 16y^2 + 90x + 32y – 367 = 0$;
3) $16x^2 – 9y^2 – 64x–18y+199 = 0$.

542. Келесі теңдеулер қандай сызықтарды анықтайтынын табыңыз :
1) $y = – 1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$, 2) $y = 7–\frac{2}{3}\sqrt{x^2-6x+13}$,
3) $x = 9 – 2\sqrt{y^2+4y+8}$, 4) $x = 5 – \frac{2}{3}\sqrt{y^2+4y-12}$.

Бұл сызықтарды сызбада бейнелеңіз.

543. Келесі берілгендер бойынша гиперболаның теңдеуін құрыңыз:
1) гиперболаның төбелерінің арақашықтығы 24–ке тең және фокустары $F_1(– 10; 2)$, $F_2(16; 2)$;

2) фокустары $F_1(3;4)$, $F_2(-3;-4)$ және директрисалар арасындағы қашықтық 3,6–ға тең;
3) асимптоталар арасындағы бұрыш 90° тең және фокустары $F_1(4;-4)$, $F_2(-2;2)$;

544. Гиперболаның эксцентриситеті $\varepsilon=\frac{5}{4}$, фокусы F(5;0) және оған сәйкес директрисаның теңдеуі $5x-16=0$ екені белгілі болса, гиперболаның теңдеуін құрыңыз.

545. Гиперболаның егер эксцентриситет $\varepsilon=\frac{13}{12}$, фокусы F(0;13) және оған сәйкес директрисаның теңдеуі $13y-144=0$ екені белгілі болса, гиперболаның теңдеуін құрыңыз.

546. A(–3;–5) нүктесі фокусы F(–2;–3), ал оған сәйкес директрисаның теңдеуі $x+1=0$ болатын гиперболада жатыр. Гиперболаның теңдеуін құрыңыз.

547. Гиперболаның эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{5}$, фокусы F(2;–3) және оған сәйкес директрисаның теңдеуі $3x-y+3=0$ екені белгілі болса, гиперболаның теңдеуін құрыңыз.

549. $x^2-y^2=a^2$ теңқабырғалы гиперболаның теңдеуі берілген. Гиперболаның асимптоталарын координата осьтері ретінде қабылдап, жаңа жүйедегі теңдеуін құрыңыз.

550. Келесі теңдеулердің әрқайсысы гиперболаны анықтайтынын көрсетіп, олардың әрқайсысы үшін центрлерін, жарты осьтерін және асимптоталарның теңдеулерін табыңыз және чертежін сызыңыз:
1) $xy=18$, 2) $2xy-9=0$, 3) $2xy+25=0$.

551. $2x-y-10=0$ түзуі мен $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ гиперболаның қиылысу нүктелерін табыңыз.

552. $4x-3y-16=0$ түзуі мен $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ гиперболаның қиылысу нүктелерін табыңыз.

553. $2x-y+1=0$ түзуі мен $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ гиперболаның қиылысу нүктелерін табыңыз.

554. Берілген түзу гиперболаға қатысты қалай орналасқанын анықтаңыз: қиылысады ма, жанайды ма немесе одан тыс жата ма:
1) $x-y-3=0$, $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$. 2) $x-2y+1=0$, $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. 3) $7x-5y=0$, $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

555. m–нің қандай мәнінде $y=5x+m$ түзуі: 1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ гиперболаны қиып өтеді; 2) оны жанайды; 3) осы гиперболадан тыс өтеді.

556. Қандай шарт орындалғанда y = kx + m түзуі $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболаны жанайды.

557. $M_1(x_1;\ y_1)$ нүктесінде $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболаға жүргізілген жанамасының теңдеуін құрыңыз.

558. Гиперболаға бір диаметрдің ұштарынан жүргізілген жанамалардың өзара параллель екенін дәлелдеңіз.

559. 4x + 3y –7 = 0 түзуіне перпендикуляр болатын, $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ гиперболаға жүргізілген жанамаларының теңдеулерін құрыңыз.

560. 10x –3y + 9 = 0 түзуіне параллель болатын, $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ гиперболаға жүргізілген жанамаларының теңдеулерін құрыңыз.

561. 2x + 4y –5 = 0 түзуіне параллель болатын, $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{8}=1$ жанамаларының теңдеулерін құрыңыз және олардың d арақашықтығын табыңыз.

562. $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$ гиперболасында, 3x+2y+1=0 түзуіне жақын орналасқан M_1 нүктесін табыңыз және M_1 нүктесінен берілген түзуге дейінгі d арақашықтықты есептеңіз.

563. x^2–y^2 =16 гиперболаға A(–1;–7) нүктесінен жүргізілген жанамаларының теңдеулерін құрыңыз.

564. C(1; –10) нүктесінен $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1$ гиперболаға жанамалар жүргізілген. Жанасу нүктелерін қосатын хорданың теңдеуін жазыңыз.

565. P(1; –5) нүктесінен $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$ гиперболаға жанамалар жүргізілген. P нүктесінен жанасу нүктелерін қосатын хордаға дейінгі арақашықтықты есептеңіз.

566. Гипербола $A(\sqrt{6}\,;\ 3)$ нүктесінен өтеді, 9x+2y–15 = 0 түзуін жанайды. Егер гиперболаның осьтері координаталар осьтерімен беттесетін болса, гиперболаның теңдеуін құрыңыз.

567. Осьтері координаталар осьтерімен беттесетін, 5x–6y–16=0, 13x–10y–48=0 түзулерін жанайтын, гиперболаның теңдеуін құрыңыз.

568. $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ теңдеуімен берлген эллипс пен $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$ гиперболаның қиылысу нүктелері тіктөртбұрыштың төбелері екеніне көз жеткізіп, тіктөртбұрыштың қабырғаларының теңдеулерін құрыңыз.

569. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболасы және қандай да бір жанамасы берілген. Р – жанама мен Ох осінің қиылысу нүктесі, Q – осы осьтегі жанасу нүктесінің проекциясы. OP–OQ = a^2 теңдігін дәлелдеңіз.

570. Гиперболаның фокустары оның кез келген жанамасының екі жағында орналасқанын дәлелдеңіз.

571. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболасының фокустарынан кез келген жанамаға дейінгі арақашықтықтардың көбейтіндісі b^2 –қа тең тұрақты шама екенін дәлелдеңіз.

572. $2x–y–4=0$ түзуі фокустары $F_1(–3;0)$ және $F_2(3;0)$ нүктелерінде орналасқан гиперболаны жанайды. Осы гиперболаның теңдеуін құрыңыз.

573. Егер гиперболаның жанамасының теңдеуі $15x+16y–36=0$ және төбелерінің арақашықтығы $2a = 8$ болса, фокустары абсцисса осінде координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы орналасқан гиперболаның теңдеуін құрыңыз.

574. Гиперболаны қандай да бір М нүктесінде жанайтын түзу F_1M, F_2M фокалдық радиустармен бірдей бұрыш жасайтынын және F_1MF_2. бұрышы арқылы өтетінін дәлелдеңіз.

575. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ гиперболаның оң фокусынан Ox осіне қарай $\alpha(\pi \leq \alpha \leq 3/2\,\pi)$ бұрыш жасайтын жарық сәулесі бағытталған. $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$ белгілі. Сәуле гиперболаға жетіп, шағылды.Шағылған сәуле жатқан түзудің теңдеуін құрыңыз.

576. Ортақ фокустары бар эллипс пен гиперболаның тік бұрыш жасап қиылысатынын дәлелдеңіз.

577. Жазықтықтың Ox осіне бірқалыпты сығылу коэффициенті $\frac{3}{4}$–ге тең болса, $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ гиперболаның сығылу барысында түрленетін сызығының теңдеуін табыңыз.

578. Жазықтықтың Oy осіне бірқалыпты сығылу коэффициенті $\frac{4}{5}$–ге тең, гиперболаның $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ гиперболаның сығылу барысында түрленетін сызығының теңдеуін табыңыз.

579. Координаталық осьтерге қарай жазықтықтың екі біркелкі сығылу барысында гиперболадан $x^2–y=9$ құрылған түзудің теңдеуін тап, егер жазықтықтың Ox және Oy осьтеріне қарай біркелкі сығылу коэффициенттері сәйкес $\frac{2}{3}$ және $\frac{5}{3}$ болса.

580. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{36}=1$ гиперболасы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ гиперболасына түрленетіндей, жазықтықтың *Ох* осіне қарай бірқалыпты сығылу коэффициентін анықтаңыз.

581. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ гиперболасы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ гиперболасына түрленетіндей, жазықтықтың *Оу* осіне қарай бірқалыпты сығылу коэффициентін анықтаңыз.

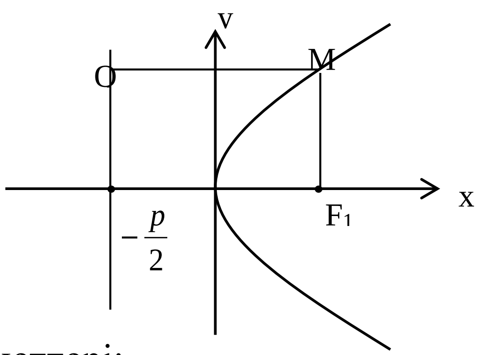
582. $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$ гиперболасы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{64}=1$ гиперболасына түрленетіндей, жазықтықтың *Ох* және *Оу* осьтеріне қарай бірқалыпты сығылу коэффициенттерін анықтаңыз.

4.4 Параболаның теңдеуі, қасиеттері

Анықтама: Фокус деп аталатын берілген нүктеден және директриса деп аталатын берілген түзуден арақашықтықтары бірдей болатын нүктелердің геометриялық орындарын парабола деп атайды.
Параболаның фокусы F әрпімен, фокустан директрисаға дейінгі арақашықтық *p* әрпімен белгіленеді. *p* саны параболаның параметрі деп аталады. $F(\frac{p}{2};0)$ фокустың координаталары.

$\boxed{y^2=2px}$ – параболаның канондық теңдеуі.

$x=-\frac{p}{2}$ – параболаның директрисасының теңдеуі.



Параболаның қасиеттері:
1. Параболаның (*OX*) симметрия осі бар. Параболаның симметрия осімен қиылысу нүктесі параболаның төбесі деп аталады.
2. Парабола *OXY* оң жарты жазықтықта орналасады.
3. $y^2=2px$ теңдеуімен анықталған параболаның директрисасы келесі түрге ие болады: $x=-\frac{p}{2}$.

M(*x*;*y*)– кез келген нүктенің r фокусы.

$r=d=x+\frac{p}{2}$ r = x+$\frac{p}{2}$

Жалпы анықтама: Конустық қима (эллипс, гипербола, парабола) деп, берілген нүктеден (F) берілген түзуге (директриса) дейінгі арақашықтықтардың қатынасы ε тұрақты шама болатын нүктелердің геометриялық орындары аталады.

583. Төбесі координаталар бас нүктесінде орналасқан, келесі шарттар орындалатын параболаның теңдеуін құрыңыз:

1) параболаның параметрі $p = 3$ тең және Ox осіне қатысты симметриялы оң жарты жазықтықта орналасқан;

2) параболаның параметрі $p = 0{,}5$ тең және Ox осіне қатысты симметриялы сол жақ жарты жазықтықта орналасқан;

3) параболаның параметрі $p = \frac{1}{4}$ тең және Oy осіне қатысты симметриялы жоғары оң жарты жазықтықта орналасқан;

4) парабола Oy осьіне қатысты симметриялы төменгі жарты жазықтықта орналасқан, және оның параметрі $p =3$.

584. Төмендегі параболалар үшін, оның параметрін және координаталық осітерге қатысты орналасуын анықтаңыз:

1) $y^2 = 6x$; 2) $x^2 = 5y$; 3) $y^2 = -4x$; 4) $x^2 = -y$.

585. Төбесі координаталар бас нүктесінде орналасқан және төменде берілгендер бойынша параболалық теңдеуін құрыңыз:

1) парабола Ох осіне қатысты симметриялы және A (9;6) нүктесі арқылы өтеді;

2) парабола Ох осіне қатысты симметриялы және $B(-1;\,3)$ нүктесі арқылы өтеді;

3) парабола Ох осіне қатысты симметриялы және С(1; 1) нүктесі арқылы өтеді;

4) парабола Ох осіне қатысты симметриялы және D (4; – 8) нүктесі арқылы өтеді.

586. Болат трос екі ұшы арқылы ілінген. Бекіту нүктелері бірдей биіктіктерде орналасқан. Олардың арақашықтығы 20 м. Тростың формасы парабола тәріздес. Тростың бекіту нүктесінен горизонталь бойынша 2м қашықтықта орналасқан кездегі тростың иілуі 14,4 см құрайды. Тростың бекіту нүктелерінің ортасындағы иілуін табыңыз.

587. Фокусы $F(0;\,-3)$ және координаталар бас нүктесі арқылы өтетін, осі Oy болатын параболаның теңдеуін құрыңыз.

588. Қай сызықтар, қандай теңдеулермен анықталады:

1) $y = +2\sqrt{x}$, 2) $y = +\sqrt{-x}$, 3) $y = -3\sqrt{-2x}$, 4) $y = -2\sqrt{x}$,

5) $x = +\sqrt{5y}$, 6) $x = -5\sqrt{-y}$, 7) $x = -\sqrt{3y}$, 8) $x = +4\sqrt{-y}$.

589. $y^2 = 24x$ теңдеуімен берілген параболаның директрисасының теңдеуі мен F фокусты табыңыз.

590. Егер M нүктесінің абсциссасы 7–ге тең болса, $y^2 = 20x$ теңдеуімен берілген параболаның фокальдық радиусын табыңыз.

591. Егер M нүктесінің ординатасы 6–ға тең болса, $y^2=12x$ теңдеуімен берілген параболаның фокальдық радиусын табыңыз .
592 $y^2=16x$ теңдеуімен берілген параболаның фокальдық радиусы 13–ке тең болатын нүктелерін табыңыз.
593. Фокусы $F(-7;\ 0)$ және директрисасының теңдеуі $x-7=0$ тең болатын, параболаның теңдеуін құрыңыз.
594. Төбесі $(\alpha;\beta)$ нүктесімен беттесетін, параметрі p–*ға* тең, осі Ox осіне параллель болатын параболаның теңдеуін құрыңыз:
1) парабола Ох осымен оң бағытта шексіздікке ұмтылады;
2) парабола Ох осымен теріс бағытта шексіздікке ұмтылады.
595. Төбесі $(\alpha;\beta)$ нүктесімен беттесетін, параметрі p–*ға тең,* осі Oy осіне параллель болатын параболаның теңдеуін құрыңыз:
1) парабола Оу осымен оң бағытта шексіздікке ұмтылады;
2) парабола Оу осымен теріс бағытта шексіздікке ұмтылады.
596. Келесі теңдеулердің әрқайсысы параболаны анықтайтынына көз жеткізіп, парбола үшін A төбесінің координатасын және p параметрінің шамасын табыңыз:
1) $y^2=4x-8$, 2) $y^2=4-6x$,
3) $x^2=6y+2$, 4) $x^2=2-y$.
597. Келесі теңдеулердің әрқайсысы параболаны анықтайтынына көз жеткізіп, парбола үшін A төбесінің координатасын және p параметрінің шамасын табыңыз:
1) $y=\frac{1}{4}x^2+x+2$, 2) $y=4x^2-8x+7$, 3) $y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$.
598. Келесі теңдеулердің әрқайсысы параболаны анықтайтынына көз жеткізіп, парбола үшін A төбесінің координатасын және p параметрінің шамасын табыңыз:
1) $x=2y^2-12y+14$, 2) $x=-\frac{1}{4}y^2+y$, 3) $x=-y^2+2y-1$.
599. Келесі теңдеулер қандай сызықтарды анықтайтынын табыңыз:
1) $y=3-4\sqrt{x-1}$, 2) $x=-4+3\sqrt{y+5}$, 3) $x=2-\sqrt{6-2y}$, 4) $y=-5-\sqrt{-3x-21}$.
600. Фокусы $F(7;\ 2)$ және $x-5=0$ директрисасының теңдеуі болатын параболаның теңдеуін құрыңыз.
601. Фокусы $F(4;\ 3)$ және $y+1=0$ директрисасының теңдеуі болатын параболаның теңдеуін құрыңыз.
602. Фокусы $F(2;\ -1)$ және $x-y-1=0$ директрисасының теңдеуі болатын параболаның теңдеуін құрыңыз.
603. Параболаның А (6;–3) төбесінің координаталары және $3x-5y+1=0$ директрисасының теңдеуі берілген. Осы параболаның F фокусын табыңыз.
604. Параболаның $A(-2;\ -1)$ төбесінің координаталары және $x+2y-1=0$. Осы параболаның теңдеуін құрыңыз.

605. $x+y–3=0$ түзуі мен $x^2 = 4y$ параболаның қиылысу нүктелерін табыңыз.
606. $3x+4y–12=0$ түзуі мен $y^2=–9x$ параболаның қиылысу нүктелерін табыңыз.
607. $3x–2y+6=0$ түзуі мен $y^2=6x$ параболаның қиылысу нүктелерін табыңыз.
608. Келесі жағдайларда, берілген түзу берілген параболаға қатысты қалай орналасқанын анықтаңыз: қиылысады ма, жанайды ма, әлде параболадан тыс өтеді ма?
1) $x–y + 2 = 0$, $y^2 = 8x$; 2) $8x + 3y–15 = 0$, $x^2 = –3y$; 3) $5x–y–15 = 0$, $y^2 = –5x$.
609. k бұрыштық коэффициентінің қандай мәнінде $y = kx + 2$ түзуі
1) y^2 4x параболаны қиып өтетінін; 2) осы параболаны жанайтынын;
3) параболадан тыс өтетінін табыңыз.
610. Қандай шарт орындалғанда $y=kx+b$ түзуі $y^2=2px$ параболасын жанайды.
611. $y^2 = 2px$ параболасына $k \neq 0$ бұрыштық коэффициентпен тек бір ғана жанама жүргізуге болатынын дәлелдеңіз.
612. $y^2 = 2px$ параболасының $M_1(x_1;\ y_1)$ нүктесінде жанамасының теңдеуін құрыңыз.
613. $y^2 = 8x$ параболасын жанайтын және $2x + 2y –3 = 0$ түзуіне параллель болатын, түзудің теңдеуін құрыңыз.
614. $x^2=16y$ параболасын жанайтын және $2x+4y + 7 = 0$ түзуіне перпендикуляр түзудің теңдеуін құрыңыз.
615. $3x – 2y + 30 = 0$ түзуіне параллель және $y^2=12x$ параболасын жанайтын түзудің теңдеуін құрыңыз.
616. $y^2=64x$ параболасында $4x+3y–14=0$ түзуіне жақын орналасқан M_1 нүктесін табыңыз және M_1 нүктесінен осы түзуге дейінгі d арақашықтықты табыңыз.
617. A (2; 9) нүктесінен $y^2 =36x$ параболаға жүргізген жанамалардың теңдеулерін құрыңыз.
618. $y^2 = 2px$ параболаға жанама жүргізілген. Осы параболаның төбесі жанаманың Ox осімен қиылысу нүктесі мен жанасу нүктесінің Ox осіне проекциясын қосатын кесіндінің ортасында жататынын дәлелдеңіз.
619. A (5; 9) нүктесінен $y^2 = 5x$ параболаға жанамалар жүргізілді. Жанасу нүктелерін қосатын хорданың теңдеуін құрыңыз.
620. P(–3; 12) нүктесінен $y^2=10x$ парабола ға жанамалар жүргізілді. P нүктесінен жанасу нүктелерін қосатын хордаға дейінгі d арақашықтықты есептеңіз.
621. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1$ эллипс пен $y^2=24x$ параболаның қиылысу нүктелерін табыңыз.

622. $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=-1$гипербола мен $y^2=3x$ параболаның қиылысу нүктелерін табыңыз.
623. $y=x^2-2x+1$, $x=y^2-6y+7$ параболалардың қиылысу нүктелерін табыңыз.
624. Параболаны қандай–да бір М нүктесінде жанайтын түзу, М нүктесінің фокальдық радиусымен және М нүктесінен шығатын, параболаның шексіздікке ұмтылған осіне параллель сәулемен жасайтын бұрыштарының өзара тең екенін дәлелдеңіз.
625. $y^2=12x$ параболаның фокусынан Ox осімен α сүйір бұрыш жасайтын жарық сәулесі жүргізілген. $\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ екені белгілі. Сәуле параболаға дейін жетіп, шағылады. Шағылған сәуледе жатқан түзудің теңдеуін құрыңыз.
626. Параболалардың төбелері арасында орналасқан, ортақ осьтері және фокустары бар екі параболаның тік бұрыш жасап қиылысатынын дәлелдеңіз.
627. Егер осьтері өзара перпендикуляр екі парабола төрт нүктеде қиылысса, осы нүктелер бір шеңбердің бойында жататынын дәлелдеңіз.

4.5 Эллипс, гипербола және параболаның полярлық теңдеуі

Эллипс, гипербола және парабола үшін полярлық теңдеу келесі түрде болады:

$$\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\theta}$$

–мұндағы ρ,θ –сызықтағы кез келген нүктенің полярлық координаталары, ρ–фокалдық параметрі, ε–эксцентриситет(эллипс үшін $\varepsilon<1$, гипербола үшін $\varepsilon>1$, парабола үшін $\varepsilon=1$).

628. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ эллипстің теңдеуі берілген. Егер полярлық остің бағыты абсцисса осінің оң бағытына сәйкес келсе, ал полюс
1)эллипстің сол жақ фокусында; 2) эллипстің оң фокусында орналасса, оның полярлық теңдеуін құрыңыз.
629. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ гиперболаның теңдеуі берілген. Егер полярлық остің бағыты абсцисса осінің оң бағытына сәйкес келсе, ал полюс
1) гиперболаның сол жақ фокусында; 2) гиперболаның оң фокусында орналасса, оның гиперболаның оң жақ тармағының полярлық теңдеуін құрыңыз.
630. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$ гиперболаның теңдеуі берілген. Егер полярлық остің бағыты абсцисса осінің оң бағытына сәйкес келсе, ал полюс

1) гиперболаның сол жақ фокусында; 2) гиперболаның оң фокусында орналасса, оның гиперболаның сол жақ тармағының полярлық теңдеуін құрыңыз.

631. $y^2=6x$ параболаның теңдеуі берілген. Егер полярлық осьтің бағыты абсцисса осінің оң бағытына сәйкес келсе, ал полюс параболаның фокусында орналасса, параболаның полярлық теңдеуін құрыңыз.

632. Полярлық координаталарда келесі теңдеулермен берілген сызықтарды анықтаңыз.

1) $\rho=\dfrac{5}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$, 2) $\rho=\dfrac{6}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$,3) $\rho=\dfrac{10}{1-\frac{3}{2}\cos\theta}$, 4) $\rho=\dfrac{12}{2-\cos\theta}$,

5) $\rho=\dfrac{5}{3-4\cos\theta}$, 6) $\rho=\dfrac{1}{3-3\cos\theta}$,

633. $\rho=\dfrac{144}{13-5\cos\theta}$– теңдеуі эллипсті анықтайтынын көрсетіңіз және оның жарты осьтерін табыңыз.

634. $\rho=\dfrac{18}{4-5\cos\theta}$ –теңдеуі гиперболаның оң жақ тармағын анықтайтынын көрсетіңіз және оның жарты осьтерін табыңыз.

635. $\rho=\dfrac{21}{5-2\cos\theta}$ –теңдеуі, эллипсті анықтайтынын көрсетіңіз және оның директриссаларының полярлық теңдеуін табыңыз.

636. $\rho=\dfrac{16}{3-5\cos\theta}$ – теңдеуі гиперболаның оң жақ тармағын анықтайтынын көрсетіңіз және директрисаларының, асимптоталарының полярлық теңдеуін құрыңыз.

637. $\rho=\dfrac{12}{3-\sqrt{2}\cos\theta}$ эллипстағы полярлық радиусы 6–ға тең нүктелерді табыңыз.

638. $\rho=\dfrac{15}{3-4\cos\theta}$ гиперболадағы полярлық радиусы 3–ке тең нүктелерді табыңыз.

639. $\rho=\dfrac{p}{1-\cos\theta}$ параболадағы:

1) полярлық радиусы ең кіші болатын; 2) полярлық радиусы параболаның параметріне тең болатын нүктелерді табыңыз.

640. $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ эллипстің теңдеуі берілген. Полярлық осьтің бағыты абсцисса осінің оң бағытына сәйкес келсе, ал полюс эллипстің центрінде орналасса, эллипстің полярлық теңдеуін құрыңыз.

641. $\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболаның теңдеуі берілген. Полярлық осьтің бағыты абсцисса осінің оң бағытына сәйкес келсе, ал полюс гиперболаның центрінде орналасса, гиперболаның полярлық теңдеуін құрыңыз.

642. $y^2 = 2px$ параболаның теңдеуі берілген. Полярлық осьтің бағыты абсцисса осінің оң бағытына сәйкес келсе, ал полюс параболаның төбесінде орналасса, параболаның полярлық теңдеуін құрыңыз.

4.6 Екінші ретті қисықтардың диаметрлері

Аналитаклық геометрия курсында екінші ретті қисықтардың параллель хордаларының ортасы бір түзудің бойында жататыны дәлелденеді. Осы түзу екінші ретті қисықтардың диаметрі деп аталады. Қандай–да бір хорданы (яғни, оған параллель барлық хордаларды) қақ бөлетін диаметр осы хордаға (оған параллель барлық хордаларға) түйіндес диаметр деп аталады. Эллипс пен гиперболаның барлық диаметрлері олардың центрлері арқылы өтеді.

Егер эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ теңдеуімен берілсе, k бұрыштық коэффициенті бар хордаларға түйіндес диаметр $y=-\frac{b^2}{a^2k}x$ теңдеуімен анықталады.

Егер гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ теңдеуімен берілсе, k бұрыштық коэффициенті бар хордаларға түйіндес диаметр $y=\frac{b^2}{a^2k}x$ теңдеуімен анықталады.

Параболаның барлық диаметрлері оның осіне параллель болады. Егер парабола $y^2 = 2px$ теңдеуімен берілсе, k бұрыштық коэффициенті бар хордаларға түйіндес диаметр $y=\frac{p}{k}$ теңдеуімен анықталады.

Егер эллипстің немесе гиперболаның екі диаметрінің біреуі, екіншісіне параллель хорданы қақ бөлсе, онда екінші диаметр біріншіге параллель хорданы да қақ бөледі. Осындай екі диаметр өзара түйіндес диаметрлер деп аталады.

Егер k және k' $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипстің өзара түйіндес диаметрлерінің бұрыштық коэффициенттері болса, онда $kk'=-\frac{b^2}{a^2}$ тең болады.

Егер k және k' – $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболаның өзара түйіндес диаметрлерінің бұрыштық коэффициенттері болса, онда $kk'=\frac{b^2}{a^2}$ тең болады.

Түйіндес хордаларға перпендикуляр екінші ретті сызықтардың диаметрлері бас диаметрлер деп аталады.

643. 2х – у – 3 = 0 түзуі қиып өтетін хорданың ортасы арқылы өтетін $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ эллипстің диаметрінің теңдеуін құрыңыз.

644. А(1; –2) нүктесі арқылы өтетін және осы нүкте арқылы қақ бөлінетін, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипстің хордасының теңдеуін құрыңыз.

645. Біреуі Ох осімен 45°бұрыш жасайтын, $x^2 + 4y^2 = 1$ эллипстің өзара түйіндес екі диаметрлерінің теңдеулерін құрыңыз.

646. Біреуі х + 2у –5 = 0 түзуіне параллель болатын, $4x^2 + 9y^2 = 1$ эллипстің өзара түйіндес екі диаметрлерінің теңдеулерін құрыңыз.

647. Біреуі 3х+2у–7=0 түзуіне перпендикуляр болатын, $x^2+3y^2 =1$ эллипстің өзара түйіндес екі диаметрлерінің теңдеулерін құрыңыз.

648. Циркуль мен сызғышты пайдалана отырып, эллипстің центрін салыңыз.

649. Эллипстің осі оның басты диаметрлерінің жалғыз жұбы екенін дәлелдеңіз.

650. Түйіндес диаметрлердің қасиеттерін қолданып, шеңбердің әрбір диаметрі бас диаметр екенін дәлелдеңіз.

651. а) Эллипске бір төбесі эллипстің бір төбесімен беттесетін, тең бүйірлі үшбұрыш іштей сызылған. Осы үшбұрыштың табаны эллипстің осьтерінің біріне параллель екенін дәлелдеңіз.

б) Эллипске іштей сызылған тіктөртбұрыштың қабырғалары , осы эллипстің осьтеріне параллель екенін дәлелдеңіз.

в) Циркуль мен сызғышты пайдалана отырып, оның бас диаметрлерін салыңыз.

652. Эллипстің кез келген нүктесін осы эллипстің кез келген диаметрінің ұштарымен қосатын хордалар, оның түйіндес диаметрлеріне параллель екенін дәлелдеңіз.

653. а) Эллипстің екі түйіндес жарты диаметрлерінің квадраттарының қосындысы (оның жарты осьтерінің квадраттарының қосындысына тең) тұрақты шама екенін дәлелдеңіз.

б) Эллипстің екі түйіндес жарты диаметрлерінде салынған параллелограммның ауданы тұрақты (оның жарты осьтерінде салынған тіктөртбұрыштың ауданына тең) тұрақты шама екенін дәлелдеңіз.

654. 2х–у+3=0 түзуі қиып өтетін хорданың ортасы арқылы өтетін $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ гиперболаның диаметрінің теңдеуін құрыңыз.

655. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{7}=1$ гипербола берілген. А(3;–1) нүктесі арқылы өтетін және осы нүкте арқылы қақ бөлінетін, гипреболаның хордасының теңдеуін құрыңыз.

656. Біреуі А(8; 1) нүктесі арқылы өтетін, $x^2-4y^2=4$ гиперболаның өзара түйіндес екі диаметрлерінің теңдеулерін құрыңыз.

657. Өзара 45° бұрыш жасайтын, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$ гиперболаның түйіндес екі диаметрлерінің теңдеулерін құрыңыз.

658. Циркуль мен сызғышты пайдалана отырып, гипрболаның центрін салыңыз.

659. Гиперболаның осі оның басты диаметрлерінің жалғыз жұбы екенін дәлелдеңіз.

660. Циркуль мен сызғышты пайдалана отырып, оның бас диаметрлерін салыңыз.

661. 3x+y–5=0 түзуі қиып өтетін хорданың ортасы арқылы өтетін $y^2=12x$ параболаның диаметрінің теңдеуін құрыңыз.

662. $y^2=20x$ парабола берілген. А(3;–1) нүктесі арқылы өтетін және осы нүкте арқылы қақ бөлінетін, параболаның хордасының теңдеуін құрыңыз.

663. Парабола осі оның жалғыз бас диаметрі екенін дәлелдеңіз.

664. Циркуль мен сызғышты пайдалана отырып, оның бас диаметрін салыңыз.

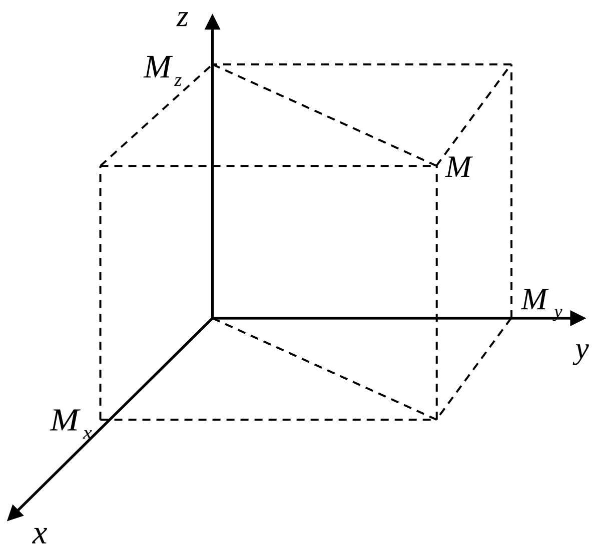
2 БӨЛІМ Кеңістіктегі аналитикалық геометрия

5 Кеңістіктегі аналитикалық геометрияның қарапайым есептері

5.1 Кеңістіктегі тік бұрышты декарттық координаталар

Кеңістікте ортақ бас нүктесі бар және бірдей масштаб бірліктері арқылы анықталатын өзара перпендикуляр үш ось кеңістіктегі тік бұрышты декарттық координаталар жүйесін анықтайды.

O_x осі – абсцисса осі, O_y осі –ордината осі , O_z осі– аппликата осі деп аталады.



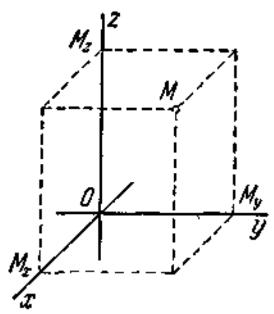
M_x, M_y, M_z – М нүктесінің сәйкес O_x, O_y және O_z осьтеріне проекциялары болсын.

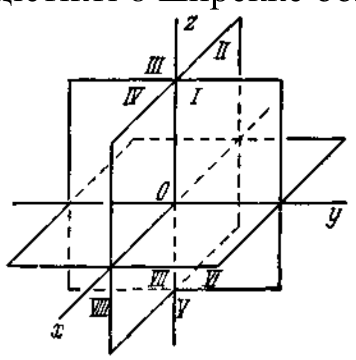
Анықтама: Кеңістіктегі М нүктесінің декарттық координаталары деп сәйкес $O\overline{M}_x$,$O\overline{M}_y$ және OM_z бағытталған кесінділерінің шамалары аталады.

$OM_x = x$, $OM_y = y$, $OM_z = z$.

M(x,y,z) деп белгіленеді.

Үш координаталық ось кеңістікті 8 ширекке бөледі.





719. Декарттық координаталары бойынша (аксонометриялық проекциясы бойынша) келесі нүктелерді салыңыз: A (3; 4; 6), B(–5; 3; 1), C (1; – 3; – 5), D (0; – 3; 5), E (– 3; – 5; 0) және F (– 1; – 5; – 3).
720. A (4; 3; 5), B (–3; 2; 1), C (2; –3; 0) және D (0; 0; –3) нүктелері берілген. Осы нүктелердің l) Oxy жазықтығына; 2) Oxz жазықтығына; 3) Oyz жазықтығына; 4) абсцисса осіне; 5) ординат осіне; 6) апликат осіне проекцияларын табыңыз.
721. A(2;3;1), B(5;–3;2), C(–3;2;–1) және D(a;b;c) нүктелері берілген. Осы нүктелерге: 1) Oxy жазықтығына; 2) Oxz жазықтығына; 3) Oyz жазықтығына; 4) абсцисса осіне; 5) ординат осіне; 6) апликат осіне; 7) координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы нүктелерді табыңыз.
722. A(– a; – a; – a),B(a; – a; – a), C (– a; a; – a) және D (a; a; a). Кубтың төрт төбесінің координаталары берілген. Оның қалған төбелерінің координаталарын табыңыз.
723. Келесі шарттарды қанағаттандыратын нүктелердің координаталары қай октанталарда жатуы мүмкін: 1)$x–y=0$; 2) $x+y=0$; 3) $x–2=0$; 4) $x +z = 0$; 5) $y – z = 0$; 6) $y + z = 0$.
724. Келесі шарттарды қанағаттандыратын нүктелердің координаталары қай октанталарда жатуы мүмкін: 1)$xy>0$; 2) $xz<0$; 3) $yz>0$; 4) $xy >0$; 5) $xyz<0$.
725. 1) екінші октантада; 2) бесінші октантада; 3) алтыншы октантада; 4) жетінші октантада 5) сегізінші октантада орналасқан және үш координаталық жазықтықты жанайтын, R = 3–ке тең шардың центрін табыңыз.

5.2 Кеңістіктегі екі нүкте арасындағы қашықтық. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу

Кеңістіктегі $M_1(x_1; y_1 ; z_1)$ және $M_2(x_2; y_2; z_2)$ екі нүкте арасындағы d қашықтық келесі формула бойынша анықталады

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

M_1 (x_1 , y_1 , z_1) және M_2 $(x_2 ; y_2 ; z_2)$ нүктелерімен шектелген $\overline{M_1M_2}$ кесіндісін λ қатынасында бөлетін, M нүктесінің x, y, z координаталары келесі формулалар бойынша анықталады:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

Дербес жағдайда, λ = 1 болғанда кесіндінің ортасының координатасы келесі түрде анықталады:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

726. A(1;–2;–3), B(2;–3;0), C(3;1;–9), D(–1;1;–12) нүктелері берілген. 1) A және C; 2) B және D; 3) C және D нүктелері арасындағы қашықтықты есептеңіз.

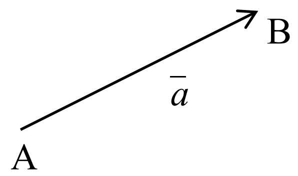
727. O нүктесінен келесі нүктелерге дейінгі қашықтықты есептеңіз: A (4; –2; –4), B (– 4; 12; 6), C (12; –4; 3), D (12; 16; – 15).
728. Төбелері A (3; – 1; 2), B (0; –4; 2) және C (–3; 2; 1) болатын үшбұрыштың теңбүйірлі екенін дәлелдеңіз.
729. Төбелері A_1 (3; – 1; 6), A_2 (–1; 7; –2) және A_3 (1; –3; 2) болатын үшбұрыштың тікбұрышты екенін дәлелдеңіз.
730. M_1 (4; –1; 4), M_2 (0; 7; –4), M_3 (3; 1; –2) үшбұрышының ішкі бұрыштарының ішінде доғал бұрыш бар ма екенін анықтаңыз.
731. M (3; –2; 5), N (– 2; 1; –3), P (5; 1; –1) үшбұрышының ішкі бұрыштарының сүйір екенін дәлелдеңіз.
732. A (– 3; 4; 8) нүктесінен қашықтығы 12–ге тең болатын, абсцисса осінде жатқан нүктені табыңыз.
733. A (1; –3; 7) және B (5; 7; –5) нүктелерінен бірдей қашықтықта жатқан, ордината осінде жатқан нүктені табыңыз.
734. $P(4;\ –1;\ –1)$ нүктесі арқылы өтетін және үш координаталық жазықтықтарды жанайтын шардың C центрін және R радиусын табыңыз.
735. M_1 (3; 2; –5), M_2 (1; –4; 3) және M_3 (– 3; 0; 1) үшбұрыштың төбелері берілген. Оның қабырғаларының орталарының координаталарын табыңыз.
736. A (2; –1; 4), B (3; 2; –6), C (– 5; 0; 2) үшбұрыштың төбелері берілген. Оның A төбесінен жүргізілген медианасының ұзындығын табыңыз.
737. Біртекті стреженьннің ауырлық центрі C (1; –1; 5) нүктесінде, ал оның бір ұшының координатасы A (–2; –1; 7) нүктесінде орналасқан. Стерженьннің екінші ұшының координатасын табыңыз.
738. $ABCO$ параллелограмның A(2;–3;–5), B(–1;3;2) екі төбесінің координаталары және оның E(4;–1;7) диагоналдарының қиылысу нүктесінің координатасы берілген. Осы параллелограммның басқа екі төбесінің координаталарын табыңыз.
739. $ABCO$ параллелограмның A(3; –4; 7), B(– 5; 3; – 2) және C(1; 2; –3) үш төбесінің координаталары берілген. B төбесіне қарсы жатқан D төбесінің координатасын табыңыз.
740. $ABCD$ параллелограмның A(3; –1; 2), B(1; 2; –4) және C(–1; 1; 2) үш төбесінің координаталары берілген. Оның төртінші D төбесінің координатасын табыңыз.
741. A(–1; 8; 3) және B(9; – 7; – 2) нүктелерімен шектелген кесінді C, O, E, F нүктелерімен бес тең бөліктерге бөлінген. Осы нүктелердің координаталарын табыңыз.
742. C(2; 0; 2) және D(5; – 2; 0) нүктелерімен тең үш бөлікке бөлінген кесіндінің ұштарының координаталарын анықтаңыз.
743. A(1; 2; – 1), B(2; – 1; 3) және C(– 4; 7; 5) үшбұрыштың төбелерінің координаталары берілген. Оның B төбесінің ішкі бұрышының биссектрисасының ұзындығын есептеңіз.

744. $A(1; -1; -3)$, $B(2; 1; -2)$ және $C(-5; 2; -6)$ үшбұрыштың төбелерінің координаталары берілген. Оның A төбесінің сыртқы бұрышының биссектрисасының ұзындығын есептеңіз.
745. Тетраэдрдың төбелерінде $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$, $D(x_4;y_4;z_4)$ бірдей массалар шоғырланған. Осы массалар жүйесінің ауырлық центрінің координатасын табыңыз.
746. Тетраэдрдың төбелерінде $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, $A_4(x_4; y_4; z_4)$ m_1, m_2, m_3, және m_4 массалары шоғырланған. Осы массалар жүйесінің ауырлық центрінің координатасын табыңыз.
747. Түзу $M_1(-1; 6; 6)$ және $M_2(3; -6; -2)$ нүктелері арқылы өтеді. Осы түзудің координаталық жазықтықтармен қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңыз.

6 Векторлық алгебра

6.1 Вектор түсінігі. Вектордың оське проекциясы

Анықтама: Геометриялық вектор немесе қарапайым вектор деп бағытталған кесіндіні айтамыз
Белгіленуі $\overline{AB}$, мұндағы A басы, B вектордың ұшы.



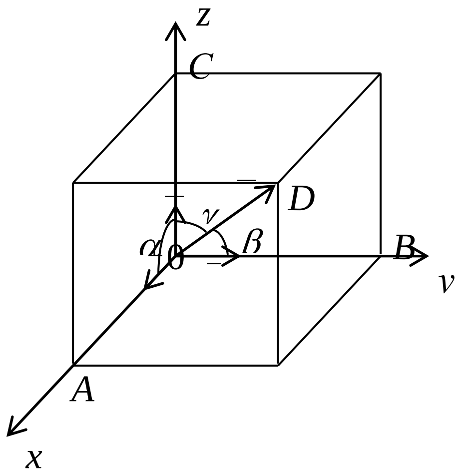
Анықтама: $\vec{a}$ векторының ұзындығына тең сан оның модулі деп аталады және $\left|\overline{a}\right|$ –символымен белгіленеді.
Анықтама: Егер $\left|\overline{a}\right| = 1$ болса, онда ол бірлік вектор деп аталады.
Анықтама: $\vec{a}$ векторымен бағыттас бірлік вектор осы вектордың орты деп аталады және $\overline{a}^0$ символымен белгіленеді. $\overline{a}_0^0 = \dfrac{\overline{a}}{|a|}$.
Анықтама: Егер вектордың басы мен ұшы беттессе онда ол вектор нөлдік вектор деп аталады.Нөлдік вектордың анықталған бағыты болмайды және оның ұзындығы нөлге тең.
Анықтама: Параллель түзулердің бойында немесе бір түзудің бойында жатқан векторлар коллинеарлы векторлар деп аталады.
Анықтама: Егер екі вектордың ұзындықтары тең және бағыттас болса онда ол векторлар өзара тең деп аталады. Барлық нөлдік векторлар тең деп есептеледі.
Анықтама: $\overline{AB}$ векторының u осіне проекциясы деп u осіндегі $\overline{A_1B_1}$ кесіндісінің шамасына тең санды атаймыз, мұндағы $A_1 - A$ нүктесінің , $B_1 -$ B нүктесінің u осіне түскен проекциялары. Белгіленуі $np_u\overline{AB}$.

Теорема: $\vec{a}$ векторының *u* осіне түскен проекциясы $\vec{a}$ векторының ұзындығы мен осы вектордың *u* осімен жасайтын сүйір бұрышының косинусының көбейтіндісіне тең.

$$np_u \bar{a} = \left|\bar{a}\right| \cos\varphi. \quad (2)$$

Анықтама: Егер $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ векторлар үштігі келесі шарттарды қанағаттандырса, онда бұл үштік координаталық базис деп аталады.:

1. $\bar{i}$ векторы *Ox* осінде, $\bar{j}$ – *Oy* осінде, $\bar{k}$ – Oz осінде жатса.
2. $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ векторларының әрқайсысы өз осінде оң жаққа қарай бағытталған.
3. $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ – бірлік векторлар, яғни $\left|\bar{i}\right| = 1,\ \left|\bar{j}\right| = 1,\ \left|\bar{k}\right| = 1.$



$\vec{a}$ – векторы қандай болса да, ол әр уақытта $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ базисі бойынша жіктеледі, яғни $\bar{a} = X\,\bar{i} + Y\,\bar{j} + Z\,\bar{k}$ түрінде келтіріледі.

Осы жіктелудің коэффициенттері $\vec{a}$ векторының координататалары болып табылады.

Символикалық түрде $\bar{a} = \{X, Y, Z\}$ белгіленеді.

OA = X; *OB = Y*; *OC = Z*.

OD –параллелепипедтің диагоналы.

$OD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2$. – вектордың модулі.

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – $\vec{a}$ векторының *OX*, *OY*, *OZ* осьтерімен жасайтын бұрыштары.

Онда $X = \left|\bar{a}\right|\cos\alpha$, $Y = \left|\bar{a}\right|\cos\beta$, $Z = \left|\bar{a}\right|\cos\gamma$

$\mathbf{cos}\boldsymbol{\alpha}$**,** $\mathbf{cos}\boldsymbol{\beta}$**,** $\mathbf{cos}\boldsymbol{\gamma}$ – $\vec{a}$ векторының бағыттаушы косинустары деп аталады.

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ бағыттаушы косинустар үшін негізгі тепе–теңдік.

$\bar{a}$ векторы – оның ұзындығы және үш бағыттаушы косинустары арқылы бірмәнді анықталады.

Егер $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ және $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ болса, онда $\bar{a} \pm \bar{b} = \{X_1 \pm X_2,\ Y_1 \pm Y_2,\ Z_1 \pm Z_2\}$, $\alpha\,\bar{a} = \{\alpha X_1,\ \alpha Y_1,\ \alpha Z_1\}$.

Екі вектордың коллинеар болуының белгісі – олардың координаталарының пропорционалдығы.

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1}.$$

748. ***a*** = {6; 3; – 2}векторының модулін есептеңіз.

749. *X=4, У=* –12 векордың екі координатасы берілген. Егер $|a| = 13$ болса, оның үшінші *Z* координатасын анықтаңыз.

750. $A(3; -1; 2)$ және $B(-1; 2; 1)$ нүктелері берілген. $\overline{AB}$ және $\overline{BA}$ векторларының координаталарын табыңыз.
751. Егер $\boldsymbol{a} = \{3; -1; 4\}$ векторының басы М (1; 2; –3) нүктесімен беттессе, оның ұшымен беттесетін N нүктесінің координатасын табыңыз.
752. $a = \{2; -3; -1\}$векторының ұшы (1; –1; 2) нүктесінде болса, оның басының координатасын табыңыз.
753. $|a| = 2$ векторының модулі және $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$ бұрыштары берілген. a на векторының координаталық осьтерге проекциясын табыңыз.
754. $\boldsymbol{a} = \{12; -15; -16\}$ векторының бағыттаушы косинустарын есептеңіз.
755. $a = \left\{\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; \frac{12}{13}\right\}$. векторының бағыттаушы косинустарын есептеңіз.
756. Вектор координаталық осьтермен келесі бұрыштарды жасауы мүмкін бе: 1) $\alpha = 45°, \beta = 60°, \gamma = 120°$; 2) $\alpha = 45°, \beta = 135°$, $\gamma = 60°$;3) $\alpha = 90°, \beta = 150°$; $\gamma = 60°$?
757. Вектор екі координаталық оспен келесі бұрыштарды жасауы мүмкін бе: 1) $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$; 2) $\beta = 60°$, $\gamma = 60°$; 3) $\alpha = 150°$, $\gamma = 30°$?
758. Вектор Ox және Oz осьтерімен $\alpha = 120°$ және $\gamma = 45°$ бұрыш жасайды. Вектор Oy осімен қандай бұрыш жасайды?
759. a векторы Ox және Oy осьтерімен $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$ бұрыштарын құрайды. Егер $|a| = 2$ болса, оның координаталарын табыңыз.
760. Егер М нүктесінің радиус–векторы координаталық осьтермен бірдей бұрыштар жасаса және оның модулі 3 ке тең болса, онда М нүктесінің координаталарын табыңыз.

6.2 Векторларға қолданылатын сызықтық амалдар

Сызықтық амалдар деп векторлардың қосындысы және санға көбейту амалдары аталады.
Анықтама: $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының қосындысы деп, үшінші бір $\overline{a} + \overline{b}$ векторы аталады. Бұл вектордың басы $\vec{a}$ векторының басымен ал соңы $\vec{b}$ векторының соңымен беттеседі.
Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының бастарын беттестіріп, оны паралелограммға дейін толықтырса, онда олардың $\overline{a} + \overline{b}$ қосындысы осы векторлардың ортақ басынан шығатын параллелограммның диагоналына тең.
Векторлардың қосындысының қасиеттері:
1. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (ауыстырымдылық қасиет, коммутативтілік);
2. $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ (үлестірімділік қасиет, ассоциативтілік);
3. Кез келген $\vec{a}$ векторы үшін $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$ орындалатындай $\vec{0}$ табылады;

4. Әрбір $\vec{a}$ векторы үшін $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=0$ орындалатындай қарама–қарсы $-\vec{a}$ векторы табылады.

Анықтама: $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының $\bar{a}-\bar{b}$ айырмасы деп $\vec{b}$ векторымен қосындысы $\vec{a}$ векторы болатындай $\vec{c}$ векторы аталады.

$\bar{a}-\bar{b}$ айырымын құру ережесі:

Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының басы ортақ нүктеге келтірілсе, онда олардың $\bar{a}-\bar{b}$ айырымы $\vec{b}$ (азайғыш) векторының соңынан $\vec{a}$ (азайтқыш) векторының соңына бағытталады.

Анықтама: $\vec{a}$ векторының нақты α санына көбейтіндісі деп модулі $\vec{a}$ векторының модулін α санының модулінің көбейтіндісіне тең вектор аталады. $\left(\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\alpha\right|\right)$. Ол $\vec{a}$ векторына параллель немесе бір түзудің бойында жатады. Егер $\alpha>0$ болса, онда ол $\vec{a}$ векторымен бағыттас ал егер $\alpha<0$ болса, онда $\vec{a}$ векторына қарама–қарсы бағытталады.

Векторды санға көбейту амалының геометриялық мағынасы: $\vec{a}$ векторын α санына көбейткенде вектор α есе «созылады». $\alpha>1,\quad 0<\alpha<1.$

Қасиеттері:

5. $\alpha(\bar{a}+\bar{b})=\alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}$ (векторлардың қосындысына қатысты сандық көбейткіштің үлестірімділік қасиеті);

6. $(\alpha+\beta)\bar{a}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{a}$ (сандардың қосындысына қатысты векторлық көбейткіштің үлестірімділік қасиеті);

7. $\alpha\,(\beta\,\bar{a})=(\alpha\,\beta)\bar{a}$ (сандық көбейткішке қатысты терімділік қасиет).

Векторлардың сызықты тәуелділігі

1 Теорема *:* Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар және $\bar{a}\neq\bar{0}$ болса, онда $\bar{b}=\alpha\,\bar{a}$ орындалатындай жалғыз α саны табылады.

2 Теорема: Егер $\vec{a}$, $\bar{b}$ және $\bar{c}$ векторлары компланар, ал $\bar{a}$, $\bar{b}$ коллениарлы емес болса, онда $\bar{c}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}$ орындалатындай жалғыз α және β сандары табылады.

Анықтама: Егер $\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+...+\alpha_n\overline{a_n}=0$ (1) үшін , $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ сандарының арасынан кем дегенде біреуі нөлден өзгеше болатындай сандар табылса, онда $a_1, a_2,\cdots a_n$ векторлар жүйесі сызықты тәуелді деп аталады.

Егер (1) теңдігі $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$ үшін тура болса, онда $a_1, a_2,\cdots a_n$ векторлар жүйесі сызықты тәуелсіз деп аталады.

3 Теорема: a, $\bar{b}$ векторлар жүйесі осы векторлар коллинеар болғанда ғана, тек сонда ғана сызықты тәуелді болады.

Анықтама: Егер V жиынында векторларды қосу және векторды санға көбейту амалдары анықталған болса, V жиыны векторлық кеңістік деп аталады.

Анықтама: Векторлың кеңістіктің базисі деп, анықталған ретте берілген және келесі шарттарды қанағаттандыратын векторлар жүйесі аталады:

а) жүйе сызықты тәуелсіз; б) кеңістіктің кез келген векторы берілген векторлар жүйесінің сызықты тіркесі болып табылады.

761. Берілген ***a*** және ***b*** векторлары бойынша келесі векторларды салыңыз: 1) ***a*** + ***b****;* 2) ***a*** – ***b****;* 3) ***b*** – ***a****;* 4) –***a*** – ***b***.

762. |***a***| = 13, |***b***| = 19 және |***a*** + ***b***| = 24 берілген. |***a*** – ***b***| табыңыз.

763. |***a***| = 11, |***b***| = 23 және |***a*** + ***b***| = 30 берілген. |***a*** + ***b***| анықтаңыз.

764. ***a*** және ***b*** векторлары өзара перпендикуляр және |***a***| = 5, |***b***| = 12. ***a*** + ***b***| және |***a*** – ***b*** | анықтаңыз.

765. ***a*** және ***b*** векторлары өзара φ = 60°бұрыш жасайды және |**a**| = 5, |***b***| = 8. |**a** + ***b***| және |**a** – ***b***| анықтаңыз.

766. **a** және ***b*** векторлары өзара φ=120° бұрыш жасайды және |**a**| = 3, |***b***| = 5. |**a** + ***b***| және |**a** – ***b***| анықтаңыз.

767. ***a*** және ***b*** векторлары келесі қатынастар орындалу үшін, қандай шарттарды қанағаттандыру керек: 1) |**a** + ***b***| = |**a** – ***b***|, 2) |**a** + ***b***| >|**a** – ***b***|, 3) |**a** + ***b***| <|**a** – ***b***|.

768. **a** + ***b*** векторы ***a*** және ***b*** векторлары жасайтын бұрышты қақ бөлу үшін, ***a*** және ***b*** векторлары қандай шартты қанағаттандыруы керек.

769. Берілген ***a*** және ***b*** векторлары бойынша келесі векторларды салыңыз: 1) 3***a***; 2) $-\frac{1}{2}$***b****;* 3) 2***a*** + $\frac{1}{3}$***b***; 4) $\frac{1}{2}$***a*** – 3***b***.

770. *ABC* үшбұрышында $\overline{AB}=m$ және $\overline{AC}=n.$ Келесі векторлардың әрқайсысын салыңыз: 1) $\frac{m+n}{2}$, 2) $\frac{m-n}{2}$ 3) $\frac{n-m}{2}$, 4) $-\frac{m+n}{2}$.

Масштаб бірлігін $\frac{1}{2}[n]$ ретінде алып, келесі векторларды да салыңыз: 5)$[n]\mathrm{m}+[m]\mathbf{n}$ **, 6)** $[n]\mathbf{m}-[m]\mathbf{n}$ **.**

771. *O* нүктесі ABC үшбұрышының ауырлық центрі. $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=0.$екенін дәлелдеңіз.

772. *ABCDE* дұрыс бесбұрышында оның қабырғаларымен беттесетін $\overline{AB}=m, \overline{BC}=n, \overline{CD}=p, \overline{EA}=r.$ векторлары берілген. Келесі векторларды салыңыз: 1) *m – n + p – q + r*; 2) *m* + 2*p* + 1/2*y* r; 3) 2m+ 1/2*n* – 3*p* – *q* + 2*r*.

773. *ABCDA'B'C'D'* параллелепипедте оның қырларымен беттесетін $\overline{AB}=m,$ $\overline{AD}=n$, және $\overline{AA'}=p$векторлар берілген. Келесі векторлардың әрқайсысын салыңыз: 1) *m + n + p*; 2) m + n + 1/2*p*; 3) *1/2m –1/2 n +p*; 4) *m + n – p*; 5) *–m –n +1/2 p.*

774. Бір нүктеге түсірілген *M, N* және *P* үш күш өзара перпендикуляр бағытталған. Егер $|M|$ =2 *кГ,* $|N|$= 10 *кГ* и $|P|$=11 *кГ* болса, олардың өзара тең әсер етуші *R* күшінің шамасын анықтаңыз.

775. a = {3;–2; 6} және b = {–2; 1; 0} векторлары берілген. Келесі векторлардың координаталық осьтерге проекцияларын табыңыз: 1) ***a***+***b***; 2) ***a*** – ***b***; 3) 2***a***; 4) $-\frac{1}{2}$***b***; 5) 2***a*** + 3***b***; 6) $\frac{1}{3}$***a***– ***b***.

776. ***a*** ={2;–1; 3} және ***b*** = {– 6; 3; –9} векторларының коллинеарлығын тексеріңіз. Бұл векторлардың қайсысы екіншісінен ұзын және қанша есе ұзын екенін, олардың қалай бағытталғанын – бір жаққа ма, әлде қарама қарсы ма екенін көрсетіңіз.

777. α мен β қандай мәндерінде ***a*** = – 2***i*** + 3***j*** + β***k*** және ***b*** = α ***i*** – 6***j*** + 2***k*** векторларының коллинеар болатынын анықтаңыз.

778. A (3; –1; 2), B(1; 2; –1), C(–1; 1; –3) және *D* (3; –5; 3) нүктелерінің трапецияның төбелері екенін тексеріңіз.

779. A (–1; 5; –10), B(5; –7; 8), C (2; 2; –7) және *D* (5; – 4; 2) нүктелері берілген. $\overline{AB}$ және $\overline{CD}$ векторларының коллинеар екенін тексеріңіз; бұл векторлардың қайсысы екіншісінен ұзын және қанша есе ұзын екенін, олардың қалай бағытталғанын – бір жаққа ма, әлде қарама қарсы ма екенін анықтаңыз.

780. *a* = {6; –2; –3} векторының орт векторын табыңыз.

781. *a* = {3; 4; –12} векторының орт векторын табыңыз.

782. *a* = {3; –5; 8} және *b* = {–1; 1; –4}векторларының қосындысы мен айырмасының модульдерін табыңыз.

783. ***c*** векторының ***i***,***j***,***k*** базисы бойынша жіктелуі берілген: ***c***=16***i***–15***j***+12***k***. ***c*** векторына параллель және оған қарама қарсы бағытталған, ұзындығы $|d| = 75$ тең болатын, ***d*** векторының осы базис бойынша жіктелуін табыңыз.

784. ***a*** = {2; – 3; 6} және ***b*** = { – 1; 2; –2} векторлары бір нүктеден шығады. ***a*** және ***b*** векторлары арасындағы бұрыштың биссектрисасы бойымен бағытталған және $|c| = 3\sqrt{42}$ тең болатын, ***c*** векторының координатасын табыңыз.

785. $\overline{AB}$= {2; 6; –4} және $\overline{AC}$={4; 2; –2} векторлары *ABC* үшбұрышының қабырғаларымен беттеседі. Үшбұрыштың төбелерінен салынған, AM, BN, CP медианаларымен беттесетін векторлардың координаттарын анықтаңыз.

786 *). Егер p және q векторлары кез–келген коллинеар емес векторлар болса, онда осы жазықтықта жатқан кез–келген векторы келесі түрде жіктелетінін дәлелдеңіз: $a = \alpha p + \beta q$. Вектордың бұл түрде көрсетілуі оның p және q векторлары бойынша жіктелуі деп, ал α және β сандары осы жіктелудің коэфициенттері деп аталады.

787. Жазықтықта ***p*** = {2; –3}, ***q*** = {*1;* 2}векторлары берілген. ***a*** = {9; 4} векторының ***p, q*** базисы бойынша жіктелуін табыңыз.

788. Жазықтықта үш вектор берілген: ***a***= {3;–2}, ***b***={–2; 1} және ***c***={7; –4}. Осы үш вектордың әрқайсысын қалған екеуін базис ретінде қабылдап, жіктелуін табыңыз.

789. ***a*** = {3; –1}, ***b*** = {1; – 2},***c*** = {– 1; 7} векторлары берілген. ***a*** және ***b*** базисы бойынша ***p*** = ***a*** + ***b*** + ***c*** векторының жіктелуін табыңыз.

790. ABC үшбұрыштың AB= b, AC = c қабырғаларын базис ретінде қабылдап, мединаналарының базистық векторлар арқылы жіктелуін табыңыз.

791. Жазықтықта A (1; –2), B (2; I), C (3; 2) және D (– 2; 3) нүктелері берілген. $\overline{AB}$ және $\overline{AC}$ векторларын базис ретінде қабылдап, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ және $\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}$ векторларының жіктелулерін табыңыз.

792. Егер **p**, **q** және **r** векторлары кез келген компланар векторлар болса, онда кеңістіктің кез–келген векторы келесі түрде жіктелетінін дәлелдеңіз: $a=\alpha p+\beta q+\gamma r$.

793. ***p*** = {3; –2; 1}, ***q*** = { – 1; 1; –2}, ***r*** = {2; 1; –3}векторлары берілген. ***c*** = {11; –6; 5} векторының ***p***, ***q***, ***r*** базисы бойынша жіктелуін табыңыз.

794. ***a*** = {2; 1; 0}, ***b*** = {1; –1; 2}, ***c*** ={2; 2; –1} және ***d*** ={3; 7; –7} векторлары берілген. Қалған үш векторды базис ретінде қабылдап, төрт вектордың әрқайсысының жіктелуін табыңыз.

6.3 Векторлардың скалярлық көбейтіндісі

Аныктама: Екі вектордың скалярлық көбейтіндісі деп, олардың ұзындықтарын осы векторлар арасындағы бұрыштың косинусына көбейткеннен шыққан сан аталады.

$$\overline{a}\,\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\varphi$$

Скалярлық көбейтіндінің геометриялық қасиеттері

1 Теормема: Екі вектордың ортогоналдылығының қажетті және жеткілікті шарты – олардың скалярлық көбейтіндісінің нөлге теңдігі.

2 Теорема: Егер $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлары арасындағы бұрыш сүйір (доғал) болса, онда олардың скалярлық көбетіндісі оң (теріс)болады.

Скалярлық көбейтіндінің алгебралық қасиеттері.

1. $\overline{a}\,\overline{b}=\overline{b}\,\overline{a}$ (коммутативтілік)

2. $\alpha\left(\overline{a}\overline{b}\right)=\left(\alpha\,\overline{a}\right)\overline{b}$ (сандық көбейткіштің ассоциативтілігі)

3. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\overline{c}=\overline{a}\,\overline{c}+\overline{b}\,\overline{c}$ (дистрибутивтілік)

4. Егер $\overline{a}$ векторы нолдік болмаса $\overline{a}\,\overline{a}>0$.

егер $\overline{a}$ векторы нолдік болса $\overline{a}\,\overline{a}=0$, $\overline{a}^2=\left|\overline{a}\right|^2$.

Теорема: Егер $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлары өздерінің декарттық координаталарымен берілсе, онда скалярлық көбейтінді келесі түрде болады $\overline{a}\,\overline{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

1 салдар : Келесі теңдік екі вектордың ортогоналдылығының қажетті және жеткілікті шарты болып табылады: $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$

2салдар : $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторларының арасындағы бұрыш келесі формуламен анықталады:

$$\cos\varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

795. ***a*** және ***b*** векторлары өзара $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ бұрыш жасайды|***a***| = 3, |***b***| = 4 екенін біле отырып, келесі көбейтінділерді есептеңіз: 1) ***ab****;* 2) $\boldsymbol{a}^2$; 3) $\boldsymbol{b}^2$; 4) (***a*** + ***b****)*^{2}; 5) (*3****a*** – *2****b***) (***a*** + 2***b***); *6)* (***a*** –***b***)^2; 7) (3***a*** + 2***b***)^2.

796. ***a*** және ***b*** векторлары перпендикуляр; ***c*** векторы олармен $\frac{\pi}{3}$–ке тең бұрыш құрайды, |***a***|=3, |***b***|=5, |***c***|=8 екенін біле отырып, келесі көбейтінділерді есептеңіз: 1)(3***a***–2***b***)(***b***+3**c**); 2)*(****a****+****b****+****c****)*^{2}; 3) (***a*** + 2***b***– 3**c**)^2.

797. (**a** + ***b***)^2 + (**a** – ***b***)^2 = 2(**a**^{2} + **b**^{2}) берілген тепе–теңдіктің дұрыстығын дәлелдеңіз және оның геометриялық мағынасын анықтаңыз.

798. $-ab \le \vec{a}\vec{b} \le ab$ теңдігін дәлелдеу керек*;* теңдік белгісі қай жағдайда орын алады?

799. ***a****,* ***b****,* ***c*** векторларының әрқайсысы нөлден өзгеше деп есептеп, осы векторлар өзара қалай орналасқанда келесі теңдік орныдалатынын көрсетіңіз:*(ab) c = a (bc).*

800. *a* + *b* + *c* = 0 шартын қанағаттандыратын ***a***, ***b*** және ***c*** бірлік векторлары берілген. *ab* + *bc* + *ca* қосындысын есептеңіз.

801. *a* + *b* + *c* = *0* шартын қанағаттандыратын *a, b* және *c* векторлары берілген. |*a*| = 3, |*b*| =1 және |c| = 4 екенін біле отырып, келесі қосындыны есептеңіз: *ab* + *bc* + *ca.*

802. *a, b, c* векторлары бір–бірімен қос–қостан 60 °бұрыштар құрайды. |a|=4, |*b*|=2 және | c|=6 біле отырып*, p* = *a* + *b* + *c* векторының модулін анықтаңыз.

803. | a | = 3, | *b* | =5 берілген. к–ның қандай мәнінде екендігін ескере отырып, a +кb, a – кb векторларының өзара перпендикуляр болатынын анықтаңыз.

804. *a* + b векторы *a* – *b* векторына перпендикуляр болу үшін, *a* және *b* векторлары қандай шарттарды қанағаттандыруы керек.

805. *p* = *b* *(ac)* – *c* *(ab)* векторының *a*–векторына перпендикуляр екенін дәлелдеңіз.

806. $p = b - \frac{a(ab)}{a^2}$ векторының *a*–векторына перпендикуляр екенін дәлелдеңіз.

807. *ABC* үшбұрышының қабырғаларымен беттесетін, *AB* = *b* және *AC* = *c* векторлары берілген. *BD*–биіктігімен беттесетін, вектордың *b* және *c* векторлары бойынша жіктелуін табыңыз.

808. ***a*** және *b* векторлары $\varphi = \frac{\pi}{6}$ бұрышын құрайды; мұндағы: |a|=$\sqrt{3}$, |b|=1, *p* = *a* + *b* және *q* = *a* –*b* векторларының *α* бұрышын есептеңіз.

809. Тең бүйірлі тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарынан жүргізілген медианалары арасындағы доғал бұрышты табыңыз.

810. Егер айнымалы ***x*** векторының басы А нүктесінде орналасса және х векто-ры ***xa*** = *к* шартын қанағаттандырса, онда ***x*** векторының ұштарының геометриялық орнын анықтаңыз. Мұндағы, ***a*** – берілген вектор және к – берілген сан.

811. Егер айнымалы ***x*** векторының басы А нүктесінде орналасса және х векто-ры ***xa*** = к, ***xb*** = *p* шарттарын қанағаттандырса, онда ***x*** векторының ұштарының геометриялық орнын анықтаңыз. Мұндағы, ***a, b*** –коллинеар емес векторлар және к , *p* – берілген сандар.

812. ***a*** = { 4; – 2; – 4 }, ***b*** = { 6; –3; 2} векторлары берілген. Келесі скаляр көбейтінділерді табыңыз: 1) *ab;* 2) $\sqrt{a^2}$; 3) $\sqrt{b^2}$; 4) *(2a –b) (a+ 2b);* 5) $(a+b)^2$; 6)$(a–6)^2$.

813. Егер **f** = {3; –5; 2} күшінің түсу нүктесі S (2; –5; –7) векторының басынан ұшына орын ауыстырса, **f** күші қандай жұмыс атқарады?

814. A(– 1; 3; –7), B(2; – 1; 5) және C (0; 1; –5) нүктелері берілген. Есептеңіз: 1) $(2\overline{AB}-\overline{CB})\ (2\overline{BC}+\overline{BA})$; 2) $\sqrt{\overline{AB}^2}$; 3) $\sqrt{\overline{AC}^2}$; 4) $(\overline{AB}\ \overline{AC})\ \overline{BC}$ және $\overline{AB}(\ \overline{AC}\ \overline{BC})$ векторларының координаталарын табыңыз.

815. Егер **f** = {3; – 2; –5) күшінің түсу нүктесі түзу сызықты қозғалыс бойымен А (2, –3, 5) нүктесінен В (3; –2; –1) нүктесіне орын ауыстырса, **f** күші қандай жұмыс атқарады?

816. Бір нүктеге түсірілген M={3; –4; 2}, N={2; 3; –5} және P={– 3; –2; 4} күштері берілген. Осы күштердің өзара тең әсер күші түзу сызықты қозғалыс бойымен M_1 (5, 3, –7) нүктесінен M_2 (4; –1; –4) нүктесіне орын ауыстырса, ол қандай жұмыс атқарады?

817. *A* (1; – 2; 2), *B(1;* 4; 0), *C(*–4; 1; 1) және D(–5; –5; 3) төртбұрыштың төбелері берілген. Төртбұрыштың *AC* және *BD* диагоналдарының өзара перпендикуляр екенін дәлелдеңіз.

818. α –ның қандай мәнінде ***a*** = *α**i*** – *3**j*** + *2* ***k*** және ***b*** = ***i*** + *2**j*** – α**k** векторлары өзара перпендикуляр болатынын анықтаңыз.

819. ***a*** = {2; –4; 4} және ***b*** = *{* – 3; 2; 6} векторлары құрайтын бұрыштың косинусын есептеңіз.

820. *A(*–1; –2; 4), *B(*–4; –2; 0) және C(3; –2; 1) үшбұрыштың төбелері берілген. Оның В төбесіндегі ішкі бұрышының шамасын анықтаңыз.

821. A(3; 2; –3), B(5; 1; –1) және C(1; –2; 1) үшбұрыштың төбелері берілген. Оның A төбесіндегі сыртқы бұрышының шамасын анықтаңыз.

822. A(1; 2; 1), B(3; –1; 7), C(7; 4; –2) үшбұрышының ішкі бұрыштарын есептеп, оның тең бүйірлі екенін көрсетіңіз.

823. ***a*** = {6; –8; –7,5} векторы *Oz* осімен сүйір бұрыш жасайды. | ***x*** | = 50 екенін біле отырып, $\vec{x}$ векторының координаталарын табыңыз.

824. ***a***={2; 1; –1} векторына коллинеар және $\vec{x}\vec{a}=3$ шартын қанағаттандыратын $\vec{x}$ векторын табыңыз.

825. $\vec{x}$ векторы *a* = 3*i* + 2*j* + 2*k* және *b* = 18*i*– 22*j* – 5*k*, векторларына перпендикуляр және *Oy* осімен доғал бұрыш жасайды. |*x*| = 14 екенін біле отырып, $\vec{x}$ векторының координаталарын табыңыз.

826. $\vec{x}$ векторы *a* = {2; 3; –1} және *b* = {1; –2; 3} векторларына перпендикуляр және $\vec{x}(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6$ шартын қанағаттандырады. $\vec{x}$ векторының координаталарын табыңыз.

827. *a* = {3; –1; 5} және *b* = {1*;* 2; –3} векторлары берілген. $\vec{x}$ векторы *Oz* осіне перпендикуляр және $\vec{x}\vec{a}=9$, $\vec{x}\vec{b}=-4$ шарттарын қанағаттандырады. $\vec{x}$ векторының координаталарын табыңыз.

828. *a = 2i –y + 3k, b = i – 3y + 2k* және *c=3i + 2j – 4k* векторлары берілген. ***xa* = – 5, *xb = –11, xc = 20*** шарттарын қанағаттандыратын, $\vec{x}$ векторының координаталарын табыңыз.

829. Координаталық осьтермен бірдей бұрыштар жасайтын оське S={4;–3;2} векторының проекциясын табыңыз.

830. *Ox, Oz* координаталық осьтермен сәйкесінше *a = 45°,* γ = *60°* бұрыштар жасайтын, ал *Oy* –осімен β сүйір бұрыш жасайтын оське берілген S={$\sqrt{2}$;–3;–5} векторының проекциясын табыңыз.

831. A(3; –4; –2) және B (2; 5; –2) нүктелері берілген. $\overline{AB}$ векторы ның *Ox, Oy* координаталық осьтермен сәйкесінше α =60°, β =120° бұрыштар жасайтын, ал *Oz* –осімен γ доғал бұрыш жасайтын оське проекциясын табыңыз.

832. ***a*** = { 5; 2; 5 }векторының ***b*** = {2; –1; 2} векторының осіне түскен проекциясын есептеңіз.

833.*a* *= 3i – 6j – k*, ***b*** *= i + 4j – 5k* және ***c****=3i – 4y+12k* векторлары берілген. $пр_c$(a + b) есептеңіз.

834.*a = {1;–3;4} b = {3; –4; 2}* және *c = { – 1;1;4}* векторлары берілген. $пр_c$ (a+ b) есептеңіз.

835. *a =–2i+y+t, b =i + 5j* және *c = 4i+4y–2k* векторлары берілген. $пр_c$(3a–2 *b*) есептеңіз.

836. *R={1; –*8; *–7}* векторы арқылы анықталатын күш өзара перпендикуляр үш бағытпен жіктелген. Олардың біреуі a = 2i + 2y + k векторы арқылы берілген. R векторының a бағыты бойынша құраушы күштерін табыңыз.

837. M(–5; 7; – 6) және $N(7;$ –9; 9) екі нүкте берілген. $\vec{a}=\{1;-3;1\}$ векторының $\overline{MN}$ векторының осіне проекциясын табыңыз..

838. A(–2; 3; –4), B (3; 2; 5), C(1; –1; 2), D (3; 2; – 4) нүктелері берілген. $\overline{AB}$ векторының $\overline{CD}$ векторына проекциясын табыңыз.

6.4 Векторлардың векторлық көбейтіндісі

Анықтама: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторлары компланар емес болсын, онда векторлардың векторлық көбейтіндісі деп, $[\bar{a}\bar{b}]$ символымен белгіленетін және келесі үш шартпен анықталған вектор аталады:

1. $[\bar{a}\bar{b}]$ векторлық көбейтіндінің модулі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының модулін олардың арасындағы бұрыштың синусына көбейткенге тең

$$\left|[\bar{a}\bar{b}]\right| = |\bar{a}||\bar{в}|\sin\varphi .$$

2. $[\bar{a}\bar{b}]$ векторы $\bar{a}$ және $\vec{b}$ векторларының әрқайсысына перпендикуляр.

3. Векторлық көбейтіндінің бағыты оң қол ережесіне сәйкес, яғни: егер $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $[\bar{a}\bar{b}]$ векторларының басы ортақ нүктеге келтірілсе, онда $[\bar{a}\bar{b}]$ ортаңғы саусақ сияқты, $\vec{a}$ бас бармақ, ал $\vec{b}$ сұқ саусақ сияқты бағытталған.

Векторлық көбейтіндінің геометриялық қасиеттері

1 Теорема: Екі вектордың коллинеарлығының қажетті және жеткілікті шарты олардың векторлық көбейтіндісінің нөлге теңдігі болып табылады.

2 Теорема: Векторлық көбейтіндінің модулі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының ортақ басымен келтіріп құрастырылған параллелограммның ауданына тең.

Векторлық көбейтіндінің алгебралық қасиеттері

1. $[\bar{a}\bar{b}] = -[\bar{b}\bar{a}]$ (антикоммутативтілік)

2. $[(\alpha\bar{a})\bar{b}] = \alpha[\bar{a}\bar{b}]$.

3) $[(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c}] = [\bar{a}\cdot\bar{c}] + [\bar{b}\cdot\bar{c}]$;

4) Кез келген $\bar{a}$ үшін $[\bar{a}\,\bar{a}] = \bar{0}$; $|[\bar{a}\cdot\bar{a}]| = |\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot\sin 0^o = 0$

Теорема: Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары өздерінің декарттық координаталарымен берілсе, яғни $\bar{a}\{x_1\, y_1\, z_1\}$ және $\bar{b}\{x_2\, y_2\, z_2\}$ болса, онда векторлық көбейтіндінің координаталары келесі түрде анықталады .

$$[\bar{a}\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\bar{k}$$

$$[\bar{a}\bar{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

839. *a* және *b* векторлары өзара $\varphi = \frac{\pi}{6}$ бұрыш құрайды. | *a* |= 6, |*b*| =5 болса, |[ab] | –векторлық көбейтіндінің модулін есептеңіз.

840. Берілгені: |*a*| = *10*, |*b*| = *2 және a b=12*. [ab] | –векторлық көбейтіндінің модулін есептеңіз.

841. Берілгені: |*a*| = *3*, |*b*| = *26 және* |*[ab]*| = *72*. *ab*– скаляр көбейтіндіні есептеңіз.

842. *a* және *b* векторлары өзара перпендикуляр. |a| = 3, |*b*|=4 болса, келесі векторлық көбейтінділердің модулін есептеңіз.

1) |*[(a + b) (a– b)]*|; *2)* | *[(3a–b)(a–2b)]*|.

843. *a* және *b* векторлары өзара $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ бұрыш құрайды. |a| = 1, |b| = 2 болса, келесі векторлық көбейтінділерді есептеңіз:

1*)* $[a\ b]^2$; *2)* $[(2a + b)(a + 2b)]^2$; *3)* $[(a + 3b)(3a - b)]^2$.

844. *a*+ *b* және a – *b* векторлары коллинеар болу үшін, *a мен b* векторлары қандай шартты қанағаттандыруы керек?

845.Тепе–теңдікті дәлелдеңіз: $[a\ b]^2 + (a\ b)^2 = a^2 b^2$.

846. $[a\ b]^2 \le a^2 b^2$ теңсіздігін дәлелдеңіз; Қандай жағдайда теңдік белгісі орындалады?

847. ***p, q, r, n*** – кез келген векторлар берілген**.** *a = [pn], b = [qn], c = [rn]* векторларының компланар екенін дәлелдеңіз.

848. *a, b* және *c* векторлары *a+b+c=0* шартын қанағаттандырады. *[ab]=[bc]=[ca]* екенін дәлелдеңіз.

849. *a, b, c* және *d* векторлары *[ab] = [cd]; [ac]= [bd]* қатынастарымен байланысқан. *a – d* және *b – c* векторларының коллинеар екенін дәлелдеңіз.

850. *a={3;–1;–2}* және *b={1;2;–1}* векторлары берілген. Келесі векторлық кө-бейтінділердің координаталарын анықтаңыз:1)[ab];2)[(2a+b)b]; 3)[(2a–b)(2a+b)].

851. A(2; – 1; 2), B(1;2; – 1) және C(3; 2; 1) нүктелері берілген Келесі векторлық көбейтінділердің координаталарын анықтаңыз:1) $[\overline{AB}\ \overline{BC}]$; 2) $[(\overline{BC} - 2\ \overline{CA})\ \overline{CB}]$.

852. A(2;–1;1) нүктесіне *f* ={3;2;–4} күші түсірілген. Осы күштің координаталар бас нүктесіне қатысты моментін анықтаңыз.

853. M_0(4;–2;3) нүктесіне P={2;–4;5} күші түсірілген . Осы күштің A(3;2;–1) нүктесіне қатысты моментін анықтаңыз.

854. C(2;–1;–2) нүктесіне Q={ 3;4;–2} күші түсірілген . Осы күштің коор-динаталар бас нүктесіне қатысты шамасын және моменттің бағыттаушы косинустарын анықтаңыз.

855. A (4;2;–3) нүктесіне P ={2;2;9 } күші түсірілген. Осы күштің C(2; 4; 0) нүктесіне қатысты шамасын және моменттің бағыттаушы косинустарын анықтаңыз.

856. C(–1;4;–2) нүктесіне түсірілген M ={2;–1;–3}, N={3;2;–1} және P={–4;1;3} күштері берілген. Осы күштердің тең әсер етуші күшінің А(2;3;–1) нүктесіне қатысты шамасын және моменттің бағыттаушы косинустарын анықтаңыз.

857. A(1;2;0), B(3;0;–3) және C(5;2;6) нүктелері берілген. ABC үшбұрышының ауданын есептеңіз.

858. Үшбұрыштың төбелері берілген: A(1;–1;2), B(5;–6;2) және C(1;3;–1). B төбесінен AC қабырғасына түсірілген биіктіктің ұзындығын есептеңіз.

859. a={2;–2;1} және b={2;3;6} векторлары арасындағы бұрыштың синусын табыңыз.

860. x векторы a={4;–2;–3} және а={0;1;3} векторларына перпендикуляр және Oy осімен доғал бұрыш құрайды. $|x|$ = 26 екені белгілі болса, оның координаталарын табыңыз.

861. m векторы Oz өсіне және a={8;–15;3} векторына перпендикуляр, Ox өсімен сүйір бұрыш құрайды. $|m|$=51 екені белгілі болса, оның координаттарын анықтаңыз.

862. x векторы a={2;–3;1) және b={1;–2;3} векторларына перпендикуляр және $x(i+2j–7k)$=10 шартын қанағаттандырса, х векторының координата-ларын табыңыз.

863. Тепе–теңдікті дәлелдеңіз:

$(l^2_1 +m^2_1 + n^2_1)(l^2_2 +m^2_2 + n^2_2)–(l_1l_2 +m_1m_2 + n_1n_2)^2= = (m_1n_2 + m_2n_1)^2+ (l_2 n_1 –l_2 n_1)^2 + (l_1m_2 – l_2m_1)^2$

6.5 Векторлардың аралас көбейтіндісі

Анықтама: Егер векторлар бір немесе параллель жазықтықтарда жатса, онда олар компланар векторлар деп аталады.

Анықтама: $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ кез келген үш вектор берілген болсын. Егер $\vec{a}$ векторы $\vec{b}$ векторына векторлық түрде көбейтіліп, алынған $[\bar{a}\bar{b}]$ векторы $\vec{c}$ векторына скалярлы көбейтілсе, онда нәтижесінде алынған $[\bar{a}\bar{b}]\bar{c}$ саны $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп аталады.

Аралас көбейтіндінің геометриялық мағынасы

Теорема: $[\bar{a}\bar{b}]\bar{c}$ аралас көбейтінді $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ ортақ басына келтірілген векторлардан құрастырылған параллелепипедтің көлеміне тең, егер $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ үштігі оң болса онда нәтиже оң таңбамен, кері жағдайда теріс таңбамен алынады. Егер $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары компланар болса, онда $[\bar{a}\bar{b}]\bar{c}$ мәні нолге тең.

1 салдар: Үш вектордың компланар болуының қажетті және жеткілікті шарты– олардың аралас көбейтіндісінің нөлге теңдігі.
2 салдар: Екі векторы бірдей болатын, үш вектордың аралас көбейтіндісі нөлге тең.

Аралас көбейтіндінің қасиеттері:

1. Аралас көбейтінді көбейткіштерді топтастырудан тәуелсіз:
$[\bar{a}\bar{b}]\bar{c} = \bar{a}[\bar{b}\bar{c}]$.

2. Аралас көбейтінді көбейткіштердің айналмалы орын ауыстаруларынан өзгермейді:
$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}$.

3. Екі вектордың қосындысының басқа екі векторға аралас көбейтіндісі әр вектордың қосылғыш векторға аралас көбейтінділерінің қосындысына тең:
$(\bar{a}_1 + \bar{a}_2)\bar{b}\bar{c} = \bar{a}_1\bar{b}\bar{c} + \bar{a}_2\bar{b}\bar{c}$.

4. Аралас көбейтіндінің скалярлық көбейткішін таңбаның алдына шығаруға болады:
$(\lambda\bar{a})\bar{b}\bar{c} = \lambda(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$.

Аралас көбейтіндіні декарттық координатада өрнектеу

Теорема: Егер $\bar{a}$, $\bar{b}$ және $\bar{c}$ векторлары өздерінің тік бұрышты декарттық координаталарымен берілсе, яғни $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\bar{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$болса, онда олардың аралас көбейтіндісі $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ жолдары осы векторлардың координаталарынан құралған анықтауышқа тең.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} .$$

Салдар: Үш вектордың компланарлық шартының қажетті және жеткілікті шарты $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\bar{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$ жолдары осы векторлардың координаталарынан құралған анықтауыштың нолге теңдігі болып табылады.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Теорема: Үщ вектор компланар болуы үшін олардың аралас көбейтіндісі нолге тең болуы қажетті және жеткілікті.

865. a, b, c векторларының қандай үштік (оң немесе сол жақ) екенін анықтаңыз:
1) a = k, b = i, c = y; 2)a = i, b = k, c = j;
3) a = j, b = i, c = k; 4) a = i + y, b = j, c = k;
5) a = i + j, b = i – j, c= j; 6) a = i + y, b = i – j, c = k.

866. Оң үштік құрайтын a, b, c векторлары өзара перпендикуляр.| a | = 4, | b | = 2, | c | = 3 болса, abc–ні есептеу керек.
867. c векторы a және b векторларына перпендикуляр, a және b арасындағы бұрыш 30 °. | a | = 6, | b | = 3, | c | = 3 белгілі болса, abc есептеңіз.
868. | abc | | <| a | | b | | c | екенін дәлелдеңіз, қандай жағдайда теңдік белгісі болады?
869. (a + b) (b + c) (c + a) = 2abc тепе–теңдігін дәлелдеңіз.
870. ab (c + λa + μb)= abc тепе–теңдігін дәлелдеңіз, мұндағы |a| және μ– кез–келген сандар.
871. $[ab]$ + $[bc]$+ $[ca]$ = 0 шартын қанағаттандыратын, a,b,c векторлары компланар болатын дәлелдеу керек.
872. a, b, c векторларының компланар болуының қажетті және жеткілікті шарты αa + βb +γc = 0 тәуелділігі екенін дәлелдеңіз, мұндағы α,β,γ сандардың кем дегенде біреуі нөлге тең емес.
873. **a** = {1; – 1; 3}, **b** = { – 2; 2; 1}, **c** = {3;–2;5} векторлары берілген, **a b c** – аралас көбейтіндіні есептеңіз.
874. **a, b, c** векторлары компланар векторлар бола ма, анықтаңыз**:**
1) ***a*** = {2;3; – 1}, ***b*** = {l; – 1;3}, ***c*** = { 1; 9; – 11};
2) ***a*** = {3; – 2; 1 }, ***b*** = {2;1;2}, ***c*** = {3; – 1; –2);
3) ***a*** = {2; –1; 2}, ***b*** = {1;2;– 3 }, ***c*** = {3;– 4; 7 }.
875. A(1; 2; –1), B (0; 1; 5), C (–1; 2; 1), D (2; 1; 3) нүктелерінің бір жазықтықта жататынын дәлелдеу керек.
876. Төбелері A (2; –1; 1), B (5; 5; 4), C (3; 2; – 1) және D (4; 1; 3) нүктелерінде орналасқан, тетраэдрдің көлемін есептеңіз.
877. Тетраэдрдің төбелері A(2;3;1), B(4;1;–2), C(6;3;7), D(–5;–4;8) нүктелерінде орналасқан. D төбесінен түсірілген биіктіктің ұзындығын табыңыз.
878. Тетраэдрдің көлемі V=5, үш төбесі A(2; 1; –1), B (3; 0; 1), C (2; –1; 3) нүктелерінде орналасқан. Егер D төбесі Oy осінде орналасқаны белгілі болса, D төбесінің координаталарын табыңыз.
879. Тепе– теңдікті дәлелдеңіз: [***a***[***bc***]] = ***b***(***ac***) – ***c***(***ab***).
881. Үшбұрыштың төбелері A(2; –1; –3), B(1; 2;–4) және C(3; –1; –2) берілген. Егер h векторы A төбесінен қарсы жатқан қабырғаға жүргізілген биіктікке коллинеар болса және Oy осімен доғал бұрыш жасап, модулі 2√34–ге тең болса, осы вектордың координаталарын табыңыз.
882. a, b, c векторларының әрқайсысы нөлден өзгеше деп есептей отырып, олар қандай ретпен орналасқан кезде теңдік дұрыс болатынын анықтаңыз.
[***a***[***bc***]] = [[***ab***]***c***]
883. Тепе–теңдіктерді дәлелдеңіз:
1) [***a***[***bc***]] + [***b***] [***ca***] + [***c***[***ab***] = 0;
2) [***ab***] [***cd***] = (***ac***) (***bd***) – (***ad***) (***bc***)*;*

3) $[\boldsymbol{ab}]\,[\boldsymbol{cd}] + [\boldsymbol{ac}]\,[\boldsymbol{db}]+[\boldsymbol{ad}]\,[\boldsymbol{bc}] = 0$;
4) $[[\boldsymbol{ab}]\,[\boldsymbol{cd}]] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{abd}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{abc})$;
5) $[\boldsymbol{ab}]\,[\boldsymbol{bc}]\,[\boldsymbol{ca}] = (\boldsymbol{abc})^2$;
6) $[\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{ab}]]]] = \boldsymbol{a}^4\boldsymbol{b}$ a және b векторлары өзара перпендикуляр болған жағдайда;
7) $[\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}\,[\boldsymbol{cd}]]] = [\boldsymbol{ac}]\,(\boldsymbol{bd}) - [\boldsymbol{ad}]\,(\boldsymbol{bc})$;
8) $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}[\boldsymbol{cd}]]] = (\boldsymbol{acd})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{ab})[\boldsymbol{cd}]$;
9) $[\boldsymbol{ab}]^2\,[\boldsymbol{ac}]^2 - ([\boldsymbol{ab}]\,[\boldsymbol{ac}]) = \boldsymbol{a}^2\,(\boldsymbol{abc})^2$;
10) $[[\boldsymbol{ab}]\,[\boldsymbol{bc}]\}\,[[\boldsymbol{bc}]\,[\boldsymbol{ca}]]\,[[\boldsymbol{ca}]\,[\mathrm{a}\boldsymbol{b}]] = (\boldsymbol{abc})^4$;
11) $(\boldsymbol{ab})\,[\boldsymbol{cd}] + (\mathrm{a}\boldsymbol{c})\,\backslash\boldsymbol{db}] + (\boldsymbol{ad})\,[\boldsymbol{bc}] = \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{bcd})$;
12) $(abc)(ade) = \begin{vmatrix} abd & abe \\ acd & ace \end{vmatrix}$

884. a, b және c үш компланар емес векторлар ортақ нүктеге келтірілген. Осы векторлардың ұштары арқылы өтетін жазықтық $[\boldsymbol{ab}] + [\boldsymbol{bc}] + [\boldsymbol{ca}]$ векторына перпендикуляр екенін дәлелдеңіз.

7 Беттің теңдеуі және сызықтың теңдеулері

7.1 Беттің теңдеуі

Таңдап алынған координаталар жүйесіндегі үш айнымалысы бар беттің теңдеуі деп, осы бетте жататын әрбір нүктенің координаталары қанағаттандыратын және оған жатпайтын кез келген нүктенің координаталары қанағаттандырмайтын келесі түрдегі Р (x, y, z) = 0 теңдеуі аталады.

885. $M_1(2;-3;6)$, $M_2(0;7;0)$, $M_3(3;2;-4)$, $M_4(2\sqrt{2};4;-5)$, $M_5(1;-4;-5)$, $M_6(2;6;-\sqrt{5})$ нүктелері берілген. Осы нүктелердің қайсысы $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ теңдеуімен берілген бетте жататынын немесе жатпайтынын анықтаңыз? Берілген теңдеумен қандай бет анықталады?

886. $x^a + y^a + z^2 = 9$ теңдеуімен берілген беттің бойынан 1) абсциссасы 1–ге тең, ординатасы 2–ге тең; 2) абсциссасы 2–ге тең, ординатасы 5–ке тең; 3) абсциссасы 2–ге тең, апликатасы 2–ге тең; 4) ординатасы 2–ге тең, апликатасы 4–ке тең болатын нүктелерді табыңыз.

887. Қандай геометриялық кескіндер кеңістіктегі декарттық тік бұрышты координаталарда келесі теңдеулерді анықтайтынын көрсетіңіз:
1) $x=0$; 2) $y=0$; 3) $z=0$; 4) $x-2=0$; 5) $y+2=0$; 6) $z+5=0$; 7) $x^3+y+z^2=25$;
8) $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=49$; 9) $x+2y^2+3z^2=0$; 10) $x^2+2y^2+3z^2+5=0$;
11) $x-y=0$; 12) $x+z=0$; 13) $y-2=0$; 14) $xy=0$; 15) $xz=0$; 16) $yz=0$; 17) $xyz=0$;
18) $x^2-4x=0$; 19) $xy-y^a=0$; 20) $yz+z^2=0$.

888. $F_1(-c;\ 0;\ 0)$ және $F_2(c;\ 0;\ 0)$ нүктелері берілген. Берілген екі нүктеге дейінгі арақашықтықтардың қосындысы $a>0$, $c>0$; $a>c$ шарттары орындалған кезде, $2a$ –ға тең тұрақты шама болатын нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін қорытып шығарыңыз.

889. Центрі координаталар бас нүктесінде орналасқан және радиусы r тең сфераның теңдеуін қорытып шығарыңыз.

890. Центрі координаталар $C(\alpha; \beta; \gamma)$ нүктесінде орналасқан және радиусы r тең сфераның теңдеуін қорытып шығарыңыз.

891. $P(2; 6; -5)$ нүктесінен Oxz жазықтығымен қиылысқанға дейін, мүмкін болатын барлық сәулелер жүргізілген. Олардың орталарының геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз.

892. $A(3; -5; 7)$ нүктесінен Oxy жазықтығымен қиылысқанға дейін, мүмкін болатын барлық сәулелер жүргізілген. Олардың орталарының геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз.

893. $C(-3; -5; 9)$ нүктесінен Oyz жазықтығымен қиылысқанға дейін, мүмкін болатын барлық сәулелер жүргізілген. Олардың орталарының геометриялық орындарының теңдеуін құрыңыз.

894. $F_1(2; 3; -5)$ және $F_2(2; -7; -5)$ нүктелеріне дейінгі арақашықтықтардың квадраттарының айырмасы 13–ке тең тұрақты шама болатын, нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін қорытып шығарыңыз.

895. $F_1(-a; 0; 0)$ және $F_2(a; 0; 0)$ нүктелеріне дейінгі арақашықтықтардың квадраттарының қосындысы $4a^2$ тең тұрақты шама болатын, нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін қорытып шығарыңыз.

896. Кубтың төбелері $A(-a; -a; -a)$, $B(a; -a; -a)$, $C(-a; a; -a)$ және $D(a; a; a)$ нүктелерде орналасқан. Осы кубтың жақтарына дейінгі арақашықтықтардың квадраттарының қосындысы $8a^2$ тең тұрақты шама болатын, нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін қорытып шығарыңыз.

897. Берілген $M_1(1; 2; -3)$ және $M_2(3; 2; 1)$ нүктелерінен бірдей қашықтықта орналасқан, нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін қорытып шығарыңыз.

898. Берілген $F_1(0; 0; -4)$ және $F_2(0; 0; 4)$ нүктелерге дейінгі арақашықтықтардың қосындысы 10–ға тең тұрақты шама болатын, нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін қорытып шығарыңыз.

899. Берілген $F_1(0; -5; 0)$ және $F_2(0; 5; 0)$ нүктелерге дейінгі арақашықтықтардың айырмасы 6–ға тең тұрақты шама болатын, нүктелердің геометриялық орындарының теңдеуін қорытып шығарыңыз.

7.2 Кеңістіктегі сызықтың теңдеуі. Үш беттің қиылысуы туралы есеп

Кеңістіктегі сызық $F(x, y, z) = 0$ және $\Phi(x, y, z) = 0$ беттерінің қиылысуымен анықталады.

$$\begin{cases} F(x, y, z,) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Егер $F(x, y, z) = 0$, $\Phi(x, y, z)$==0, $\Psi(x, y, z) = 0$ – үш беттің теңдеулері болса, онда олардың қиылысу нүктелерін табу үшін, келесі жүйенің шешімін табу керек:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \\ \Psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Осы жүйенің әрбір x, y, z шешімі берілген беттердің қиылысу нүктелерінің бірінің координаталары болып табылады.

900. $M_1(3; 4; -4)$, $M_2(-3; 2; 4)$, $M_3(-1-4; 4)$ және $M_4(2; 3; -3)$ нүктелері берілген. Олардың қайсысы

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 36 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

сызығында жататынын, ал қайсысы жатпайтынын анықтаңыз.

901. Келесі сызықтардың қайсысы координаталар бас нүктесі арқылы өтетінін анықтаңыз:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

902. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 25 = 0 \end{cases}$

теңдеуімен берілген сызықта 1) абсциссасы 3–ке тең болатын; 2) ординатасы 2–ге тең болатын; 3) апликатасы 8–ге тең болатын нүктелерді табыңыз.

903. Қайсы сызықтар келесі теңдеулермен анықталатынын көрсетіңіз:

1) $\begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 0; \\ z = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 0; \\ z = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 2 = 0; \\ y = 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + 2 = 0; \\ y - 3 = 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x - 5 = 0; \\ z + 2 = 0; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} y + 2 = 0; \\ z - 5 = 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9; \\ z = 0; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49; \\ y = 0; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25; \\ x = 0; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 20 \\ z - 2 = 0; \end{cases}$

904. Oxz жазықтығы мен центрі координаталар бас нүктесінде орналасқан, радиусы 3–ке тең сфераның қиылысу сызығының теңдеуін құрыңыз.
905. Oxz жазықтығына параллель және одан екі бірлік қашықтықта сол жақ жартыкеңістікте орналасқан жазықтықпен центрі координаталар бас нүктесінде орналасқан, радиусы 5–ке тең сфераның қиылысу сызығының теңдеуін құрыңыз.
906. *Oyz* жазықтығы мен центрі *C*(5; –2; 1) нүктесінде орналасқан, радиусы 13–ке тең сфераның қиылысу сызығының теңдеуін құрыңыз.
907. Центрі координаталар бас нүктесінде орналасқан, радиусы 6–ға тең сферамен центрі центрі *C*(5; –2; 1) нүктесінде орналасқан, радиусы 5–ке тең екі сфераның қиылысу сызығының теңдеуін құрыңыз.
908. Үш беттің қиылысу нүктелерін табыңыз: $x^2+y^2+x^2=49,\ y-3=0,\ z+6=0$.
909. Үш беттің қиылысу нүктелерін табыңыз:
$x^2+y^2+x^2=9,\ x^2+y^2+(z-2)^2=5,\ y-2=0$.

7.3 Жасаушысы координаталық осьтердің біріне параллель болатын, цилиндрлік беттің теңдеуі

F(x, y) = 0 түріндегі екі айнымалысы бар теңдеу кеңістіктік координаталар жүйесінде *Oz* осіне параллель болатын, цилиндрлік бетті анықтайды.
Жазықтықта координаталық осьтері *Ox* және *Oy* болатын *жүйеде F (x, y) =0* теңдеуі қарасырып отырған цилиндрдің бағыттаушы сызығын анықтайды. Бұл сызық кеңістіктік координаталар жүйесінде келесі түрдегі екі теңдеумен берілуі керек:

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Тура солай: *F(x,* z) = 0 теңдеуі кеңістіктік координаталар жүйесінде *Oy* осіне параллель болатын, цилиндрлік бетті анықтайды, ал *F*(*y,* z) = 0 теңдеуі кеңістіктік координаталар жүйесінде *Ox* осіне параллель болатын, цилиндрлік бетті анықтайды.
910. Қайсы геометриялық кескіндер кеңістіктік координата жүйесінде келесі теңдеулермен анықталатынын көрсетіңіз:
1) $x^2+z^2=25$; 2) $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$; 3) $\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ 4) $x^2=6z$; 5) $x^2-xy=0$; 6) $x^2-z^2=0$; 7) $y^2+z^2=0$; 8) $x^2+4y^2+4=0$; 9) $x^2+z^2=2z$; 10) $y^2+z^2=-z$.
911. $\begin{cases} x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25 \\ x^2+y^2+z^2=16 \end{cases}$ шеңберін 1) *Oxy;* 2) *Oxz;* 3) *Oyz* жазықтықтарына проекциялайтын цилиндрдің теңдеуін табыңыз.

912. $\begin{cases}(x+1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=36\\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25\end{cases}$

Шеңбердің 1) *Oxy*; 2) *Oxz*; 3) *Oyz* жазықтықтарындағы проекцияларының теңдеулерін табыңыз.

8 Жазықтықтың теңдеуі

8.1 Жазықтықтың жалпы теңдеуі

Теорема: Декарттық координаталарда әрбір жазықтық бірінші ретті теңдеу арқылы анықталады.

$Ax+By+Cz+D=0$ жазықтықтың жалпы теңдеуі

Анықтама: $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығына перпендикуляр $\bar{n}=\{A,B,C\}$ векторы осы жазықтықтың нормаль векторы деп аталады.

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – берілген $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесі арқылы өтетін және нормаль векторы $\bar{n}=\{A,B,C\}$ болатын жазықтықтың теңдеуі.

Бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі

$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$–берілген нүктелер болсын.

$M(x,y,z)$– жазықтықтың кез келгені нүктесі.

$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$

$\overline{M_1M_3}=\{x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1\}$

$\overline{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$

M нүктесі M_1,M_2,M_3 нүктелерімен бір жазықтықта жатады сонда тек сонда ғана, егер $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ векторлары компланар болса.

$\begin{vmatrix}x-x_1, y-y_1, z-z_1\\ x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\\ x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1\end{vmatrix}=0$ – бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі.

Екі жазықтық арасындағы бұрыш. Жазықтықтартың параллельдік және перпендикулярлық шарттары

α_1 және α_2 жазықтықтары жалпы теңдеулерімен берілсін.

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \qquad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

$\bar{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\} \qquad \bar{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$

Екі жазықтық арасындағы бұрышты табу үшін олардың нормаль векторлары арасындағы φ бұрышын табамыз. $\cos\varphi=\dfrac{\overline{n_1}\,\overline{n_2}}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|}$

Параллельдік шарт: α_1жазықтығы α_2–ге параллель, демек $\overline{n_1}$ мен $\overline{n_2}$ коллинеар, ендеше $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

Перпендикулярлық шарт: $\alpha_1 \perp \alpha_2$, демек $\overline{n_1} \perp \overline{n_2}$, ендеше $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Теорема: Егер жазықтықта $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ теңдеулері бір жазықтықты анықтаса, онда олардың коэффициенттері пропорционалды болады.

913. $M_1(2;\ 1;\ -1)$ нүктесі арқылы өтетін және $n = \{1, -2;\ 3\}$ нормаль векторы бар жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

914. Координаттар басы арқылы өтетін және $n = \{5;\ 0;\ -3\}$ нормаль векторы бар жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

915. Р (2; –1; –1) нүктесі координаталар бас нүктесінен жазықтыққа түскен перпендикулярдың табаны. Осы жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

916. Екі нүкте $M_1(3;\ -1;\ 2)$ және $M_2(4;\ -2;\ -1)$ берілген. M_1 нүктесі арқылы өтетін , $\overline{M_1M_2}$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

917. $M_1(3;4;-5)$ нүктесі арқылы өтетін және екі $a_1=\{3;1;-1\}$ және $a_2=\{1;-2;1\}$ векторларына параллель жазықтықтың теңдеуін құрыңыз .

918. $M_0(x_0;y_0;z_0)$ нүктесі арқылы өтетін, кі $a_1 = \{l_1;\ m_1;\ n_1;\}$ *және* $a_2 = \{l_2;\ m_2;\ n_2;\}$ векторларына параллель жазықтықтың теңдеуі, келесі түрде болатынын дәлелдеңіз:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

919. $M_1(2;-1;3)$ және $M_2(3;1;2)$ нүктелері арқылы өтетін және $a=\{3;-\ 1;-4\}$ векторына параллель , жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

920. $M_1(x_1;y_1;z_1)$ және $M_2(x_2;y_2;z_2)$ нүктелері арқылы өтетін, $a = \{l;\ m;\ n\}$ векторына параллель жазықтықтың теңдеуі, келесі түрде болатынын дәлелдеңіз.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

921. $M_1\,(3;\ -\ 1;\ 2)$, $M_2\,(4;\ -\ 1;\ -\ 1)$ және $M_3\,(2;\ 0;\ 2)$ үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін құрыңыз :

922. $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ және $M_3(x_3;y_3;z_3)$ үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі , келесі түрде болатынын дәлелдеңіз:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_1-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

923. Келесі жазықтықтардың қандай да бір нормаль векторының координаталарын анықтаңыз. Әрбір жағдайда кез келген нормаль вектордың координаталарының жалпы түрінде жазыңыз:

1) $2x–y–2z+5=0$; 2) $x+5y–z=0$; 3) $3x–2y–7=0$; 4) $5y–3z=0$; 5)$x+2=0$; 6) $y–3=0$.

924. Берілген жазықтықтардың қай жұбы параллель жазықтықтарды анықтайтынын көрсетіңіз:

1) $2x – 3y + 5z – 7 = 0$, $2x – 3y + 5z + 3 = 0$;

2) $4x+2y –4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z–1=0$;   3) $x–3z +2 = 0$, $2x –6z – 7 = 0$.

925. Берілген жазықтықтардың қай жұбы перпендикуляр жазықтықтарды анықтайтынын көрсетіңіз:

1) $3x–y – 2z – 5 = 0$, $x + 9y – 32 + 2 = 0$;

2) $2x + 3y –2 –3 = 0$, $x – y – z + 5 = 0$;   3) $2x –5y + z = 0$, $x + 22 –3 = 0$.

926. l және m *–нің* қандай мәндерінде келесі теңдеулер параллель жазықтықтарды анықтайды:

1) $2x + ly + 3z – 5 = 0$, $mx –6y –6z + 2 = 0$;

2) $3x– y + lz – 9 = 0$ $2x + my + 2z –3 = 0$;

3) $mx + 3y – 2z – 1=0$, $2x– 5y – lz = 0$.

927. l –дің қандай мәнінде, келесі теңдеулер перпендикуляр жазықтықтарды анықтайды:

1) $3x – 5y+ lz – 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$;

2) $5x + y – 32 – 2 = 0$, $2x + ly – 3z + 1 = 0$;

3) $7x – 2y – 2 = 0$, $lx + y – 3z – 1 = 0$.

928. Келесі жазықтықтардың қиылысуынан пайда болған, екі жақты бұрыштарды анықтаңыз:

1) $x – y\sqrt{2} + z – 1 = 0$, $x + y\sqrt{2} –z + 3 = 0$;   2) $3y – z = 0$, $2y + z = 0$;

3) $6x+3y–2z=0$, $x+2y+6z–12=0$; 4) $x +2y+2z–3= 0$, $16x+12y–15z–1=0$.

929. Координаталар басы арқылы өтетін және $5x – 3y + 2z – 3 = 0$ жазықтығына параллель, жазықтықтың теңдеуің құрыңыз.

930. $M_1(3; –2; –7)$ нүктесі арқылы өтетін және $2x – 3z + 5 = 0$ жазықтығына параллель, жазықтықтың теңдеуің құрыңыз.

931. Координаталар басы арқылы өтетін және келесі екі жазықтыққа перпендикуляр, жазықтықтың теңдеуін құрыңыз:

$2x – y + 3z – 1=0$, $x + 2y + z = 0$.

932. $M_1(2; –1; 1)$ нүктесі арқылы өтетін және және келесі екі жазықтыққа перпендикуляр, жазықтықтың теңдеуің құрыңыз: $2x – z + 1 = 0$, $y = 0$.

933. $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі арқылы өтетін және келесі екі жазықтыққа $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ перпендикуляр жазықтықтың теңдеуі келесі түрде анықталатынын дәлелдеңіз:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0$$

934. Келесі екі нүкте $M_1(1;\ -1;\ -2)$ және $M_2(3;\ 1;\ 1)$ арқылы өтетін және берілген жазықтыққа перпендикуляр $x-2y+3z-5=0$, жазықтықтың теңдеуің құрыңыз.

935. Келесі екі нүкте $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1\ )$ және $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ арқылы өтетін және $Ax+By+C2+D=0$ жазықтығына перпендикуляр, жазықтықтың теңдеуі келесі түрде анықталатынын дәлелдеңіз:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-x_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$

936. Келесі үш жазықтықтың бір нүктеде қиылысатынын көрсетіңіз және қиылысу нүктесінің координаталарын табыңыз :

$x-2y+z-7=0,\ 2x+y-z+2=0,\ x-3y+2z-11=0.$

937. Келесі үш жазықтық бір түзу арқылы өтетінің дәлелдеңіз :

$7x+4y+7z+1=0,\ 2x-y-2+2=0,\ \ x+2y+32-1=\ 0.$

938. Келесі үш жазықтық, үш түрлі параллель түзу арқылы қиылысатынын дәлелдеңіз :

$2x-y+3z-5=0,\ 3x+y+2z-1=0,\ 4x+3y+z+2=0$.

939. a және b–ның қандай мәндерінде келесі жазықтықтардың

$2x-y+3z-1=0,\ x+2y-z+b=0,\ x+ay-6z+10=0$:

1) бір ортақ нүктесі бар; 2) бір түзу арқылы өтеді;

3) үш түрлі параллель түзу арқылы қиылысатынын дәлелдеңіз.

8.2 Жазықтықтың толық емес теңдеулері.
Жазықтықтың кесінділік теңдеуі

Егер $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтықтың жалпы теңдеуіндегі барлық A,B,C,D коэффициенттері нөлден өзгеше болса, онда ол толық деп аталады. Егер коэффициенттердің біреуі нөлге тең болса, онда теңдеу толық емес деп аталады.

Толық емес теңдеулердің түрлері

1) Егер $D=0$ болса, онда $Ax+By+Cz=0$ теңдеуі координаттар басы арқылы өтетін жазықтықты анықтайды.

2) Егер $A=0$ болса, онда $By+Cz+D=0$ теңдеуі Ox өсіне параллель жазықтықты анықтайды.

3) Егер $B=0$болса, онда $Ax+Cz+D=0$ теңдеуі Oy өсіне параллель жазықтықты анықтайды.

4) Егер $C=0$ болса, онда $Ax+By+D=0$ теңдеуі Oz өсіне параллель жазықтықты анықтайды.

5) Егер $A=B=0$ болса, онда $Cz+D=0$ теңдеуі Oxy координаталық жазықтыққа параллель жазықтықты анықтайды (немесе Ox және Oy өстеріне параллель).

6) $A=C=0$, онда $By+D=0$ Oxz өсіне параллель.

7) $B=C=0$, онда $Ax+D=0$ өсіне параллель Oyz.

8 $A=B=D=0$, онда $C_z=0$ Oxy координаталық жазықтығын анықтайды.

9) $A=C=D=0$, онда $B_y=0$ Oxz координаталық жазықтығын анықтайды.

10) $B=C=D=0$, онда $A_x=0$ Oyz координаталық жазықтығын анықтайды.

Жазықтықтың кесінділік теңдеуі.

$Ax+By+Cz+D=0$ жазықтықтың жалпы теңдеуін қарастырайық.

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ – жазықтықтың кесінділік теңдеуі деп аталады.

бұл теңдеудегі а, в және с сандарының геометриялық мағынасы бар. Олар жазықтықтың сәйкес Ox, Oy, Oz осьтерінен координаталар бас нүктесінен бастап есептегенде қиып өтетін кесінділердің шамаларына тең.

940. Берілген нүктелер арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін құрыңыз:

1) $M_1(2; -3; 3)$ нүктесі арқылы *Oxy* жазықтығына параллель;

2) $M_2(l; -2; 4)$ нүктесі арқылы *Oxz* жазықтығына параллель;

3) $M_3(-5; 2; -1)$ нүктесі арқылы *Oyz* жазықтығына параллель .

941. Берілген нүктелер арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін құрыңыз:

1) *Ox осі* және $M_1(4; -1; 2)$ нүктесі арқылы;и2) *Oy осі* және $M_2(1; 4; -3)$ нүктесі арқылы; 3) *Oz осі* және $M_3(3; -4; 7)$ нүктесі арқылы.

942. Берілген нүктелер арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін құрыңыз:

1) $M_1(7; 2; -3)$ және $M_2(5; 6; -4)$ нүктелері арқылы *Ox* осіне параллель;

2) P_1 (2; –1; 1) және $P_2(3; 1; 2)$ нүктелері арқылы *Oy* осіне параллель;

3) Q_1 (3; –2; 5) және $Q_2(2; 3; 1)$ нүктелері арқылы *Oz* осіне параллель.

943. $2x - 3y - 4z - 24 = 0$ жазықтығының координат осьтерімен қиылысу нүктелерін табыңыз.

944. $x + 2y - 3z - 6 = 0$ жазықтығы үшін «кесінділік» теңдеуін жазыңыз.

945. Координат осьтерінен $3x - 4y - 24z + 12 = 0$ жазықтығының қиып өтетін кесінділерін анықтаңыз.

946. $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ жазықтығының *Oxy* координаталық бұрыштан қиып өтетін үшбұрыштың ауданын табыңыз.

947. $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ жазықтығымен және координаталық жазықтықтарымен шектелген пирамиданың көлемін табыңыз.

948. Жазықтық $M_1(6; -10; 1)$ нүктесі арқылы өтеді және абцисса осінде $a = -3$ кесіндісін, апликат осінде $c = 2$ кесіндісін қияды. Осы жазықтық үшін «кесінділік» теңдеуді құрыңыз.

949. Жазықтық $M_1(1; 2; –1)$ және $M_2(–3; 2; 1)$ нүктелері арқылы өтеді және ординат осінен $b= – 3$ кесіндісін қияды. Осы жазықтық үшін «кесінділік» теңдеуді құрыңыз.
950. $M_1(2; –3; –4)$ нүктесі арқылы өтетін және координат осьтерінен шамалары бірдей нөлден өзгеше кесінділер қиятын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз (Әрбір кесінді координаталар басынан басталады деп есептегенде).
951. $M_1(–1; 4; –1)$, $M_2(–13; 2; –10)$ нүктелері арқылы өтетін және абцисса мен апликат осьтерінде ұзындықтары бірдей нөлден өзгеше кесінділер қиятын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.
952. M_1 (4; 3; 2) нүктесі арқылы өтетін және координат осьтерінде ұзындықтары бірдей нөлден өзгеше кесінділер қиятын жазықтықтың теңдеуін құру.
953.Oz осінде $c = – 5$ кесіндісін қиятын және $n = \{–2; 1; 3\}$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.
954. $l = \{2; 1; –1\}$ векторына параллель және Ox пен Oy координаталық осьтерінде $a = 3$, $b = – 2$ кесінділерін қиятын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.
955. $2x – 2y + 4z – 5 = 0$ жазықтығына перпендикуляр және Ox пен Oy координаталық осьтерінде $a =– 2$, $b =\frac{2}{3}$ кесінділерін қиятын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

8.3 Жазықтықтың нормаланған теңдеуі. Нүктеден жазықтыққа дейінгі арақашықтық

π жазықтығын қарастырайық.

Координаталар басынан π жазықтығына перпендикуляр n түзуін жүргізейік. P n түзуі мен π жазықтығының қиылысу нүктесі. Түзуде $\overline{OP}$ бағытымен сәйкес келетін бірлік векторды аламыз.
$\overline{OP}$ кесіндісінің P ұзындығы арқылы, $P=\overline{OP}$
$\overline{n}$ векторының сәйкес Ox,Oy,Oz өстеріне көлбеу α,β,γ бұрыштары арқылы π жазықтығының теңдеуін табу керек.
$\overline{n}$ –бірлік вектор болғандықтан, оның координаталары келесі түрде болады: $\overline{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$
$M(x,y,z)$ нүктесі π жазықтығында жатады сонда тек сонда ғана, егер $\overline{OM}$ векторының $\overline{n}$ векторымен анықталатын оське проекциясы P–ға тең болса, яғни $np_n\overline{OM}=P$.
$\overline{n}$ – бірлік вектор болғандықтан $np_n\overline{OM}=\overline{n}\overline{OM}$, $\overline{a}\overline{b}=\overline{a}\overline{b}\cos\alpha$.

$\overline{n}\overline{OM} = |\overline{n}||\overline{OM}|\cos\alpha = |\overline{OM}|\cos\alpha = np_n\overline{OM}$ демек,

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - P = 0$ жазықтықтың нормаланған теңдеуі.

Кез келген А нүктесінің берілген π жазықтығынан ауытқуы туралы түсінік.

d саны A нүктесінен жазықтыққа дейінгі арақашықтық болсын.

Анықтама: π жазықтығынан A нүктесінің δ ауытқуы деп $+d$ саны аталады, егер A нүктесі және О координаталар бас нүктесі π жазықтығының әр жақтарында жатса және $-d$ саны, егер A және О π жазықтығынан бір жақта жатса.

π жазықтығынан $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіне дейінгі δ арақашықтығын табу үшін осы жазықтықтың нормаланған теңдеуінің сол жағына x, y, z координаталарының орнына M_0 нүктесінің координаталарын қоямыз.

A нүктесінен жазықтыққа дейінгі қашықтық ауытқудың модуліне тең.

$$d = |\delta|$$

Жазықтықтың жалпы теңдеуін нормаланған түрге келтіру алгоритмі

$Ax + By + Cz + D = 0$ және $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - P = 0$ жалпы теңдеулер берілсін.

Бұл жазықтықтар бір жазықтықты анықтайтындықтан келесі шартты қанағаттандыратын t саны табылады: $tA = \cos\alpha$, $tB = \cos\beta$, $tC = \cos\gamma$, $tD = -P$

$$t^2A^2 = \cos^2\alpha, t^2B^2 = \cos^2\beta, t^2C = \cos^2\gamma$$

$t^2 = \dfrac{1}{A^2 + B^2 + C^2}$ демек, $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

P қашықтығы мағынасы бойынша әр қашан теріс емес болғандықтан, онда $tD = -P$ –дан t санының таңбасы D–ның таңбасына қарама–қарсы болатынын қорытамыз. Жазықтықтың жалпы теңдеуін нормаланған түрге келтіру үшін оны D –ның таңбасына қарама–қарсы болатын нормаланған көбейткішке көбейту керек.

$d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ – нүктеден жазықтыққа дейінгі арақашықтықты есептейтін формула.

956. Келесі теңдеулерінің қайсысы жазықтықтың нормаланған теңдеуі болатынын анықтаңыз:

1) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 5 = 0$; 2) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z - 3 = 0$; 3) $\frac{6}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z + 5 = 0$;

4) $-\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z - 5 = 0$; 5) $\frac{6}{7}x + \frac{4}{5}z - 3 = 0$; 6) $-\frac{5}{13}y + \frac{12}{13}z + 1 = 0$, 7) $\frac{5}{13}y + \frac{12}{13}z - 1 = 0$;

8) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 5 = 0$, 9) $x - 1 = 0$; 10) $y + 2 = 0$; 11) $-y - 2 = 0$; 12) $z - 5 = 0$.

957. Жазықтықтың келесі теңдеулерінің әрқайсысын нормаланған түрге келтіріңіз:
1) $2x - 2y + 2 - 18 = 0$; 2) $x - y - z\sqrt{2} + 16 = 0$; 3) $4x - 6y - 12z - 11 = 0$;
4) $-4x - 4y + 2z + 1 = 0$; 5) $5y - 12z + 26 = 0$; 6) $3x - 4y - 1 = 0$;
7) $y + 2 = 0$; 8) $-x + 5 = 0$; 9) $-z + 3 = 0$; 10) $2z - 1 = 0$.

958. Келесі жазықтықтардың әрқайсысы үшін нормальдың координат осьтерімен жасайтын α, β және γ бұрыштарын және координаталар бас нүктесінен жазықтыққа дейінгі p қашықтығын есептеңіз:
1) $x + y\sqrt{2} + z - 10 = 0$; 2) $x - y - z\sqrt{2} + 16 = 0$; 3) $x + z - 6 = 0$; 4) $y - z + 2 = 0$;
5) $x\sqrt{3} + y + 10 = 0$; 6) $z - 2 = 0$; 7) $2x + 1 = 0$; 8) $2y + 1 = 0$;
9) $x - 2y + 2z - 6 = 0$; 10) $2x + 3y - 6z + 4 = 0$.

959. Келесі жағдайлардың әрқайсысы үшін нүктенің жазықтықтан ауытқуын және нүктеден жазықтыққа дейінгі d арақашықтығын есептеңіз:
1) $M_1(-2;-4;3)$, $2x - y + 2z + 3 = 0$; *2)* $M_2(2;-1;-1)$, $16x - 12y + 15г - 4 = 0$;
3) $M_3(1; 2; -3)$, $5x - 3y + z + 4 = 0$; *4)* $M_4(3; -6; 7)$, $4x - 3z - 1 = 0$;
5) $M_5(9; 2; -2)$, $12y - 5z + 5 = 0$.

960. P $(-1; 1; -2)$ нүктесінен $M_1(1; -1; 1)$, $M_2(-2, 1; 3)$ және $M_3(4; -5; -2)$ нүктелері арқылы жазықтыққа дейінгі d арақашықтықты есептеңіз.

961. Келесі берілген жазықтықтарға қатысты $Q(2; -1; 1)$ және координаталар бас нүктелері осы жазықтықтардың бір жағында жата ма әлде екі жағында жата ма анықтау керек:
1) $5x - 3y + z - 18 = 0$; 2) $2x + 7y + 3z + 1 = 0$; 3) $x + 5y + 12z - 1 = 0$;
4) $2x - y + z + 11 = 0$; 5) $2x + 3y - 6z + 2 = 0$; 6) $3x - 2y + 2z - 7 = 0$.

962. $3x - 4y - 2Z + 5 = 0$ жазықтығы $M_1(3; -2; 1)$ және $M_2(-2; 5; 2)$ нүктелерімен шектелген кесінді қиып өтетінін дәлелдеңіз.

963. $5x - 2y + z - 1 = 0$ жазықтығы $M_1(1; 4; -3)$ және $M_2(2; 5; 0)$ нүктелерімен шектелген кесіндіні қиып өтпейтінін дәлелдеңіз.

964. Келесі жағдайлардың әрқайсысы үшін параллель жазықтықтар арасындағы қашықтықты есептеңіз:
1) $x - 2y - 2z - 12 = 0$, *2)* $2x - 3y + 6z - 14 = 0$,
$x - 2y - 2z - 6 = 0$; $4x - 6y + 12z + 21 = 0$;
3) $2x - y + 2z + 9 = 0$, *4)* $16x + 12y - 15г + 50 = O$,
$4x - 2y + 4z - 21 = 0$; $16x + 12y - 15z + 25 = 0$;
5) $30x - 32y + 24z - 75 = 0$, *6)* $6x - 18y - 9z - 28 = 0$,
$15x - 16y + 12z - 25 = 0$; $4x - 12y - 6г - 7 = 0$.

965. Кубтың екі жағы келесі параллель жазықтықтарда жатыр.
$2x - 2y + 2 - 1 = 0$, $2x - 2y + z + 5 = 0$. Осы кубтың көлемін есептеңіз.

966. $x + 2y - 2z - 2 = 0$ жазықтығынан $d = 4$ қашықтықта орналасқан, Oy осінде жатқан нүктені табыңыз.

967. $3x - 2y + 6z - 9 = 0$ және $M(1; -2; 0)$ нүктесінен бірдей қашықтықта орналасқан, Oz осінде жатқан нүктені табыңыз.

968. $12x–16y+15z+1=0$, $2x + 2y – z – 1=0$. жазықтықтарынан бірдей қашықтықта орналасқан, Ох осінде жатқан нүктені табыңыз.

969. $4x – 4y – 2z + 3 = 0$ жазықтығынан ауытқуы 2–ге тең болатын нүктелердің геометриялық орнының теңдеуін табыңыз.

970. $6x + 3y + 2z–10 = 0$ жазықтығынан ауытқуы –3–ке тең болатын нүктелердің геометриялық орнының теңдеуін табыңыз.

971. $2x–2У–z – 3 = 0$ жазықтығынан $d=5$ арақашықтықта орналасқан және оған параллель жазықтықтардың теңдеуін құрыңыз.

972. Берілген екі параллель жазықтықтардан бірдей қашықтықта орналасқан нүктелердің геометриялық орнының теңдеуін табыңыз.

1) $4x – y – 2z – 3 = 0$; *2)* $3x + 2y – z + 3 = 0$,
$4x–y –2z –5 = 0$; $3x + 2y – z – 1=0$;
3) $5x – 3y + 2 + 3 = 0$,
$10x – 6y + 2z + 7 = 0$.

973. Екі қиылысатын жазықтықтар құрайтын екі жақты бұрышты қақ бөлетін, жазықтықтардың теңдеулерін құрыңыз:

1) $x – 3y + 2z – 5 = 0$, *2)* $5x – 5y – 2z – 3 = 0$,
$3x –2y – z + 3 = 0$; $x + 7y –2z + 1=0$;
3) $2x– y + 5z + 3 = 0$, $2x– 10y + 4z – 2 = 0$.

974. M(2; –1; 3) нүктесі және координаталар бас нүктесінің қиылысатын екі жазықтық құрайтын іргелес немесе вертикал екі жақты бұрыштардың қайсысында жататынын анықтау керек:

1) $2x–y + 32 – 5 = 0$, *2)* $2x + 3y – 5z – 15 = 0$,
$3x + 2y –z+3 = 0$; $5x–y –3z –7 = 0$;
3) $x + 5y –z +1 = 0$, $2x+17y + z + 2 = 0$.

975. M(2; –1; 1) және N (1; 2; –3) нүктелері қиылысатын екі жазықтық құрайтын іргелес немесе вертикал екі жақты бұрыштардың қайсысында жататынын анықтау керек:

1) $3x–y + 2z –3 = 0$, *2)* $2x–y + 5z–1=0$,
$x – 2y –z + 4 = 0$; $3x –2y +6z–1=0$.

976. Координаталар бас нүктесі $x – 2y + 3z – 5 = 0$, $2x –y –z + 3 = 0$ жазықтықтары құрайтын сүйір немесе доғал бұрыштың ішінде жататынын анықтау керек.

977. M(3; 2; –1) нүктесі $5x–y + z + 3 = 0$, $4x – 3y + 2z +5 = 0$ жазықтықтары құрайтын сүйір немесе доғал бұрыштың ішінде жататынын анықтау керек.

978. Координаталар бас нүктесі жататын, $2x–14y+6z–1=0$, $3x+5y–5z+3=0$ жазықтықтары құрайтын екі жақты бұрышты қақ бөлетін, жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

979. M(1;2;–3) нүктесі жататын, 2x–y+22z–3=0, 3x+2y–6z–1=0 жазықтықтары құрайтын екі жақты бұрышты қақ бөлетін, жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.
980. 2x – 3y – 42 – 3 = 0, 4x – 3У – 2z – 3 = 0 жазықтықтары құрайтын сүйір екі жақты бұрышты қақ бөлетін, жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.
981. 3x–4y–z + 5=0, 4x –3 y + z + 5 = 0 жазықтықтары құрайтын доғал екі жақты бұрышты қақ бөлетін, жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

9 Кеңістіктегі түзу сызық

9.1 Кеңістіктегі түзудің канондық теңдеуі

Анықтама: Кеңістіктегі түзу сызық екі жазықтықтың қиылысуымен, яғни $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ шарты орындалатындай, бірінші дәрежелі $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ (1) теңдеулерімен анықталады.

Анықтама: Берілген түзуге параллель кез келген нөлдік емес вектор осы түзудің бағыттаушы векторы деп аталады.

Кеңістікте берілген $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесі арқылы және берілген $\bar{q} = \{l, m, n\}$ бағыттаушы векторы бар түзудің теңдеуін қорыту.

$M(x, y, z)$ нүктесі түзуге тиісті болады сонда тек сонда ғана, егер $\overline{MM}_1 = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$ және $\bar{q} = \{l, m, n\}$ векторлары коллинеар болса.

Коллинеар болу шарты $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ (2)

(2) теңдеуі кеңістіктегі түзудің канондық теңдеуі деп аталады.

Кей жағдайда $\bar{q} = (0, m, n)$ $\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ болуы мүмкін.

(2) теңдігіндегі бір бөлімнің нөлге айналуы сәйкес алымының да нөлге айналатындығын білдіреді.

Берілген $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі

Түзудің теңдеуі $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесі арқылы өтеді және $\bar{q} = \overline{M_1M}_2 = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ бағыттаушы векторы бар болады.

$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$ (3) – кеңістіктегі берілген $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі.

Түзудің параметрлік теңдеулерін түзудің канондық теңдеулерінен алады.

$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = t$, мұндағы $-\infty < t < \infty$.

$x - x_1 = lt,\ y - y_1 = mt,\ z - z_1 = nt.$

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \\ z = z_1 + nt \end{cases}$$ (4) –түзудің параметрлік теңдеуі.

Кеңістіктегі түзулер арасындағы бұрыш. Түзулердің перпендикулярлық және параллельдік шарттары

L_1 және L_2 түзулері өзідерінің канондық теңдеулерімен берілсін.

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2} \quad .$$

Онда L_1 және L_2 түзулері арасындағы бұрышты анықтауға арналған есеп олардың $\bar{q}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$, $\bar{q}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$ бағыттаушы векторларының арасындағы φ бұрышын анықтауға тіреледі:

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$ (5) – екі түзу арасындағы бұрышты анықтауға арналған формула.

L_1 және L_2 түзулерінің параллельдік шарты – $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ (6).

L_1 және L_2 түзулерінің перпендикулярлық шарты – $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ (7).

Екі түзудің бір жазықтыққа тиісті болу шарты

Кеңістікте L_1 және L_2 екі түзуі қиылысуы мүмкін; параллель болуы мүмкін; айқасуы мүмкін

Алғашқы екі шартта L_1 және L_2 түзулері бір жазықтықта жатыр.

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}; \quad L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

L_1 және L_2 түзулері бір жазықтыққа тиісті болу үшін $\overline{M_1M_2}$, $\bar{q}_1$ және $\bar{q}_2$ векторлары компланар болуы қажетті және жеткілікті.

Үш вектордың компланар болу шарты: $\overline{M_1M_2}\ \bar{q}_1\ \bar{q}_2$ =0.

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & l_1 & n_1 \\ m_2 & l_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$ (8) –

L_1 және L_2 екі түзуінің бір жазықтыққа тиісті болу шарты.

Егер L_1 және L_2 түзулері (8) шартты қанағаттандырса, онда олар не қиылысады, не параллель болады. L_1 және L_2 түзулерінің параллельдік шарты (6) түрінде болса, онда L_1 және L_2 түзулері қиылысуы үшін $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ пропорциясынан ең болмағанда біреуі орындалмай, (8) шартты қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті.

982. $5x - 7y + 2z - 3 = 0$ жазықтықтығының координаталық жазықтықтар-мен қиылысуынан пайда болған түзулердің теңдеулерін құрыңыз.
983. $3x - y - 7z + 9 = 0$ жазықтығының Ох осі және Е (3, 2, –5) нүктесі арқылы өтетін жазықтықпен қиылысуынан пайда болған түзудің теңдеуін құрыңыз.
984. $\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$ түзуінің координаталық жазықтықтармен қиылысу нүктелерін табыңыз:
985. $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 6 = 0 \\ x + 5y - 7z + 10 = 0 \end{cases}$ түзуі Оу осін қиып өтетінін дәлелдеңіз.
986. D–ның қандай мәнінде $\begin{cases} 2x + 3y - z + D = 0 \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$ түзуі 1)Ох осін; 2) Оу осін; 3) Оz осін қиып өтетінін табыңыз.
987. $\begin{cases} A_1x + B_1y - C_1z + D = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z - D = 0 \end{cases}$ түзуі 1) Ох осіне; 2) Оу осіне; 3) Оz осіне параллель болуы үшін қандай шарттарды қанағаттандыруы керек екенін анықтаңыз.
988. $\begin{cases} A_1x + B_1y - C_1z + D = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z - D = 0 \end{cases}$ түзуінің 1) абсцисса осін; 2) ордината осін; 3) апликат осін қиып өтуі үшін; 4) абсцисса осімен беттесуі; 5) ордината осімен беттесуі; 6) аппликата осімен беттесуі үшін қандай шарттарды қанағаттандыруы керек екенін анықтаңыз.
989. $2x - 3y + z - 3 + \lambda (x + 3y + 2z + 1) = 0$ жазықтықтар шоғында
1) M_1 (1; –2; 3) нүктесінен өтетін, 2) Ох осіне параллель; 3) Оу осіне параллель; 4) Оz осіне параллель болатын жазықтықтарды табыңыз.
990. $3x - y + 2z + 9 = 0$, $x + z - 3 = 0$: жазықтықтарының қиылысу сызығы арқылы және 1) $M_1(4;-2;-3)$ арқылы; 2) Ох осіне параллель; 3) Оу осіне параллель; 4) Оz осіне параллель болатын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.
991. $l = \{2;-1;-2\}$ векторына параллель $2x - y + 3z - 5 = 0$, $x + 2y - z + 2 = 0$ жазық-тықтарының қиылысу сызығынан өтетін жазықтық теңдеуін құрыңыз:
992. $l = \{7; 9; 17\}$ векторына параллель болатын және $5x - 2y - z - 3 = 0$, $x + 3y - 2z + 5 = 0$ жазықтықтарының қиылысу сызығы арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін құрыңыз:
993. $3x - 2y + z - 3 = 0$, $x - 2z = 0$ жазықтықтарының қиылысу сызығы арқылы өтетін және $x - 2y + z + 5 = 0$ жазықтығына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз**.**
994. $\begin{cases} 5x - y - 2z - 3 = 0 \\ 3x - 2y - 5 + 2 = 0 \end{cases}$ түзуі арқылы өтетін және $x + 19y - 7z - 11 = 0$ жазықты-ғына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз**.**

995. $2x + y - z + 1 = 0$, $x + y + 2z + 1 = 0$ жазықтықтарының қиылысу сызығы арқылы өтетін және M_1 (2; 5; – 3), M_2 (3; – 2; – 2) нүктелерімен шектелген кесіндіге параллель болатын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.
996. $\alpha(3x - 4y + z + 6) + \beta(2x - 3y + z + 2) = 0$ жазықтықтар шоғына тиісті және M_1 (3; –4; –6), M2 (1, 2, 2) нүктелерінен бірдей қашықтықта орналасқан жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.
997. $4x - 8y + 17z - 8 = 0$ жазықтығы $\alpha(5x - y + 4z - 1) + \beta(2x + 2y - 3z + 2) = 0$ жазықтықтар шоғына тиісті ме анықтау керек.
998. $5x - 9y - 2z + 12 = 0$ жазықтығы $\alpha(2x - 3y + 4z - 5) + \beta(x - 2y - z - 7) = 0$ жазықтықтар шоғына тиісті ме анықтау керек.
999. l мен m –нің қандай мәндерінде $5x + ly + 4z + m = 0$ жазықтығы $\alpha(3x - 7y + z - 3) + \beta(x - 9y - 2z - 3)=0$ жазықтықтар шоғына тиісті болады.
1000. Координаталар бас нүктесінен p = 3 қашықтықта орналасқан, $\alpha(x - 3y + 7z + 36) + \beta(2x + y - z - 15) = 0$ жазықтықтар шоғына тиісті болатын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.
1001. C (3; –2; –3) нүктесінен d = 7 қашықтықта орналасқан, $\alpha(10x - 8y - 15z + 56) + \beta(4x + y + 3z - 1) = 0$ жазықтықтар шоғына тиісті болатын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.
1002. $\alpha(4x + 13y - 2z - 60) + \beta(4x + 3y + 3z - 30) = 0$ жазықтықтар шоғына тиісті болатын және Oxy коордтинаталық бұрыштан ауданы 6 шаршы метр болатын үшбұрышты қиып өтетін, жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.
1003. $\begin{cases} 2x - y - 2z - 3 = 0 \\ x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ түзуін координаталық жазықтықтарға проекциялайтын жазықтықтардың теңдеулерін құрыңыз.
1004. $\begin{cases} x - 2y - 3z - 5 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$ түзуінің координаталық жазықтықтардағы проекцияларының теңдеулерін құрыңыз.
1005. $\begin{cases} 3x - 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ түзуін $x + 2y + 3z - 5 = 0$ жазықтығына проекциялайтын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.
1006. $\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$ түзуінің $2x - y + 2 - 1 = 0$ жазықтығындағы проекциясының теңдеуін құрыңыз.
1007. M_1 (2;0;–3) нүктесі арқылы өтетін 1) a ={2;–3;5} векторына параллель; болатын түзулердің 2) $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$ түзуіне параллель; 3) *Ox* осіне; 4) *Oy* осіне; 5) *Oz* осіне параллель болатын түзулердің канондық теңдеулерін құрыңыз.
1008. Екі нүкте арқылы өтетін түзулердің канондық теңдеулерін құрыңыз:
1) (1; – 2; 1), (3; 1; –1); 2) (3; –1; 0),(1; 0, –3);

3) (0; –2; 3), (3; –2; 1);) (1; 2; –4), (–1; 2; –4).

1009. $M_1(1;-1;-3)$ нүктесі арқылы өтетін 1) a ={2;–3;4} векторына параллель; 2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-1}{0}$ түзуіне параллель; 3) x=3t-1; y=-2t+3; z=5t+2 түзуіне параллель түзулердің параметрлік теңдеулерін құрыңыз.

1010. Екі нүкте арқылы өтетін түзулердің параметрлік теңдеулерін құрыңыз: 1) (3;–1,2), (2;1;1); 2) (1; 1; –2), (3; –1; 0); 3) (0; 0; 1), (0; 1; –2).

1011. $M_1(-6;6;-5)$ және $M_2(12;-6;1)$ нүктелері арқылы түзу жүргізілген. Осы түзудің координаталық жазықтықтармен қиылысу нүктелерін анықтаңыз.

1012. A(3; 6; –7), B(–5; 2; 3) және C(4; –7; –2) үшбұрыштың төбелері берілген. C төбесі арқылы өтетін медиананың параметрлік теңдеуін құрыңыз.

1013. A(3; –1; –1), B(1; 2; – 7) және *C(*–5; 14; –3) үшбұрыштың төбелері берілген. B төбесі арқылы өтетін ішкі бұрыштың биссектрисасының канондық теңдеуін құрыңыз.

1014. A (2; – 1; – 3), B (5; 2; – 7) және *C(*–7; 11; 6) үшбұрыштың төбелері берілген. A төбесі арқылы өтетін сыртқы бұрыштың биссектрисасының канондық теңдеуін құрыңыз.

1015. A(1;–2;–4), B(3; 1; – *3)* және C(5; 1; –7) үшбұрыштың төбелері берілген. B төбесінен қарсы жатқан қабырғаға жүргізілген биіктіктің параметрлік теңдеулерін құрыңыз.

1016.

$$\begin{cases} 2x-5y+z-3=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$$

теңдеуімен түзу берілген. Осы түзудің қандай –да бір бағыттаушы a векторының координата осьтеріне проекцияларын есептеңіз.

1017.

$$\begin{cases} 2x-5y+z-3=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$$

теңдеуімен түзу берілген. Осы түзудің қандай –да бір бағыттаушы a векторының ***i, j, k*** базисі бойынша жіктелуін табыңыз.

1018.

$$\begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x+3y-2z+3=0 \end{cases}$$

түзуіне параллель, $M_1(1;$ 3; –5) нүктесі арқылы өтетін түзудің канондық теңдеуін құрыңыз.

1019. Келесі түзулердің теңдеулерін құрыңыз.

1) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-2=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+y+z=0 \\ 2x+3y-2z+5=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x+y-4z-8=0 \end{cases}$

1020. Келесі түзулердің параметрлік теңдеулерін құрыңыз:

1) $\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ 3x-5y+2z+1=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y-z-6=0 \\ 3x-y+z+1=0 \end{cases}$

1021. Түзудің параллелдігін дәлелдеңіз:

1) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ және $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$

2) $x-2t+5,\ y=-t+2,\ z=t-7$ және $\begin{cases} x+3y+z+2=0 \\ x-y-3z-2=0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y-3z+1=0 \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$ және $\begin{cases} x+2y-5z-1=0 \\ x-2y+3z-9=0 \end{cases}$

1022. Түзудің перпендикулярлығын дәлелдеңіз:

1) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}$

2) $x-2t+1,\ y=-3t-2,\ z=-6t+1$ $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0 \\ 4x-y-5z+4=0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y-3z-1=0 \\ 2x-y-9z-2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-2y-z+2=0 \end{cases}$

1023. Екі түзу арасындағы сүйір бұрышты табыңыз:

$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$

1024. Екі түзу арасындағы доғал бұрышты табыңыз:

x = 3t – 2 *y =* ***0,*** **z** *=–t + 3;*

x = 2t ***–1,*** *y = 0,* ***z = t – 3.***

1025. Екі түзу арасындағы бұрыштың косинусын табыңыз:

$\begin{cases} x-y-4z-5=0 \\ 2x+y-2z-4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-6y-6z+2=0 \\ 2x+2y+9z-1=0 \end{cases}$

1026. Параметрлік теңдеулермен берілген *x=2t – 3, y* **=** *3t – 2,z= –4t+6* және *x*=*t + 5, y =– 4t–1, z* **=*t***– *4,* түзулердің өзара қиылысатынын дәлелдеңіз.

1027. і –ң қандай мәнінде берілген түзулер қиылысады?

$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$, $\frac{x-3}{i}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-7}{2}$

1028.

$\frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1}$, және $\frac{x-a_1}{l_2}=\frac{y-b_1}{m_2}=\frac{z-c_1}{n_2}$

түзулерінің бір жазықтықта жату шарты келесі түрде болатынын дәлелдеңіз.

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_1-b_1 & c_2-c_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \mathbf{=0}$$

1029. $M_1(-1;\ 2;\ -3)$ нүктесі арқылы өтетін, $\alpha = \{6;\ -2;\ -3\}$ векторына перпендикуляр және $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}$ түзуін қиып өтетін түзудің теңдеуін құрыңыз.

1030. $M_1(-\mathbf{4};\ -5;\ 3)$ нүктесі арқылы өтетін және

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-1} \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}.$$

түзулерін қиып өтетін түзудің теңдеуін құрыңыз.

1031. Келесі теңдеулермен берілген екі түзудің ортақ перпендикулярының параметрлік теңдеулерін құрыңыз:

$x=3t-7,\ \ y=-2t+4,\ \ z=3t+4$

$x=t+1,\ \ \ =1t-9,\ \ \ z=-t-12.$

1032. $M_1\,(x;\ \mathbf{y};\ z)$ нүктенің қозғалыс теңдеулері берілген.

$x=3-4t,\ \ y=5+3t,\ \ \ z=-2+12t.$

Осы нүктенің v жылдамдығын анықтаңыз **.**

1033. M_1 (x; y; $z)$ нүктесінің қозғалыс теңдеулері берілген.

$x=5-2t,\ \ \ \ y=-3+2t,\ \ \ \ z=5-t.$ Бұл нүктенің $t_1=0$ –ден $t_2=7$–ге дейінгі уақыт аралығында өтетін d қашықтығын анықтаңыз.

1034. Бастапқы нүктесі $M_0(3;\ -1;-5)$ нүктесінде болатын, **s** = {–2; 6; 3} векторы бағытында, υ **=** 21 жылдамдықпен түзу сызықты және бірқалыпты қозғалатын, *M (x; y; z)* нүктесінің қозғалыс теңдеуін құрыңыз.

1035. $t_1 = 0$ –ден $t_2 = 4$–ке дейінгі уақыт аралығында M_1 **(**–7; 12; 5) нүктесінен M_2 (9; –4, –3) нүктесіне қарай түзу сызықты және бірқалыпты қозғалатын, *M (x; y; z)* нүктесінің қозғалыс теңдеуін құрыңыз.

1036. *M* (x; y; *z)* нүктесі бастапқы $M_0(20;\ -18;\ -32)$ нүктесінен **s** = {3; –4; –12} векторына қарама – қарсы бағытта, υ **=** 26 жылдамдықпен түзу сызықты және бірқалыпты қозғалады. M нүктесінің қозғалыс теңдеуін құрыңыз және $t = 3$ уақыт сәтінде оған сәйкес келетін нүктені анықтаңыз.

1037. M (x; y; z) және N (x; y; z) нүктелері түзу сызықты және бірқалыпты қозғалады. Біріншісі $\mathbf{M_0}$ (– 5; 4; – 5) бастапқы нүктеден **s** = {3; –6; 2}векторы бағытында υ_M=14 жылдамдығы бойынша, екіншідсі N_0 (–5; 16; –6) бастапқы нүктеден **r=**{–4; 12; –3} векторына қарама – қарсы бағытта υ_N = 13 жылдамдықпен қозғалады. Әрбір нүктенің қозғалыс теңдеуін құрыңыз және олардың траекториялары қиылысатынына көз жеткізе отырып:

1) олардың траекторияларының P қиылысу нүктесін;

2) M нүктесінің M_0 нүктесінен P–ға дейінгі нүктенің қозғалысына жұмсалған уақытты;
3) N нүктесінің N_0 нүктесінен Р–ға дейінгі нүктенің қозғалысына жұмсалған уақытты;
4) M_0P және N_0P кесінділерінің ұзындықтарын табыңыз.

9.2 Түзу мен жазықтыққа қатысты аралас есептер

$Ax+By+Cz+D=0$ жалпы теңдеуімен берілген π жазықтығын және $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ канондық теңдеуімен берілген L түзуін қарастырамыз.
Түзу мен π жазықтығы арасындағы φ бұрышы $\vec{n}$ және $\vec{q}$ векторлары арасындағы ψ бұрышына толықтауыш болып табылады.
Скалярлық көбейтінді арқылы табамыз: $\cos\psi=\frac{\overline{q}\overline{n}}{|\overline{n}||\overline{g}|}$,

$\psi=90^0-\varphi$ $\quad\cos\psi=\cos(90^0-\varphi)=\sin\varphi$,

$\sin\varphi=\frac{\overline{qn}}{|\overline{n}||\overline{g}|}=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ – **түзу мен жазықтық арасындағы бұрышты** анықтайтын формула.
L түзуі мен π жазықтығының параллельдік шарты. $\overline{n}\perp\overline{q}$ $\quad Al+Bm+Cn=0.$
L түзуі мен π жазықтығының перпендикулярлық шарты.

$$\overline{n}\|\,\overline{q}\qquad \frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ түзуінің $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтыққа тиісті болу шарты

$\begin{cases}Ax_1+B\,y_1+Cz_1+D=0\\ Al+Bm+Cn=0\end{cases}$ – түзудің жазықтыққа тиісті болу шарты.

1038. $x=3t-2$, $y=-4t+1$, $z=4t-5$ түзуі мен $4x-3y-6z-5=0$ жазықтығының параллель екенін дәлелдеңіз.

1039. $\begin{cases}5x-3y+2z-5=0\\ 2x-y-z-1=0\end{cases}$ теңдеуімен берілген түзудің $4x-3y+7z-7=0$ жазықтықтығында жататынын дәлелдеңіз.

1040. Түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін табыңыз:
1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$; 2) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$, $x-2y+z-15=0$;
3) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$, $x+2y-2z+6=0$;

1041. $M_0(2;-4;-1)$ нүктесі және $5x+3y-4z+11=0$, $5x+3y-4z-41=0$ жазықтықтарымен шектелген $\begin{cases}3x+4y+5z-26=0\\3x-3y-2z-5=0\end{cases}$ түзудің кесіндінің ортасы арқылы өтетін түзудің канондық теңдеуін құрыңыз.

1042. M_0 (2; – 3; – 5) нүктесі арқылы өтетін және 6x – 3y – 5z + 2 = 0 жазықтығына перпендикуляр түзудің теңдеуін құрыңыз.

1043. $M_0(1;\ -1;\ -1)$ нүктесі арқылы өтетін $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$ түзуіне перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

1044. M_0 (1; –2; 1) нүктесі арқылы өтетін $\begin{cases}x-2y+z-3=0\\x+y-z+2=0\end{cases}$ түзуіне перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

1045. m–нің қандай мәнінде $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ түзуі $x - 3y + 6z + 7 = 0$ жазықтықтығына параллель болады?

1046. C–ның қандай мәнінде $\begin{cases}3x-2y+z+3=0\\4x-3y+4z+1=0\end{cases}$ түзуі $2x-y + Cz -2 = 0$ жазықтықтығына параллель болады?

1047. A мен D–ның қандай мәндерінде x=3 + 4t, y = 1–4t, z = –3 + t түзуі Ax + 2y–4z + D = 0 жазықтығында жатады? ?

1048. A және B–ның қандай мәндерінде Ax+By+3z–5=0 жазықтығы x =3+2t, y = 5–3 t, z =–2–2t түзуіне перпендикуляр болады?

1049. T және C– ның қандай мәндерінде $\frac{x-2}{t}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ түзуі $3x - 2y + Cz+1=0$ жазықтығына перпендикуляр болады?

1050. P(2; – 1; 3) нүктесінің x=3t, y=5t– 7, z = 2t + 2 түзуіне проекциясын табыңыз.

1051. $\begin{cases}x-y-4z+12=0\\2x+y-2z+3=0\end{cases}$ түзуіне қатысты P(4; 1; 6) нүктесіне симметриялы Q нүктесін табыңыз.

1052. M_1(5; 4; 6) және M_2 (– 2; –17; –8) нүктелері арқылы өтетін түзуге қатысты P (2; –5; 7) нүктесіне симметриялы Q нүктесін табыңыз.

1053. P(5; 2; –1) нүктесінің 2x–y+3z+23=0 жазықтығына проекциясын табыңыз.

1054. 3x+y – 2z = 0 жазықтығына қатысты P(1; 3; –4) нүктесіне симметриялы Q нүктесін табыңыз.

1055. Oxy жазықтығында A(–1; 2; 5) және B (11; –16; 10) нүктелеріне дейінгі қашықтықтардың қосындысы ең кіші болатын P нүктесін табыңыз.

1056. Oxz жазықтығында қашықтық M_1(3; 2; –5) және M_2(8; –4; – 13) нүктелеріне дейінгі қашықтықтардың айырмасы ең үлкен болатын P нүктесін табыңыз.

1057. 2x–3y + 3z–17 = 0 жазықтығында A (3; – 4; 7) және B(–5; –14; 17) нүктелеріне дейінгі қашықтықтардың қосындысы ең кіші болатын P нүктесін табыңыз.

1058. 2x + 3y – 4z – 15 = 0 жазықтығында M_1(5; 2; –7) және M_2(7; –25; 10) нүктелеріне дейінгі қашықтықтардың айырмасы ең үлкен болатын P нүктесін табыңыз.

1059. Бастапқы нүктесі M_0 (15; – 24; –16) нүктесінде болатын, s={–2; 2; 1} векторы бағытында v= 12 жылдамдығымен түзу сызықты және бірқалыпты қозғалатын M(x;y;z) нүктесі берілген. M нүктесінің траекториясы 3x + 4y +7z – 17 = 0 жазықтығын қиып өтетініне көз жеткізіп,

1) олардың қиылысу нүктесін;

2) M нүктесінің M_0–дан P нүктесіне қозғалысына жұмсалған уақытын;

3) M_0P кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

1060. M(x;y;z) нүктесі бастапқы нүктесі M_0(28; –30; –27) нүктесінде болатын, M_0 нүктесінен 15x–16y–12z+26=0 жазықтығына түскен перпендикуляр бойымен, v= 12,5 жылдамдығымен түзу сызықты және бірқалыпты қозғалады. тын M(x;y;z) нүктесі берілген. M нүктесінің қозғалыс теңдеуін құрыңыз және

1) M нүктесінің траекториясының осы жазықтықпен қиылысу нүктесін;

2) M нүктесінің M_0–дан P нүктесіне қозғалысына жұмсалған уақытын;

3) M_0P кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

1061. M(x;y;z) нүктесі бастапқы нүктесі M_0(11; –21; 20) нүктесінде болатын, **s**={–1; 2; –2} векторы бағытында v= 12 жылдамдығымен түзу сызықты және бірқалыпты қозғалады. M(x;y;z) нүктесі 2x+3y + 5z –41=0, 2x + 3y+ 5z+31 =0 параллель жазықтықтар арасында жатқан кесіндінің траекториясын қанша уақытта өтетінін анықтаңыз.

1062. P(1;–1;–2) нүктесінен $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$ түзуге дейінгі d қашықтықты есептеңіз.

1063. P (2;3;–1) нүктесінен келесі түзулерге дейінгі d қашықтықты есептеңіз.

1) $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$; 2) *x–1+1; y=t+2, z=4t+13;* 3) $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0 \\ 2x-2y+2z+17=0 \end{cases}$

1064. Түзулердің параллель екеніне көз жеткізіп, олардың арасындағы d қашықтықты есептеңіз.

$\begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$ $\quad \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$

1065. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+1}{-3}$, $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$ түзулеріне параллель және M_1(1; 2; –3) нүктесі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

1066. $\frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1}$, $\frac{x-a_1}{l_2}=\frac{y-b_1}{m_2}=\frac{z-c_1}{n_2}$ түзулеріне параллель және M_0 (x; y; z) нүктесі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі келесі түрде болатынын дәлелдеңіз:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

1067. $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$ түзуіне параллель және $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі келесі болатынын дәлелдеңіз:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

1068. x=2t+1; y= – 3t+2; z = 2t–3 түзуі және M_1(2; –2; 1) нүктесі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

1069. x = x + lt, y = y + mt, z = z +nt түзуі және M (x; y; z) нүктесі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі келесі түрде болатынын дәлелдеңіз:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

1070. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ және *x=3e+7, y=2t+2; z=–2t+1*түзулерінің бір жазықтықта жататынын дәлелдеңіз және осы жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

1071. Егер $\frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1}$, $\frac{x-a_1}{l_2}=\frac{y-b_1}{m_2}=\frac{z-c_1}{n_2}$ түзулері қиылысса, онда олар жататын жазықтықтың теңдеуі келесі түрде болатынын дәлелдеңіз:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

1072. Екі параллель түзулер арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін құрыңыз: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

1073. $x = a_1 + lt$, $y = b_1 + mt$, $z = c_l + nt$ және
$x = a_2 + lt$, $y = b_2 + mt$, $z = c_2 + nt$ екі параллель түзулер арқылы өтетін

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

1074. C (3; –4; –2) нүктесінің $\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}$ параллель түзулері арқылы өтетін жазықтыққа проекциясын табыңыз.

1075. M_1 (–6; 1; –5), M_2 (7; –2; –1) және M_3 (10; –7; 1) нүктелері арқылы өтетін жазықтыққа қатысты P (3; –4; –6) нүктесіне симметриялы Q нүктесінің координаталарын табыңыз.

1076. $\begin{cases} x-2y+3z-5=0 \\ x-2y-4z+3=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 3x+y+3z+7=0 \\ 5x-3y+2z+5=0 \end{cases}$ түзулері арқылы өтетін жазықтыққа қатысты P(–3; 2; 5) нүктесіне симметриялы Q нүктесінің координаталарын табыңыз.

1077. x = 3t+1, y = 2t + 3, z = – t –2 түзуі арқылы өтетін, $\begin{cases} 2x+y+z-3=0 \\ x+2y-z-5=0 \end{cases}$ түзуіне параллель жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

1078. $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ түзуі арқылы өтетін, $x = x_0+lt,\ y = y_0+mt,\ z = z_0 + nt$ түзуіне параллель жазықтықтың теңдеуі келесі түрде болатынын дәлелдеңіз:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}=0$$

1079. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ түзуі арқылы өтетін, $3x + 2y - \mathbf{z} - 5 = 0$ жазықтығына ерпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

1080. $x = x_0+lt,\ y = y_0+mt,\ z = z_0 + nt$ түзуі арқылы өтетін, $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуі келесі түрде болатынын дәлелдеңіз:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

1081. M(3; –2; –4) нүктесі арқылы өтетін, 3x–2y–3z–7 = 0 жазықтығына параллель болатын және $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$ түзуін қиып өтетін жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

1082. 3x+12y–3z–5 = 0, 3x–4y + 9z + 7 = 0 жазықтықтарына параллель және $\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3}$; $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$ түзулерін қиып өтетін түзудің параметрлік теңдеулерін құрыңыз.

1083. Екі түзу арасындағы ең қысқа ара қашықтықты есептеңіз:

1) $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+4}{-2}$; $\frac{x-21}{6}=\frac{y-21}{-4}=\frac{z-2}{-1}$

2) x=2t – 4; y= – t+4;, z= – 2t– 1

x=– 4t – 5; y= – 3t+5; z= – 5t+5

3) $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$; x=6t+9; y= –2 t; z= – t+2;

10 Екінші ретті беттер

10.1 Сфера

Тікбұрышты декарттық координаталарда центрі С (α, β, γ) нүктесінде және радиусы *r* болатын сфера $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ теңдеуімен анықталады. Радиусы *r* және центрі координаталар бас нүктесінде жататын сфераның теңдеуі $x^2+y^2+z^2=r^2$ болады.

1084. Мына жағдайлардың әрқайсысына сфераның теңдеуін құрыңыз:

1) сфераның центрі С(0; 0; 0) және радиусы *r* = 9;

2) сфераның центрі *С (5;* –3; 7) және радиусы ***r*** = 2;

3) сфера координаталар бас нүктесінен өтеді және центрі *С*(4; –4; –2);

4) сфера *А* (2; –1; –3) нүктесінен өтеді және центрі *С*(3**;** –2; 1);

5) *А*(2; –3; 5) және *В*(4; 1; –3) нүктелері сфераның бір диаметрінің шеткі нүктелері;

6) сфераның центрі координаталар бас нүктесінде және 16*x* –15*y* –12*z* + 75 = 0 жазықтығы сфераға жанама болады;

7) сфераның центрі *С*(3; – 5; – 2) нүктесінде және 2*x* – *y* – 3z + 11 = 0 жазықтығы сфераға жанама болады;

8) сфера үш нүктеден: M_1(3; 1; –3), M_2(–2; 4;1) және M_3 (–5;0;0) өтеді, ал оның центрі 2*x* + *y* – *z* + 3 = 0 жазықтығында жатады;

9) сфера төрт нүктеден: M_1(l; –2; –1), M_2(– 5; 10; –1), M_3(4; 1; 11) және M_4(–8; –2; 2) өтеді.

1085. Радиусы *r* = 3 болатын, ал *x* + 2*y* + 2*z*+3 = 0 жазықтығымен M_1 (l; 1; –3) нүктесінде жанасатын сфераның теңдеуін құрыңыз.

1086. 3*x* + 2*y* – 6*z* –15 = 0, 3*x* + 2*y* – 6*z* + 55 = 0 жазықтықтарымен жанасатын сфераның *R* радиусын есептеңіз.

1087. Центрі $\begin{cases} 2x+4y-z-7=0 \\ 4x+5y+z-14=0 \end{cases}$ түзуінде жататын сфера *x* +2*y* –2*z* –2=0*, x* +2*y* –2*z* + 4 = 0 жазықтықтарымен жанасады. Осы сфераның теңдеуін құрыңыз.

1088. 6*x* – 3*y* – 2*z* – 35 = 0, 6*x* – 3*y* – 2*z* + 63 = 0 параллель жазықтықтарымен жанасатын және оның біреуімен *M₁(*5*;* –1; –1) нүктесінде жанасатын сфераның теңдеуін құрыңыз.

1089. Центрі С (2; 3; –1) нүктесінде болатын $\begin{cases} 5x-4y+3z+20=0 \\ 3x-4y+z-8=0 \end{cases}$ түзуінен ұзындығы 16–ға тең хорда қиятын сфераның теңдеуін құрыңыз.

1090. Мына теңдеулердің біреуімен берілген сфераның *C* центрінің координаталарын және *r* радиусын анықтаңыз:

1) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 16$; 2) $(x+l)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$;
3) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$; 4) $x^3 + y^2 + z^2 - 62 = 0$;
5) $x^2 + y^2 + z^2 + 20y = 0$.

1091. $x^2+y^2+z^2+2x-6y+z-11=0$ сферасының $5x - y + 2z - 17 = 0$ жазықтығына перпендикуляр диаметрінің параметрлік теңдеулерін құрыңыз.

1092. $x^2+y^2+z^2 - x + 3y + z - 13 = 0$ сферасының $x=2t-1$, $y=-3t+5$, $z=4t+7$ түзуіне параллель диаметрінің канондық теңдеуін құрыңыз.

1093. $A(2;-1;3)$ нүктесі келесі сфералардың әрқайсысына қарағанда қалай орналасқанын – іште, сыртта немесе бетінде жататындығын тағайындаңыз:

1) $(x-3)^2 + (y+l)^2 + (z-1)^2 = 4$;2) $(x+14)^2 + (y-11)^2 + (z+12)^2 = 625$;
3) $(x-6)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$;4) $x^2+y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + 22 = 0$;
5) $x^2+y^2+z^2 - x+3y - 2z - 3 = 0$.

1094. Келесі жағдайларда *A* нүктесінен берілген сфераға дейінгі ең қысқа қашықтықты есептеңіз:

а) $A(-2; 6; -3)$, $x^2+y+z^2 = 4$;
б) $A(9; -4; -3)$, $x^a + y^3 + z^2 + 14x - 16y - 24z + 24l = 0$;
в) $A(1; -1; 3)$, $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z - 62 = 0$.

1095. Жазықтық пен сфера келесі теңдеулермен берілсе, онда жазықтық сфераға қарағанда қалай орналасқан – қияды ма, жанайды немесе одан тыс жатады ма соны анықтаңыз:

1) $z = 3$, $x^2+y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 22 = 0$;
2) $y = 1$, $x^2 + y^a + z^2 + 4x - 2y - 6z + 14 = 0$;
3) $x = 5$, $x^2+y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 4 = 0$.

1096. Түзу мен сфера келесі теңдеулермен берілсе, онда түзу сфераға қарағанда қалай орналасқан – қияды ма, жанайды немесе одан тыс жатады ма соны анықтаңыз:

1) $x = -2t + 2$, $y = 3t - 7/2$, $z = t - 2$, $x^2 + y^2 + z^2 + x - 4y - 3z + \frac{1}{2} = 0$;

2) $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$; $x^2+y^2+z^2 - 4x - 6y + 2z - 67 = 0$;

3) $\begin{cases} 2x-y+2z-12=0 \\ 2x-4y+z+6=0 \end{cases}$, $x^2+y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 43 = 0$.

1097. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ сферасында $3x - 4z + 19 = 0$ жазықтығына ең жақын жатқан M_1 нүктесін тап және M_1 нүктесінен ол жазықтыққа дейінгі *d* қашықтықты есептеңіз.

1098. $\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100 \\ 2x-2y-z+9=0 \end{cases}$ шеңберінің C центрін және R радиусын анықтаңыз.

1099. A (3; –2; 5) және B(–1; 6; –3) нүктелері C(1; – 4; 1) нүктесінен өтетін шеңбердің диаметрінің шеткі нүктелері болады. Осы шеңбердің теңдеуін құрыңыз.

1100. $\begin{cases} 2x-y+2z-12=0 \\ 4x-7y-z+6=0 \end{cases}$ түзуінен ұзындығы 8–ге тең хорда қиятын шеңбердің центрі C(1; –1; –2) нүктесі болады. Осы шеңбердің теңдеуін құрыңыз.

1101. M_1(3; –1; –2), M_2(1; 1; –2) және M_3(– 1; 3; 0) үш нүктесінен өтетін шеңбердің теңдеуін құрыңыз.

1102. π жазықтығында жататын шеңбер бойымен қиылысатын екі сфера

$(x-m_1)^2 + (y-n_1)^2 + (z-p_1)^2 = R^2_1,$

$(x-m_1)^2 + (y-n_1)^2 + (z-p_1)^2 = R^2_1,$

берілген. Осы сфералардың қиылысуынан пайда болған шеңберден және π жазықтығынан өтетін кез келген сфера α және β сандарын дұрыс таңдағанда

$\alpha\,[(x-m_1)^2+(y-n_1)^2+(z-p_1)^2-R^2_1] + \beta[(x-m_2)^2+(y-n_2)^2+(z-p_2)^2-R^2_2]=0$

түріндегі теңдеумен беріле алатындығын дәлелдеңіз.

1103. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3x - 2y + z - 5 = 0$, $x^2+y^2 +z^2 - x+ 3y - 2z +1= 0$ екі сфераның қиылысу сызығынан өтетін жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

1104. Координаталар бас нүктесінен және $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=0 \\ 2x-3y+5z-5=0 \end{cases}$ шеңберінен өтетін сфераның теңдеуін құрыңыз.

1105. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z-5=0 \\ 5x+2y-z-3=0 \end{cases}$ шеңберінен өтетін сфераның теңдеуін құрыңыз.

1106. $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=2 \end{cases}$ және $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ y=3 \end{cases}$ екі шеңберден өтетін сфераның теңдеуін құрыңыз.

1107. $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ сферасына M_1(6; –3; –2) нүктесінде жанасатын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

1108. $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ жазықтығы $x^2+y^2+z^2 = 49$ сферасына жанайтынын дәлелде. Жанасу нүктесінің координаталарын есептеңіз.

1109. a – ның қандай мәнінде $x + y + z = a$ жазықтығы $x^2 + y^2 + z^2 =12$ сферасымен жанасады.

1110. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2+(z + 2)^2 = 24$ сферасына M_1(–1; 3; 0) нүктесінде жанасатын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

1111. $M_1(x_1; y_1; z_1)$ нүктесі $x^2+y^2 + z^2 = r^2$ сферасында жатыр. Осы сфераға M_1 нүктесінде жанасатын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

1112. $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығының $x^2+y^2+z^2=R^2$ сферасына жанасу шартын қорытып шығарыңыз.
1113. $M_1(x_1;y_1;z_1)$ нүктесі $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$ сферасында жатады. Осы сфераға M_1 нүктесінде жанасатын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.
1114. $x=3t-5$, $y=5t-11$, $z=-4t+9$ түзуі мен $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=49$ сфераның қиылысу нүктесінен осы сфераға жанасатын жазықтықтар жүргізілген. Олардың теңдеулерін құрыңыз.
1115. $x^2+y^2+z^2=9$ сферасына жанасатын $x+2y-2z+15=0$ жазықтығына параллель жазықтықтықтардың теңдеулерін құрыңыз.
1116. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ сферасына жанасатын $4x+3z-17=0$ жазықтығына параллель жазықтықтықтардың теңдеулерін құрыңыз.
1117. $x^a+y+z^2-10x+2y+26z-113=0$ сферасына жанасатын $\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+13}{2}$, $\frac{x+7}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-8}{0}$ түзулеріне параллель жазықтықтықтардың теңдеулерін құрыңыз.
1118. $\begin{cases} 8x-11y+8z-30 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$ түзуі арқылы $x^2+y^3+z^2+2x-6y+4z-15=0$ сферасына жанасатын екі жазықтық жүргізуге болатынын дәлелде және олардың теңдеулерін құрыңыз.
1119. $\frac{x+6}{2}=y+3=z+1$ түзуі арқылы $x^2+y^2+z^2-4x+2y-4z+4=0$ сферасына жанасатын жазықтық жүргізуге болмайтынын дәлелдеңіз.
1120. $x=4t+4$, $y=3t+1$, $z=t+1$ түзуі арқылы $x^2+y^2+z^2-2x+6y+2z+8=0$ сферасына жанасатын тек бір жазықтық жүргізуге болатынын дәлелде және оның теңдеуін құрыңыз.

10.2 Жазықтықтың, түзудің және сфераның векторлық символика арқылы теңдеулері

Әрі қарай $M(\bar{r})$ символы M нүктесінің радиус–векторы $\bar{r}$ дегенді білдіреді.
1121. $M_0(\bar{r}_0)$ нүктесінен өтетін және нормаль векторы $\bar{n}$ болатын α жазықтығының теңдеуін құрыңыз.
Шешуі*). $M(\bar{r})$ – еркін нүкте болсын. $\overline{M_0M}$ векторы $\bar{n}$ векторына перпендикуляр болса, сонда тек қана сонда ол α жазықтығында жатады. Векторлардың перпендикулярлық белгісі олардың скаляр көбейтіндісінің нольге тең болуы. Ендеше $\overline{M_0M}\perp\bar{n}$ болады, сонда тек қана сонда, егер

$$\overline{M_0M}\cdot\bar{n}=0 \qquad (1)$$

$\overline{M_0M}$ векторын оның басы мен ұшының радиус векторлары арқылы өрнектейміз:

$$\overline{M_0M}=\bar{r}-\bar{r}_0.$$

Осыдан және (1) теңдіктен мынаны табамыз:

$$(\bar{r}-\bar{r}_0)\cdot\bar{n}=0 \qquad (2)$$

Бұл жазықтықтың векторлық символ арқылы теңдеуі; оны M нүктесінің радиус–векторы $\bar{r}$ сонда тек сонда қанағаттандырады, егер M нүктесі α жазықтығында жатса ($\bar{r}$ – (2) теңдеудің ағымдағы радиус–векторы деп аталады).

*) 1121 және 1129 есептерінің осы параграфтың есептерін дұрыс түсінуге мәні зор. Олардың шешулері мәтінде келтірілген.

1122. $\bar{r}\cdot\bar{n}+D=0$ теңдеуі $\bar{n}$ векторына перпендикуляр жазықтықты анықтайтынын дәлелдеңіз. $\bar{n}=(A;B;C)$ болғанда осы жазықтықтың координаталық теңдеуін жазыңыз.

1123. $\bar{n}^0$ бірлік векторы және $p>0$ саны берілген. $\bar{r}\cdot\bar{n}^0-p=0$ теңдеуі $\bar{n}^0$ векторына перпендикуляр жазықтықты анықтайтынын және p координаталар бас нүктесінен жазықтыққа дейінгі арақашықтық екенін дәлелдеңіз. $\bar{n}^0$ векторы координаталық осьтермен α, β және γ бұрыш жасайтынын болса, онда осы жазықтықтың координаталық теңдеуін жазыңыз.

1124. $M_1(\bar{r}_1)$ нүктесінен $\bar{r}\cdot\bar{n}^0-p=0$ жазықтыққа дейінгі d арақашықтықты есептеңіз. $\bar{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ болғанда d арақашықтықты координаталармен өрнектеңіз.

1125. $M_1(\bar{r}_1)$ және $M_2(\bar{r}_2)$ екі нүктесі берілген. M_1 нүктесінен өтетін $\overline{M_1M_2}$ векторына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз. $\bar{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$ болғанда осы жазықтықтың координаталық теңдеуін жазыңыз.

1126. $M_0(\bar{r}_0)$ нүктесінен өтетін $\bar{a}_1$ және $\bar{a}_2$ векторларына параллель болатын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз. $\bar{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\bar{a}_1=(l_1,m_1,n_1)$, $\bar{a}_2=(l_2,m_2,n_2)$ болғанда осы жазықтықтың координаталық теңдеуін жазыңыз.

1127. $M_1(\bar{r}_1)$, $M_2(\bar{r}_2)$ және $M_3(\bar{r}_3)$ үш нүктесінен өтетін жазықтықтың теңдеуін құрыңыз. $\bar{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$, $\bar{r}_3=(x_3,y_3,z_3)$ болғанда осы жазықтықтың координаталық теңдеуін жазыңыз.

1128. $M_0(\bar{r}_0)$ нүктесінен өтетін және $\bar{r}\cdot\bar{n}_1+D_1=0$, $\bar{r}\cdot\bar{n}_2+D_2=0$ жазықтықтарына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз. $\bar{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\bar{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\bar{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ болғанда осы жазықтықтың координаталық теңдеуін жазыңыз.

1129. $[(\bar{r}-\bar{r}_0)\cdot\bar{a}]=0$ теңдеуі $M_0(\bar{r}_0)$ нүктесінен өтетін және $\bar{a}$ векторына параллель түзудің теңдеуін анықтайтынын дәлелдеңіз, яғни егер M осы түзуде жатса, сонда тек сонда $M(\bar{r})$ нүктесінің $\bar{r}$ радиус–векторы бұл теңдеуді қанағаттандырады.

Дәлелдеуі. Еркін $M(\bar{r})$ нүктесін қарастырамыз. $\bar{r}$ берілген теңдеуді қанағаттандырсын; векторларды азайту ережесі бойынша $\bar{r}-\bar{r}_0=\overline{M_0M}$;

$[(\bar{r}-\bar{r}_0)\cdot\bar{a}]=0$ болғандықтан, онда $\left|\overline{M_0M}\cdot\bar{a}\right|=0$; сонда $\overline{M_0M}$ векторы $\bar{a}$ векторына коллинеар. Ендеше М нүктесі шынында да M_0 арқылы $\bar{a}$ векторы бағытында өтетін түзуде жатады. Керісінше, *M* осы түзуде жатады. Сонда $\overline{M_0M}$ векторы $\bar{a}$ векторына коллинеар. Ендеше $\left|\overline{M_0M}\cdot\bar{a}\right|=0$; бірақ $\overline{M_0M}=\bar{r}-\bar{r}_0$; бұдан $[(\bar{r}-\bar{r}_0)\cdot\bar{a}]=0$. Сонымен, егер *M* осы түзуде жатса, сонда тек қана сонда берілген теңдеуді *M* нүктесінің $\bar{r}$ радиус–векторы қанағаттандырады ($\bar{r}$ теңдеудің ағымдағы радиус–векторы деп аталады).

1130. $[\bar{r}\cdot\bar{a}]=\bar{m}$ теңдеуі $\bar{a}$ векторына параллель түзуді анықтайтынын дәлелдеңіз.

1131. $\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{a}\cdot t$ параметрлік теңдеуі $M_0(\bar{r}_0)$ (яғни *t* өзгергенде $M(\bar{r})$ нүктесі осы түзу бойымен қозғалады) нүктесінен өтетін түзуді анықтайтынын дәлелдеңіз, мұнда *t* – айнымалы параметр. $\bar{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\bar{a}=(l,m,n)$ болғанда осы түзудің координаталық канондық теңдеуін жазыңыз.

1132. Түзу $M_1(\bar{r}_1)$ және $M_2(\bar{r}_2)$ нүктелерінен өтеді. Оның теңдеуін 1129, 1130, 1131 есептерде көрсетілген түрде жазыңыз.

1133. $M_1(\bar{r}_1)$ нүктесінен өтетін және $\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{a}\cdot t$ түзуіне перпендикуляр болатын жазықтық теңдеуін құрыңыз. $\bar{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{a}=(l,m,n)$ болғанда осы жазықтықтың координаталық теңдеуін жазыңыз.

1134. $M_0(\bar{r}_0)$ нүктесінен өтетін және $[\bar{r}\cdot\bar{a}_1]=\bar{m}_1$, $[\bar{r}\cdot\bar{a}_2]=\bar{m}_2$ түзулеріне параллель болатын жазықтық теңдеуін құрыңыз.

1135. $M_0(\bar{r}_0)$ нүктесінен өтетін және $\bar{r}\cdot\bar{n}_1+D_1=0$, $\bar{r}\cdot\bar{n}_2+D_2=0$ жазықтықтарына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

1136. Түзу $M_0(\bar{r}_0)$ нүктесінен өтеді және $\bar{r}\cdot\bar{n}+D=0$ жазықтығына перпендикуляр болады. Оның параметрлік теңдеуін құрыңыз. $\bar{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\bar{n}=(A;B;C)$ болғанда оның координаталық канондық теңдеуін құрыңыз.

1137. Түзу $M_0(\bar{r}_0)$ нүктесінен өтеді және $\bar{r}\cdot\bar{n}_1+D_1=0$, $\bar{r}\cdot\bar{n}_2+D_2=0$ жазықтықтарына параллель болады. Оның параметрлік теңдеуін құрыңыз. $\bar{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\bar{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\bar{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ болғанда оның координаталық канондық теңдеуін құрыңыз.

1138. $\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{a}\cdot t$ түзуі $\bar{r}\cdot\bar{n}+D=0$ жазықтығында жату шартын қорытып шығар. Осы шартты $\bar{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\bar{a}=(l,m,n)$, $\bar{n}=(A;B;C)$ болғанда координаталық түрде жазыңыз.

1139. $\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{a}_1\cdot t$ түзуі арқылы өтетін $[\bar{r}\cdot\bar{a}_2]=\bar{m}$ түзуіне параллель болатын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

1140. $\bar{r}=\bar{r}_1+\bar{a}_1\cdot t$ және $\bar{r}=\bar{r}_2+\bar{a}_2\cdot t$ түзулері бір жазықтықта жату шартын қорытып шығарыңыз.

1141. $\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{a}\cdot t$ түзуі мен $\bar{r}\cdot\bar{n}+D=0$ жазықтығының қиылысу нүктесінің радиус–векторын тап. $\bar{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\bar{a}=(l,m,n)$, $\bar{n}=(A;B;C)$ болғанда қиылысу нүктесінің *x*, *y*, *z* координаталарын есептеңіз.

1142. $M_1(\bar{r}_1)$ нүктесінің $\bar{r}\cdot\bar{n}+D=0$ жазықтығына проекциясының радиус–векторын тап. $\bar{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{n}=(A;B;C)$ болғанда осы проекцияның *x*, *y*, *z* координаталарын есептеңіз.

1143. $M_1(\bar{r}_1)$ нүктесінің $\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{a}\cdot t$ түзуіне проекциясының радиус–векторын табыңыз. $\bar{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\bar{a}=(l,m,n)$ болғанда осы проекцияның *x*, *y*, *z* координаталарын есептеңіз.

1144. $M_1(\bar{r}_1)$ нүктесінен $\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{a}\cdot t$ түзуіне дейінгі *d* арақашықтықты есептеңіз. $\bar{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\bar{a}=(l,m,n)$ болғанда *d* арақашықтығын координаталармен өрнектеңіз.

1145. $\bar{r}=\bar{r}_1+\bar{a}_1\cdot t$ және $\bar{r}=\bar{r}_2+\bar{a}_2\cdot t$ айқас түзулері арасындағы ең қысқа *d* арақашықтығын есептеңіз. $\bar{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$; $\bar{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$; $\bar{a}_1=(l_1,m_1,n_1)$; $\bar{a}_2=(l_2,m_2,n_2)$ болғанда *d* арақашықтығын координаталармен өрнектеңіз.

1146. $(\bar{r}-\bar{r}_0)^2=R^2$ теңдеуі центрі $C(\bar{r}_0)$ және радиусы *R* болатын сфераны анықтайтынын дәлелдеңіз (яғни *M* аталған сферада жатса, сонда тек қана сонда *M* нүктесінің радиус–векторы $\bar{r}$ осы теңдеуді қанағаттандырады).

1147. $\bar{r}=\bar{a}\cdot t$ түзуі мен $\bar{r}^2=R^2$ сферасының қиылысу нүктелерінің радиус–векторларын табыңыз. $\bar{a}=(l,m,n)$ болғанда қиылысу нүктелерінің координаталарын есептеңіз.

1148. $\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{a}\cdot t$ түзуі мен $(\bar{r}-\bar{r}_0)^2=R^2$ сферасының қиылысу нүктелерінің радиус–векторларын табыңыз. $\bar{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\bar{a}=(l,m,n)$ болғанда қиылысу нүктелерінің координаталарын есептеңіз.

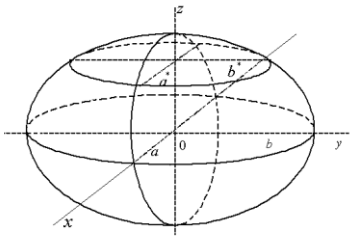
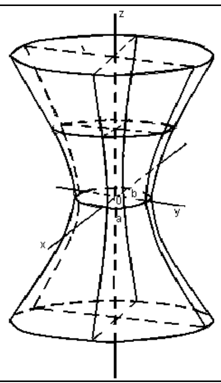
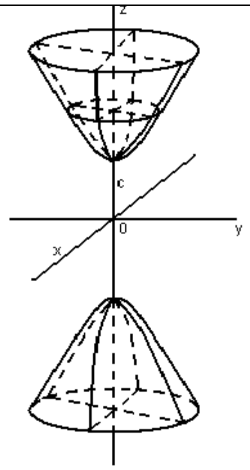
1149. $M_1(\bar{r}_1)$ нүктесі $(\bar{r}-\bar{r}_0)^2=R^2$ сферасында жатыр. M_1 нүктесінде осы сфераға жүргізілген жанама жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

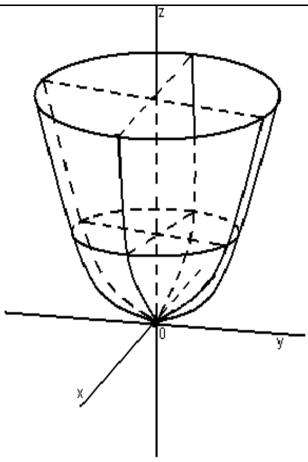
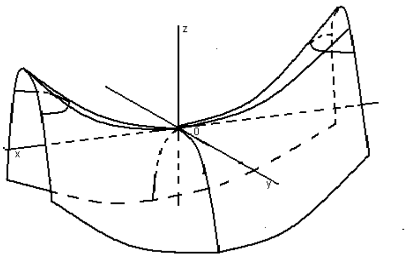
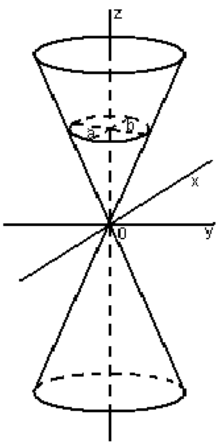
1150. Центрі $C(\bar{r}_1)$ және $\bar{r}\cdot\bar{n}+D=0$ жазықтығына жанайтын сфераның теңдеуін құрыңыз. $\bar{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{n}=(A;B;C)$ болғанда осы сфераның координаталық теңдеуін жазыңыз.

1151. $\bar{r}^2=R^2$ сферасына жанайтын және $\bar{r}\cdot\bar{n}+D=0$ жазықтығына параллель жазықтықтардың теңдеулерін құрыңыз. $\bar{n}=(A;B;C)$ болғанда осы жазықтықтардың координаталық теңдеулерін жазыңыз.

1152. $\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{a}\cdot t$ түзуі мен $(\bar{r}-\bar{r}_0)^2=R^2$ сферасының қиылысу нүктесі арқылы осы сфераға жанама жазықтықтар жүргізілген. Олардың теңдеулерін құрыңыз. $\bar{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\bar{a}=(l,m,n)$ болғанда осы жазықтықтардың координаталық теңдеулерін жазыңыз.

10.3 Екінші ретті беттердің канондық теңдеулері

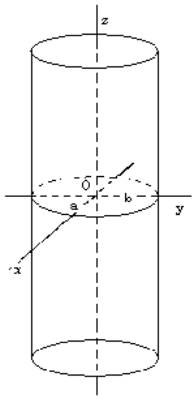
Эллипсоид	
	Қандай–да бір декартты тікбұрышты координаталар жүйесінде келесі түрде анықталатын бет эллипсоид деп аталады.
$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$	эллипсоидтың канондық теңдеуі
Гиперболидтар	
	Қандай–да бір декартты тікбұрышты координаталар жүйесінде келесі түрде анықталатын бет бірқуысты гиперболоид деп аталады.
$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$	бірқуысты гиперболоидтың канондық теңдеуі
	Қандай–да бір декартты тікбұрышты координаталар жүйесінде келесі түрде анықталатын бет екіқуысты гиперболоид деп аталады
$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=-1$	екіқуысты гиперболоидтың канондық теңдеуі

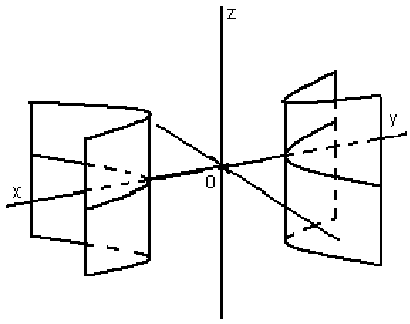
Параболоидтар	
	
$\frac{X^2}{p}+\frac{Y^2}{q}=2Z$	эллипстік параболоидтың канондық теңдеуі
	
$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,$	Гиперболалық параболоидтың канондық теңдеуі
Екінші ретті конус	
	
$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$	екінші ретті конустың канондық теңдеуі

Цилиндрлік беттер

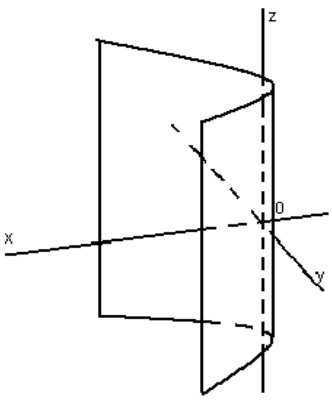
Цилиндрлер деп – шеңбер, эллипс, гипербола, парабола нүктелерінен солардың жазықтықтарына перпендикуляр болып өтетін түзу сызықтардың үздіксіз қозғалысынан шығатын екінші ретті беттер. Бұл шеңбер, эллипс, гипербола және парабола цилиндрлердің бағыттаушылары деп аталады, ал цилиндрлердің беттерінде жатқан түзулер олардың жасаушылары деп аталады. Екінші ретті цилиндрлердің үш типі бар:

1) эллипстік цилиндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$ 2) гиперболалық цилиндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$





3) параболалық цилиндр $y^2=2px.$



1153. $\boldsymbol{x}-2=0$ жазықтығы $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ эллипсоидты эллипс бойымен қиятынын тағайындаңыз; оның жарты осьтерін және төбесін табыңыз.

1154. $z+1=0$ жазықтығы $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$ бірқуысты гиперболоидын гипербола бойымен қиятынын тағайындаңыз; оның жарты осьтерін және төбесін табыңыз.

1155. $y+6=0$ жазықтығы $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=6z$ гиперболалық параболоидын парабола бойымен қиятынын тағайындаңыз; оның параметрін және төбесін табыңыз.

1156. $y^2+z^2=x$ эллипстік параболоиды мен $x+2y-z=0$ жазықтығының қиылысу сызығының координаталық жазықтықтарға проекцияларының теңдеулерін табыңыз.

1157. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$ эллипсоиды мен $2x-3y+4z-11=0$ жазықтығының қиылысуы қандай сызық болатынын тағайындаңыз және оның центрін табыңыз.

1158. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=y$ гиперболалық параболоиды мен $3x–3y+4z+2=0$ жазықтығының қиылысуы қандай сызық болатынын тағайындаңыз және оның центрін табыңыз.

1159. Мына теңдеулермен қандай сызықтар анықталатынын тағайындаңыз: 1) $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=2z\\ 3x-y+6-14=0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=2z\\ x-2y+2=0\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1\\ 9x-6y+2z-28=0\end{cases}$ және олардың әрқайсысының центрлерін табыңыз.

1160. m–нің қандай мәнінде $x+mz–1=0$ жазықтығы $x^2+y^2–z^2=–1$ екі қуысты гиперболоидын а) эллипс бойымен, б) гипербола бойымен қиятынын тағайындаңыз.

1161. m–нің қандай мәнінде $x+my-2=0$ жазықтығы $\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y$ эллипстік параболоидын а) эллипс бойымен, б) парабола бойымен қиятынын тағайындаңыз.

1162. $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2y$ эллипстік параболоидының $2x-2y-z-10=0$ жазықтығымен бір ортақ нүктесі болатынын дәлелдеңіз және оның координаталарын табыңыз.

1163. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$ екі қуысты гиперболоидының $5x+2z+5=0$ жазықтығымен бір ортақ нүктесі болатынын дәлелдеңіз және оның координаталарын табыңыз.

1164. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{9}=1$ эллипсоидының $4x-3y+12z-54=0$ жазықтығымен бір ортақ нүктесі болатынын дәлелде және оның координаталарын табыңыз.

1165. m–нің қандай мәнінде $x-2y-2z+m=0$ жазықтығы $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{9}=1$ эллипсоидымен жанасатынын анықтаңыз.

1166. $n=\{2; –1; –2\}$ векторына перпендикуляр $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=2z$ эллипстік параболоидына жанасатын жазықтықтың теңдеуін құрыңыз.

1167. $x-2y+2z+17=0$ жазықтығына параллель $4x^2+16y^2+8z^2=1$ эллипсоидына жанасатын жазықтықтарды жүргізіңіз, табылған жазықтықтардың арақашықтығын есептеңіз.

1168. Кеңістіктің Oyz жазықтығына біркелкі сығылуының коэффициенті $\frac{3}{5}$ –ге тең. Мұндай сығылуда $x^2+y^2+z^2=25$ сферасы түрленетін беттің теңдеуін құрыңыз.

1169. *Oxy* жазықтығына сығылу коэффициенті $\frac{3}{4}$ –ке, *Oxz* жазықтығына $\frac{4}{5}$ –ке, *Oyz* жазықтығына $\frac{3}{4}$ –ке тең болса, онда кеңістіктің координаталық жазықтықтарға үш рет тізбектелген біркелкі сығылуында $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$ эллипсоиды түрленетін беттің теңдеуін жазыңыз.

1170. $x^2 + y^2 + 2^2 = 25$ сферасын $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$ эллипсоидына түрлендіретін кеңістіктің *Oxy, Oxz* координаталық жазықтықтарға тізбектелген екі сығылуының q_1 және q_2 коэффициенттерін анықтаңыз.

1171. $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ эллипсінің Oy осінен айналуынан пайда болған беттің теңдеуін құрыңыз.

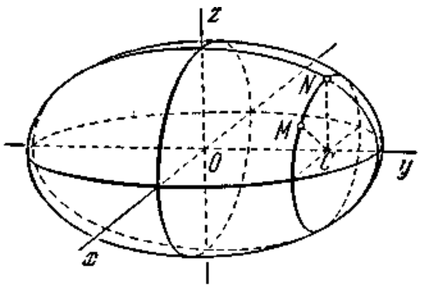
Шешуі*). $M(x; y; z)$ – кеңістіктің еркін нүктесі, C – *M* нүктесінен *Oy* осіне жүргізілген перпендикулярдың табаны болсын. Осы перпендикуляр *Oy* осінен айналғанда *M* нүктесі *Oyz* жазықтығына көшеді; бұл орнында оны $N(0; Y; Z)$ деп белгілейміз. $CM = CN$ және $CM=\sqrt{x^2+z^2}$, $CN=|Z|$ болғандықтан, онда

$$|Z|=\sqrt{x^2+z^2} \quad (1)$$

Сонымен қатар

$$Y = y \quad (2)$$

болатыны айқын. M нүктесі қарастырылған айналу бетінде жатады, сонда тек қана сонда, егер *N* берілген эллипсте жатса, яғни $\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ (3) болғанда (1) және (2) теңдіктерді ескерсек, одан *M* нүктесінің координаталары үшін теңдеу аламыз:



Черт. 53.

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1 \quad (4)$$

Бұрыннан белгілі, егер *M* нүктесі қарастырылған айналу бетінде жатса сонда және тек қана сонда ол қанағаттанады. Ендеше (4) теңдеу осы беттің ізделінген теңдеуі.

1172. $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ эллипсі *Ox* осінен айналғанда пайда болған беттің теңдеуін құрыңыз.

1173. $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$ гиперболасы *Oz* осінен айналғанда пайда болған беттің теңдеуін құрыңыз.

1174. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ теңдеуімен анықталатын үш осьті эллипсоид $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ эллипсі Ox осінен айналу нәтижесінде және кеңістіктің Oxy жазықтығына біркелкі сығылуынан соң алынатынын дәлелдеңіз.

1175. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ теңдеуімен анықталатын бір қуысты гиперболоид $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$ гиперболасы Oz осінен айналу нәтижесінде және кеңістіктің Oxz жазықтығына біркелкі сығылуынан соң алынатынын дәлелдеңіз.

1176. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ теңдеуімен анықталатын екі қуысты гиперболоид $\begin{cases}\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\\ y=0\end{cases}$ гиперболасының Oz осінен айналу нәтижесінде және кеңістіктің Oxz жазықтығына біркелкі сығылуынан соң алынатынын дәлелдеңіз.

1177. $\begin{cases}\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\\ y=0\end{cases}$ теңдеуімен анықталатын эллипстік параболоид $\begin{cases}x^2=2pz\\ y=0\end{cases}$ параболасының Oz осінен айналу нәтижесінде және кеңістіктің Oxz жазықтығына біркелкі сығылуынан соң алынатынын дәлелдеңіз.

1178. Парабола барлық уақытта Oy осіне перпендикуляр жазықтықта қалса, әрі параболаның осі өз бағытын өзгертпесе, ал төбесі $\begin{cases}y^2=2qz\\ x=0\end{cases}$ теңдеулерімен берілген басқа параболамен сырғитын болса, онда парабола қозғалысынан пайда болған беттің теңдеуін құрыңыз. Қозғалатын парабола өзінің бір орнында $\begin{cases}x^2=2pz\\ y=0\end{cases}$ теңдеулерімен берілген.

1179. $z=xy$ теңдеуі гиперболалық параболоидты анықтайтынын дәлелдеңіз.

1180. Бет пен түзудің қиылысу нүктелерін табыңыз:

а) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ және $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$; б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ және $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$

в) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z$ және $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{-4}$; г) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z$ және $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$

1181. $2x-12y-z+16=0$ жазықтығы $x^2-4y^2=2z$ гиперболалық параболоидын түзу сызықты жасаушысы бойымен қиятынын дәлелдеңіз. Осы түзу сызықты жасаушылардың теңдеулерін құрыңыз.

1182. $4x–5y–10z–20=0$ жазықтығы $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ бір қуысты гиперболоидын түзу сызықты жасаушысы бойымен қиятынын дәлелдеңіз. Осы түзу сызықты жасаушылардың теңдеулерін құрыңыз.

1183. $M(1;3;-1)$ нүктесі $4x^2 - z = y$ гиперболалық параболоидта жататынына көз жеткізіп, оның M нүктесінен өтетін түзу сызықты жасаушыларының теңдеулерін құрыңыз.

1184. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ бір қуысты гиперболоидтың $6x + 4y + 3z - 17 = 0$ жазықтығына параллель түзу сызықты жасаушыларының теңдеулерін құрыңыз.

1185. $A(-2;0;1)$ нүктесі $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ гиперболалық параболоидта жататынына көз жеткізіп, оның A нүктесінен өтетін түзу сызықты жасаушылары құрған сүйір бұрышты анықтаңыз.

1186. Төбесі координаталар бас нүктесінде жататын, ал бағыттаушысы 1) $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=c\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=b\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=a\end{cases}$ теңдеулерімен берілген конустың теңдеуін құрыңыз.

1187. $z^2=xy$ теңдеуі төбесі координаталар бас нүктесінде жататын конусты анықтайтынын дәлелдеңіз.

1188.Бағыттаушысы $\begin{cases}x^2-2z+1=0\\ y-z+1=0\end{cases}$ теңдеулерімен берілген , төбесі координаталар бас нүктесінде жататын конустың теңдеуін құрыңыз.

1189. Бағыттаушысы $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ теңдеулерімен берілген , төбесі $(0; 0; c)$ нүктесінде жататын конустың теңдеуін құрыңыз.

1190. Бағыттаушысы $\begin{cases}x^2+y^2-z^2=1\\ x-y+z=0\end{cases}$ теңдеулерімен берілген , төбесі $(3;-1;-2)$ нүктесінде жататын конустың теңдеуін құрыңыз.

1191. Oz осі төбесі координаталар бас нүктесінде жататын дөңгелек конустың осі болады, $M_1(3;-4;7)$ нүктесі оның бетінде жатады. Осы конустың теңдеуін құрыңыз.

1192. Oy осі төбесі координаталар бас нүктесінде жататын дөңгелек конустың осі болады; оның жасаушылары Oy осіне $60°$ бұрышпен көлбейді. Осы конустың теңдеуін құрыңыз.

1193. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{-1}$ түзуі төбесі Oyz жазықтығында жататын дөңгелек конустың осі болады; $M_1(1;\ 1;\ -\frac{5}{2})$ нүктесі оның бетінде жататыны белгілі. Осы конустың теңдеуін құрыңыз.

1194. Координаталар осьтері жасаушылары болатын дөңгелек конустың теңдеуін құрыңыз..

1195. Төбесі $S(5;\ 0;\ 0)$ нүктесінде болатын, жасаушылары $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ сферасын жанайтын конустың теңдеуін құрыңыз.

1196. Төбесі координаталар бас нүктесінде жататын, жасаушылары $(x+2)^2+(y–l)^2+(z–3)^2=9$ сферасын жанайтын конустың теңдеуін құрыңыз.

1197. Төбесі $S(3;\ 0;\ –1)$ нүктесінде болатын, жасаушылары $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}=1$ эллипсоидын жанайтын конустың теңдеуін құрыңыз.

1198. Жасаушылары $l=\{2;\ –3;\ 4\}$ векторына параллель, ал бағыттаушысы $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z=1 \end{cases}$ теңдеулерімен берілген цилиндрдің теңдеуін құрыңыз.

1199. Бағыттаушысы $\begin{cases} x^2-y^2=z \\ x+y+z=0 \end{cases}$ теңдеулерімен берілген, ал жасаушысы бағыттаушының жазықтауы цилиндрдің теңдеуін құрыңыз.

1200. Жасаушысы $x + y – 2z – 5 = 0$ жазықтығына перпендикуляр болатын цилиндр $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ сферасына сырттай сызылған. Осы цилиндрдің теңдеуін құрыңыз.

1201. Жасаушысы $x = 2t – 3$, $y = – t + 7$, $z = – 2t + 5$ түзуіне параллель болатын цилиндр $x^2 + y^2 + z^2 – 2x + 4y + 2z – 3 = 0$ сферасына сырттай сызылған. Осы цилиндрдің теңдеуін құрыңыз.

1202. Егер оның осі $x = 3t +1$, $y=–2t–2$, $z=t +2$ түзуі болса, онда $S(2;–1;1)$ нүктесінен өтетін дөңгелек цилиндрдің теңдеуін құрыңыз.

1203. $(x –2)^2 + (y – 1)^2 + z^2 = 25$, $x^2 +y^2 +z^2 = 25$ екі сфераларына сырттай жүргізілген цилиндрдің теңдеуін құрыңыз.

ЖАУАПТАРЫ

2. 1) $x = -2$, $x = 2$ *2)* $x = -2$, $x = 4$ **4.** 1) AB= 8, |AB| = 8; 2) $AB = -3$, AB= 3; 3) AB = 4, |AB| = 4; AB= 2, |AB|=2; 5) $AB = -2$, |AB| = 2; 6) AB =2, |AB| = 2. **5**. 1) –2; 2) 5; 3) 1; 4) –8; 5) – 2 және 2; 6) – 1 және 5; 7) –6 және 4; 8) –7 және –3.**7**. 1; 2) $-\frac{5}{3}$; 3)2;4) $\frac{1}{2}$; 5) $-\frac{10}{3}$, **8**. $\lambda_1 = \frac{AB}{BC} = 3$; $\lambda_2 = \frac{BC}{BA} = \frac{1}{3}$; $\lambda_3 = \frac{AC}{CA} = -4$; $\lambda_4 = \frac{BC}{CA} = -4$; $\lambda_5 = \frac{BA}{AC} = -\frac{3}{4}$; $\lambda_6 = \frac{CA}{AB} = -\frac{3}{4}$; **9.** $\lambda = \frac{x-y}{x_2 - x}$;

10. $x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}$; **11.** $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; **12.** 1) 4; 2; 3) –2; 4) –2; 5) $-\frac{1}{2}$. **13.**1) $\frac{17}{3}$; 2) $\frac{13}{4}$ 3) $\frac{1}{3}$; 4) 7; 5) 3; 6) 0. **14**. 1) M (– 11); 2) N (13). **15.** (5) және (12). **16**. A(7) және B(–41). **18.** $A_x(2; 0)$, $B_c(3;0)$, $C_x(-5; 0)$, $D_x(-3;0)$; $E_x(-5; 0)$. **19.** $A_y(0; 2)$, $B_y(0; 1)$, $C_y(0; -2)$, $D_y(0, 1)$, $E_y(0; -2)$. **20.** 1) (2; –3); 2) (–3; –2); 3) (–1; 1); 4) (–3; 5); 5) (– 4; –6); 6) $(a;-b)$. **21.** 1) (1;2);2) (–3; – 1);3) (2; –2); 4) (2; 5); 5) (–3;–5); 6) $(-a;b)$. **22.** 1) (–3;–3); 2) (–2;4); 3) (2;–1); 4) (–5;3); 5) (5;4); 6) $(-a;-b)$. **23.** 1) (3; 2); 2) (–2; 5); 3) (4; –3). **24.** 1) (–5; –3); 2) (–3; 4); 3) (2;–7). **26.** Сурет 56. **27.** $(2;-\frac{\pi}{4})$, $(2;\frac{\pi}{2})$, $(3;\frac{\pi}{3})$, (1; –2), (5; 1). **28.** $\mathbf{(1; -\frac{3}{4}\pi), (5; -\frac{\pi}{2})}$, $(2;\frac{2}{3}\pi)$, $(4;-\frac{1}{6}\pi)$, (3; π – 2). **29.** $C(3;\frac{5}{9}\pi)$ $D(5;\frac{11}{14}\pi)$.

30. (1; –5). **31.** $A(3;-\frac{\pi}{2})$, $B(2;\frac{3}{4}\pi)$, $C(1; 0)$, $D(5;\frac{\pi}{4})$, $E(3; 2-\pi)$, $F(2; \pi-1)$. **32.** $M_1(3; 0)$, $M_2(1;\frac{\pi}{3})$, $M_3(2-\frac{\pi}{3})$, $M_4(5;-\frac{\pi}{12})$, $M_5(3; \pi)$, $M_6(1;\frac{7}{12}\pi)$, **33.** $(6;\frac{\pi}{9})$. **34.** $d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

35. $d = 7$. **36.** $9(17 - 4\sqrt{3})$ **37.** $2(13 + 6\sqrt{2})$ **38.** $28\sqrt{3}$ **39.** $S = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2|\sin(\theta_1 - \theta_2)|$. **40.** 5 **41.** $3(4\sqrt{3} - 1)$ **42.** $M_1(0; 6)$, $M_2(5; 0)$, $M_3(\sqrt{2};\sqrt{2})$, $M_4(5; -5\sqrt{3})$, $M_5(-4; 4\sqrt{3})$, $M_6(6\sqrt{3}; -6)$.

43. $M_1(5;\frac{\pi}{2})$, $M_2(3; \pi)$, $M_3(2;\frac{\pi}{6})$, $M_4(2;-\frac{3}{4}\pi)$, $M_5(2;-\frac{\pi}{3})$. **44.** 1) 3; 2) –3; 3) 0; 4) 5; 5) –5; 6) 2. **47.** 1) $X=1$, $Y = 3$; 2) $X = -4$, $Y = -2$; 3) $X = 1$, $Y = -7$; 4) $X = 5$, $Y = 3$. **48.** (3; –1). **49.** (–3; 2). **52.** 1) $X=-6$, $Y=6\sqrt{3}$ 2) $X=3\sqrt{3}$, $Y=-3$; 3) $X = \sqrt{2}$, $Y = -\sqrt{2}$. **53.** 1) 5; 2) 13; 3) 10. **54.** 1) $d = 2$, $\theta = \frac{\pi}{3}$; 2) $d = 6$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$; 3) d = 4, $\theta = \frac{5}{6}\pi$;. **55.** а) $d = \sqrt{2}$, $\theta = -\frac{3}{4}\pi$; б) $d = 5$, $\theta = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} - \pi$; в) $d = 13$, $\theta = \pi - \operatorname{arctg}\frac{12}{5}$; г) $d = \sqrt{234}$, $\theta = -\operatorname{arctg} 5$. **56.** а) 3; б) – 3. **57.** а) (–9; 3); б) (–9; –7).

58. а) (–15; –12); б) (1; –12). **59.** –2. **60.** $\frac{3\sqrt{3} - 4}{2}$.**61.** 4. **62.** 1) –5; 2) 5. **63.** 1) 5; 2) 10; 3) 5; 4) $\sqrt{5}$; 5) $2\sqrt{2}$; 6) 13. **64.** 137 **65.** 34 **66.** $8\sqrt{3}$. **67.** 13, 15. **68.** 150 **69.** $4\sqrt{2}$. **73.** $\angle M_2M_1M_3$ – сүйір. **75.** $\angle BAC = 45°$, $\angle ABC = 45°$, $\angle ACB = 90°$. **76.** 60°. **77.** $M_1(6; 0)$ және $M_2(-2; 0)$. **78.** $M_1(0; 28)$ және $M_2(0; -2)$. **79.** $P_1(1; 0)$ және $P_2(6; 0)$. **80.** $C_1(2; 2)$, $R_1= 2$; $C_2=(10; 10)$, $R_2=10$. **83.** C, (–3; –5), C_2 (5; –5). **82.** M_2 (3; 0). **83.** B(0; 4) және D(–1; –3) **85.** C(3; –2), R=10. **86.** (1; –2). **87.** Q(4; 6). **88.** (2; –4), (–1; 1), (–2; 2). **89.** 1) $M(1; 3)$; 2) N (4; –3). **90.** (1; –3), (3; 1) және (–5; 7). **91.** $D(-3; 1)$. **92**. (5; –3), (1; –5). **93**. D_1 (2; 1), D_1 (–2; 9), D_3 (6; –3). **94**.13. **95**. (2;–1) және (3; 1). **96**. $(\frac{5}{2}; -2)$. **97**. $\frac{14}{3}\sqrt{2}$. **98.** (– 11; –3). **99.** 4. **100**. $\lambda_1 = \frac{AC}{BC} = 2$; $\lambda_2 = \frac{AC}{BC} = -3$; $\lambda_3 = \frac{BA}{AC} = -\frac{2}{3}$; **101**. A(3; –1) және B (0, 8). **102**. (3; –1). **103**. (4; –5). **104.** (–9; 0). **105.** (0; –3). **106.** 1:3, B. **107.** $(4 - \frac{1}{2}; 1)$. **108.** $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$; $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$; **109.** $M(-1; 0)$, $C(0;2)$. **111.** (5; 5).

112. $(\frac{5}{12}a;\frac{5}{12}b)$. **113**. $(\frac{19}{21}a;\frac{19}{21}a)$. **114**. $x=\frac{mx_1+nx_2+px_2}{m+n+p}$, $y=\frac{my_1+ny_2+py_2}{m+n+p}$. **115.** (4; 2). **116.** 1) 14 2) 12 3) 26 **117**. 5. **118.** 20. **119**. 7,4. **120**. $x=\frac{6}{11}$, $y=4\frac{1}{11}$. **121**. $x=\frac{7}{17}$, $y=3\frac{1}{3}$.

122. (0;–8) немесе (0; – 2). **123.** (5; 0) немесе $(-\frac{1}{3};0)$. **124**.(5;2) немесе (2; 2). **125.** C_1(– 7; –3), D_1(–6;–4) немесе C_2 *(17;* –3), D_2(18;–4). **126.** C_1(–2; 12), D_1(–5;16) немесе $C_2$$(-2;\frac{2}{3})$, $D_2$$(-5;\frac{14}{3}.)$ **127**. 1) $x=x'+3$, $y=y'+4$; 2)$x-x'-2$, $y-y+1$; 3)$x=x'-3$, $y=y'+5$, **128.** A (4; –1), B(0; –4), C (2;0). **129**. 1) A(0;0), *B* (– 3;2), C (–4;4); 2) A (3; – 2), *B* (0; 0), C (– 1; 2); 3) A (4; – 4), *B* (1; – 2), C (0; 0). **130**. 1) (3; 5); 2) (–2; 1); 3) (0; – 1); 4) (–5; 0). **131**. 1) $x=\frac{x'-y'\sqrt{3}}{2}$, $y=\frac{x'\sqrt{3}+y^1}{2}$; $x=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$; $y=\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}$ 3) $x=-y'$; $y=-x'$ 4) $x=-y'$, $yx=-x'$. 5)$x=-x'$, $y=-y'$.

132. A($3\sqrt{3}$; l), B$(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2})$, C(3; $-\sqrt{3}$). **133.** 1) *M* ($\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$), N(– $3\sqrt{2}$;$2\sqrt{2}$), P(– $\sqrt{2}$;– $2\sqrt{2}$); 2) M (1; –3), N (5; 1), P (–1; 3); 3) M (–1; 3), *N (–5;* –1), P(1;–3); 4) M(–3; –1), *N (1;* – 5), P (3; 1). **134.** 1) 60°; 2) –30°. **135.** O'(2; –4). **136.** $x=x'+1$, $y=y'-3$. **137.** $x=\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'$, $y=-\frac{4}{5}x'+\frac{3}{5}y'$. **138.** M_1 (1; 5), M_2(2; 0), M_3 (16; –5). **139.** A (6; 3), B (0; 0), C (5; –10). **140.** 1) O' (3; –2), α==90°; 2) O'(– 1; 3), α=180°; 3) *O'* (5; – 3), α= – 45°. **141.** $x=-\frac{15}{17}x'-\frac{8}{17}y'+9$, $y=\frac{8}{17}x'-\frac{15}{17}y'-3$. **142.** M_1 (1; 9), M_2 (4;2),M_3 (1;–3), M_4 (0;3 + $\sqrt{3}$), M_5 (1 + $\sqrt{3}$; 1).

143. M_1(0;5), M_2 (3;0), M_3(–1;0), M_4(0;–6), M_5 ($\sqrt{3}$; 1). **144.** M_1 (2; 0), $M_2$$(l;-\frac{\pi}{2})$, M_3 $(3;\frac{\pi}{2})$, M_4 $(2;-\frac{\pi}{4})$, M_5 $(2;\frac{\pi}{6})$. **145.** $M_1(\sqrt{2};\frac{1}{4}\pi)$, M_2 $(2;-\frac{\pi}{2})$, M_3 $(2;\frac{\pi}{12})$, M_4 $(2;\frac{7}{12}\pi)$, M_5 $(4;-\frac{5}{12}\pi)$. **146.** $f(x,y)=2ax-a^2$. **147.** 1) $f(x;y)=2ax$; 2) $f(x,y)=-2ax-a^2$. **148.** $f(x,y)=4x^2+4y^2+2a^2$. **149.** $f(x,y)=4x^2+4y^2-4ax-4ay+4a^2$. **150.** $f(x,y)=x^2+y^2-25$. **151.** $f(x,y)=2xy-16$. **153.** (3; 1). **154.**Нүкте мүмкін емес. **155.** ±45° немесе ± 135°. **156.** 30°, 120°, –60°, – 150°. **158.** а) (0; –5), (0;5); б) (–3; –4), (–3; 4); в) (5;0); г)–; д) (– 4;3), (4; 3); е) (0; – 5); **161.** 1) а) (7; 0), (–7; 0); б) (0; 7), (0; –7); 2) а) (0; 0), (6; 0); б) (0; 0), (0; –8); 3) а) (– 10; 0), (– 2; 0); б) түзу *Oy* қиылыспайды; 4) түзу координата осьтерімен қиылыспайды 5) а) (0;0), (12;0); б) (0;0), (0; –16); 6) а) түзу *Ox* қиылыспайды; б) (0;–1), (0;–7); 7) түзу координата осьтерімен қиылыспайды **162.** 1) (2; 2), (– 2; – 2); 2) (1; – 1), (9; – 9); 3) (3; – 4), $(1\frac{2}{5};-4\frac{4}{5})$; 4)түзулер қиылыспайды **164.** а) $(6;\frac{\pi}{3})$; б) $(6;-\frac{\pi}{3})$; в) (3; 0); г) $(2\sqrt{3};\frac{\pi}{6})$ **165.** а) $(1;\frac{\pi}{2})$; б) $(2;\frac{\pi}{6})$, $(2;\frac{5}{6}\pi)$; в) $(\sqrt{2};\frac{\pi}{4})$; $(\sqrt{2};\frac{3}{4}\pi)$; **204.** $\left.\begin{array}{l} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{array}\right\}$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **205.** $x=\frac{ab\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}$, $y=\frac{ab\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}$ **206.** $x=\frac{ab\cos t}{\sqrt{b^2\cos^2 t-a^2\sin^2 t}}$, $x=\frac{ab\sin t}{\sqrt{b^2\cos^2 t-a^2\sin^2 t}}$ **207.** 1) $x=\frac{t^2}{2p}$,

$y=t$; 2) $x=2pctg^2 t$, $y=2pctgt$; 3) $x=\frac{p}{2}ctg^2\frac{t}{2}, y=pctg\frac{t}{2}$. **208.** 1) $\left.\begin{matrix} x=2R\cos^2\theta \\ y=R\sin 2\theta \end{matrix}\right\}$ 2) $\left.\begin{matrix} x=R\sin 2\theta \\ y=2R\sin^2\theta \end{matrix}\right\}$ 3) $\left.\begin{matrix} x=2pctg^2\theta \\ y=2pctg\theta \end{matrix}\right\}$. **209.** 1) $x-y^2=0$; 2) $x^2+y^2-a^2=0$; 3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$; 4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$; 5) $x^2+y^2-2Rx=0$; 6) $x^2+y^2-2Ry=0$; 7) $2px-y^2=0$ **211.** 3, –3, 0, –6 , –12. **212.** 1, –2, 4, –5, 7. **213.** (6;0), (0;–4). **214.** (3;–5). **215.** A (2;–1), *B (–I;*3), C (2; 4). **216.** (1; –3), (–2; 5), (5; –9) , (8; –17). **217.** S=17. **218.** C_1(*–1;* 4) немесе C_2 ($\frac{25}{7}$; $-\frac{36}{7}$). **219.** C_1 (l; –1) немесе C_2(–2; –10). **220.** 1) $2x-3y+9=0$; 2) $3x-=y=0$; 3) *y + 2* = 0; 4) $3x+4y-12=0$; 5) $2x+y+5=0$; 6) $x+3y-2=0$. **221.** 1) k=5, b = 3; 2) k = $-\frac{2}{3}$, b = 2; 3) $k=-\frac{5}{3}$, b =$-\frac{2}{3}$; 4) $k=-\frac{3}{2}$, b = 0; 5) k = 0, b = 3. **222.** 1) $-\frac{5}{3}$; 2) $\frac{3}{5}$. **223.** 1) $2x+3y-7=0$; 2) $3x-2y-4=0$. **224.** $3x+2y=0$, $2x-3y-13=0$. **225.** (2; 1), (4; 2), (–1; 7), (1; 8). **226.** (–2;–1). **227.** Q(11; –11). **228.** 1) $3x-2y-7=0$; 2) *5x+y – 7* = 0; 3) $8x+12y+5=0$; 4) *5x* + 7*y* + 9 = 0; 5) $6x-30y-7=0$. **229.** а) k = 7; б) k = $\frac{7}{10}$; в) k = $-\frac{3}{2}$. **230.** $5x-2y-33=0$, $x+4y-11=0$, $7x+6y+33=0$. **231.** $7x-2y-12=0$, $5x+y-28=0$, $2x-3y-18=0$. **232.** $x+y+1=0$. **233.** $2x+3y-13=0$. **234.** $4x+3y-11=0$, *x + y +* 2 = 0, *3x + 2y* –13 = 0. **235.** (3; 4). **236.** $4x+y-3=0$. **237.** *x*–5 = 0 **239.** (–7; 0), $(0;2\frac{1}{3})$. **242.** (1; 3). **243.** *3x – 5y* + 4 = 0; *x + 7y* – 16 = 0; $3x-5y-22=0$; $x+7y+10=0$;. $2x-5y+3=0, 2x-5y-26=0$; диагональ теңдеуі:7*x* – 3*y* – 33 = 0. **245.** $5x+y-3=0$– сыртқы биссектриса; *x – 5y*–11=0 – ішкі биссектриса **246.** *x + y* – 8 = 0, *11x– y* – 28 = 0. **247.** (–12; 5).**248.** *M_1 (10;* –5). **249.** *P* ($\frac{5}{3}$; 0). **250.** P(0; 11). **251.** P(2; – 1). **252.** P (2; 5). **253.** 1) $\varphi=\frac{\pi}{4}$; 2) $\varphi=\frac{\pi}{2}$; 3) $\varphi=0$ 4) $\varphi=arctg\frac{16}{11}$. **254.** $x-5y+3=0$ немесе $5x+y-11=0$. **255.** $4x+3y+1=0$, $3x-4y+32=0$, $4x+3y-24=0$, $3x-4y+7=0$; диагональ: $x+7y-31=0$. **256.** $3x-4y+15=0$, $4x+3y-30=0$, $3x-4y-10=0$, $4x+3y-5=0$. **257.** 2*x + y–16*=0, 2x +*y* +14=0, *x* –2y –18= 0. **258.** 3*x* – *y* + 9 = 0, 3x*:* + *y* + 9 = 0. **259.** 29*x* – 2*y* + 33 = 0. **262.** 1) $3x-7y-27=0$; 2) $x+9y+25=0$; 3) $2x-3y-13=0$; 4) $x-z=0$; 5) y + 3 = 0. **264.** Перпендикуляр 1), 3) ,4). **266.** 1) φ = 45°, 2)φ = 60°; 3)φ = 90°. **267.** M_3 (6; – 6). **268.** *4x –y* –13 = 0, *x* –5=0, *x* +8*y* +5 = 0. **269**. *BC:* 3*x*+4y – 22=0; CA: 2*x*–7*y*–5= 0; CN: 3*x* + 5*y* – *23* = 0. **270.** *x* + 2*y* – 7 = 0*; x* – 4*y* – 1 =0; *x – y* + 2 = 0 **271**. *3x–5y–13=0, 8x– 3y + 17 = 0, 5x + 2y – 1 =0.* **272.** *2x –y + 3 = 0, 2x+y – 7 = 0, x – 2y – 6 = 0.* **273.** *4x –3y + 10 = 0, 7x + y – 20 = 0,3x + 4y–5 = 0.* **274.** *4x + 7y – 1=0,y – 3 = 0, 4x + 3y – 5 = 0.* **275.** $3x+7y-5=0$, $3x+2y-10=0$, $9x+11y+5=0$. **276.** $x-3y-23=0$, $7x+9y+19=0$, $4x+3y+13=0$. **277.** $x+y-7=0$, $x+7y+5=0$, $x-8y+20=0$. **278.** $2x+9y-65=0$, $6x-7y-25=0$, $18x+13y-41=0$. **279.** *x + 2y = 0, 23x + 25y = 0.* **280.** *8x – y – 24 = 0.* **283.** *3x + y = 0, x – 3y = 0.* **284.** *3x+ 4y –1=0, 7x + 24y–61=0.* **285.** 1)a = –2, 5y –33 = 0; 2) a_1 = – 3, x –56 = 0; a_2 = 3, 5x + 8 = 0; 3) a_1 = 1,3x – 8y = 0; a_2 = $\frac{5}{3}$, 33x– 56y = 0. **286.** $m=7$, $n=-2$, $y+3=0$. **287.**$m=-4$, $n=-2$; $x-5=0$. **288.** 1) (5; 6); 2) (3;2); 3) $(\frac{1}{4};\frac{1}{3})$;

4) $(2; -\frac{1}{11})$; 5) $(-\frac{5}{3}$; 2). **291.** 1) $a \neq 3$; 2) $a=3$ $b \neq 2$; 3) $a=3$ $b=2$. **292.** 1) $m=-4, n \neq 2$ немесе $m=4, n \neq -2$; 2) $m=-4, n=2$ немесе $m=4, n=-2$; 3) $m=0$ **293.** $m=\frac{7}{12}$. $m:m_1=0$, m_2 = 6. **298.** $a=-7$. **299.** 1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$**;** 2) $\frac{x}{-6}-\frac{y}{8}=1$; 3) $\frac{x}{\frac{9}{2}}+\frac{y}{3}=1$; 4) $\frac{x}{\frac{2}{3}}+\frac{y}{-\frac{2}{5}}=1$; 5) $\frac{x}{1/5}+\frac{y}{1/2}=1$(черт.81). **300.** 6 **301.** $x+y+4=0$. **302.** $x+y-5=0$, $x-y+1=0$, $3x-2y=0$ **304.** $(\sqrt{2}+1)x+(\sqrt{2}-1)y-10=0$, $(\sqrt{2}-1)x+(\sqrt{2}+1)y+10=0$, $x-y-10=0$. **305.** $3x-2y-12=0$, $3x-8y+24=0$. **306.** $x+3y-30=0$, $3x+4y-60=0$, $3x-y-30=0$, $x-12y+60=0$. **307.** (2; 0), (0; – 3), (–4; 0), (0; 4). **308.** $S \geq 2x_1y_1$. **310.** 1) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2=0$; 2) $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-10=0$; 3) $\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-1$; 4) $-x-2=0$; 5) $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-1=0$. **311.** 1) $\alpha=0$, $\beta=2$; 2) $p=2$; 3) $\alpha=\pi/2$, $p=3$; 4); $p=3$; 5) $\alpha=\pi/6$; $p=3$; 6) $\alpha=-\pi/4$; $p=\sqrt{2}$; 7) $\alpha=-2/3\,\pi$; $p=-1$; 8) $\alpha=-\beta$; $p=q$; 9) $\alpha=\beta-\pi$; $p=q$;. **312.** **314.** 5 **315.** 6. **320.** 4. **321.** 3. **322.** *1) d =2,5; 2) d =3; 3) d =0,5; 4) d = 3,5.* **323**. 49 кв. бірл. **325.** 2:3 **327.** $7x+24y-134=0$, $x-2=0$. **328.** $3x+4y-13=0$. **330.** $8x-15y+9=0$. **331.** $3x-4y-25=0$, $3x-4y+5=0$. **332.** $4x+3y-8=0$, $4x+3y+17=0$, $3x-4y-6=0$, $3x-4y+19=0$. $4x+3y-8=0$, $4x+3y-33=0$, $3x-4y-6=0$, $3x-4y+19=0$. **333.** $3x+4y-11=0$, $4x-3y-23=0$, $3x+4y-27=0$; $3x+4y-11=0$, $4x-3y-23=0$, $3x+4y+5=0$.**334.** $3x+4y+6=0$, $3x+4y-14=0$ немесе $3x+4y+6=0$, $3x+4y+26=0$.**335.** $12x-5y+61=0$, $12x-5y+22=0$ немесе $12x+61=0$, $12x-5y+100=0$. **336.** $M(2; 3)$. **337.** $4x+y+5=0$, $y-3=0$. **338.** 1) $3x-y+2=0$; 2) $x-2y+5=0$; 3) $20x-8y-9=0$. **339.** 1) $4x-4y+3==0$, $2x+2y-7=0$; 2) $4x+1=0$, $8y+13=0$; 3) $14x-8y-3=0$, $64x+112y-23=0$. **340.** $x-3y-5=0$, $3x+y-5=0$ **347.** $8x+4y-5=0$. **348.** $x+3y-2=0$. **349.** $3x-19=0$. **350.** $10x-10y-3=0$. **351.** $7x+56y-40=0$. **352.** $x+y+5=0$. **353.** S(2; – 1). **354.** 1) $3x+2y-7=0$; 2) $2x-y=0$; 3) $y-2=0$; 4) $x-1=0$; 5) $4x+3y-10=0$; 6) $3x-2y+1=0$. **355.** $74x+13y+39=0$. **356.** $x-y-7=0$. **357.** $7x+19y-2=0$. **358.** $x-y+1=0$. **359.** $4x-5y+22=0$, $4x+y-18=0$, $2x-y+1=0$. **360.** $x-5y+13=0$, $5x+y+13=0$. **361.** $5x-y-5=0$ *(BC)*, $x-y+3=0$ *(AC)*, $3x-y-1=0$ (CN). **362.** $x-5y-7=0$, $5x+y+17=0$, $10x+7y-13=0$. **363.** $2x+y+8=0$, $x+2y+1=0$. **366.** $C=-29$. **367.** $a \neq -2$. **368.** $4x+3y-14=0$, $3x-4y+27=0$, $3x-4y+2=0$, $4x+3y+11=0$, $7x-y+13=0$. **369.** $x+y+5=0$. **370.** $x+y+2=0$, $x-y-4=0$, $3x+y=0$. **371.** $2x+y-6=0$, $9x+2y+18=0$. **372.** $3x-y+1=0$. 374. $3x-4y+20=0$, $4x+3y-15=0$. **375.** $x+5y-13=0$, $5x-y+13=0$. **376.** $7x+y-9=0$, $2x-y+1=0$. **377.** $5x-2y-7=0$. **378.** *AC*: $3x+8y-7=0$, *BD*: $8x-3y+7=0$. **379.** $4x+y+5=0$, $x-2y-1=0$, $2x+5y-11=0$. **381.** 1) $\rho\sin(\beta-\theta)=p$, $\rho\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)=3$; 2) $\rho\cos(\theta-\alpha)=a\cos\alpha$, $\rho\cos(\theta+\frac{2}{3}\pi)=-1$; 3) $\rho\sin(\beta-\theta)=\alpha\sin\beta$, $\rho\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)=3$. **382.** $\rho\sin(\beta-\theta)=\rho_1\sin(\beta-\theta_1)$. **383.** $\rho\cos(\theta-\alpha)=\rho_1\cos(\theta_1-\alpha)$. **384.** $\frac{\rho\sin(\theta-\theta_1)}{\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)}=\frac{\sqrt{\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos(\theta-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_2^2+\rho_1^2-2\rho_2\rho_1\cos(\theta_2-\theta_1)}}$ **385.** 1) $x^2-y^2=9$; 2) $(x-2)^2+(y+3)^2=49$; 3) $(x-6)^2+(y+8)^2=100$ 4) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$; 5) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$; 6) $x^2+y^2=16$; 7) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$; 8) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$; 9) $(x-1)^2+y^2=1$; 10) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$. **386.** $(x-3)^2+(y+1)^2=38$. **387.** $(x-4)^2+(y+1)^2=5$ және $(x-2)^2+(y-3)^2=5$. **388.** $(x+2)^2+(y+1)^2=20$. **389.** $(x-5)^2+(y+2)^2=20$ және $(x-\frac{9}{5})^2+(y-\frac{22}{5})^2=20$. **390.** $(x-1)^2+(y+2)=16$.

391. $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 50$ және $(y - 29)^2 + (y + 2)^2 = 800$. **392.** $(x - 2)^3 + (y - 1)^2 = 5$ және $(x - \frac{22}{5})^2 + (y + \frac{31}{5})^2 = \frac{289}{5}$. **393.** $(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{81}{13}$, $(x+8)^2+(y+7)^2=\frac{25}{13}$. **394.** $(x-2)^2+(y-1)^2=25$; $(x + \frac{202}{49}) + (y - \frac{349}{49})^2 = (\frac{185}{49})^2$. **395.** $(x + \frac{10}{7})^2 + (y + \frac{25}{7}) = 1$, $(x - \frac{30}{7})^2 + (y - \frac{5}{7})^2 = 1$.
396. $(x-5)^2 + y^2 = 16$, $(x+15)^2 + y^2 = 256$, $(x - \frac{35}{3}) + (y - \frac{40}{3})^2 = (\frac{32}{3})^2$ и $(x - \frac{35}{3})^2 + (y + \frac{40}{3})^2 = (\frac{32}{3})^2$.
400. 1) $x + 5y - 3 = 0$; 2) $x + 2 = 0$; 3) $3x - y - 9 = 0$; 4) $y + 1 = 0$. **401.** $2x - 5y + 19 = 0$. **402.** а) 7; б) 17; в) 2. **403.** $M_1(-1; 5)$, $M_2(-2; -2)$.**405.** 1) $| k | < \frac{3}{4}$; 2) $k = \pm \frac{3}{4}$; 3) $| k| > \frac{3}{4}$. **406.** $\frac{b^2}{1+k^2} = R^2$.
407. $2x + y - 3 = 0$. **408.** $11x - 7y - 69 = 0$. **409.** $2\sqrt{5}$. **410.** $2x - 3y + 8 = 0$, $3x + 2y - 14 = 0$. **412.** $x^2 + y^2 + 6x - 9y - 17 = 0$.**413.** $13x^2 + 13y + 3x + 71y = 0$. **414.** $7x - 4y = 0$. **415.** 2. **416.** 10. **417.** $(x + 3)' + (y - 3)^2 = 10$. **418.** $x - 2y + 5 = 0$. **419.** $3x - 4y + 43 = 0$. **420.** $M_1(-\frac{7}{2}; \frac{5}{4})$; $d = 2\sqrt{5}$.
421. $x_1x + y_1y = R^2$. **422.** $(x_1-\alpha)(x-\alpha)+(y_1-\beta)(y-\beta)=R^2$. **423.** 45°. **424.** 90°. **425.** $(\alpha-\alpha)^2+(\beta-\beta)= R_1^2 + R_2^2$. **427.** $x - 2y - 5 = 0$; $2x - y - 5 = 0$.**428.** $2x + y - 8 = 0$; $x - 2y + 11 = 0$. **429.** $2x + y - 5 = 0$, $x-2y = 0$. **430.** 90°. **431.** $x + 2y + 5 = 0$. **432.** $d = 7{,}5$. **433.** $d = 6$. **434.** $d = \sqrt{10}$. **435.** 3. **436.** $2x + 4y - 1 = 0$; $2x + y + 19 = 0$. **437.** $2x + y - 5 = 0$; $2x + y + 5 = 0$. **438.** $\rho = 2R\cos(\theta-\theta_0)$. **439.** 1) $\rho = 2R\cos\theta$; 2) $\rho = -2\cos\theta$; 3) $\rho = 2R\sin\theta$ 4) $\rho = -2R\sin\theta$ **440.** 1) (2; 0) ;R=2; 2) $(\frac{3}{2}; \frac{\pi}{2})$; $R = \frac{3}{2}$; 3) $(1; \pi)$. R =1; 4) $(\frac{5}{2}; -\frac{\pi}{2};)$; $R = \frac{5}{2}$; 5) (3; 4) ; R = 3; 6) $(4; \frac{5}{6}\pi)$: R=4; 7) $(4; -\frac{\pi}{6})$: R = 4. **441.** 1) $x^2 + y^2 - 3x = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 4 = 0$; 3) $x^2 + y^2 - x + y = 0$. **442.** 1) $\rho=\cos\theta$; 2) $\rho - 3\cos\theta$; 3) $\rho = 5\sin\theta$; 4) $\rho = -\sin\theta$; 5) $\rho=\cos\theta+\sin\theta$. **443.** $\rho=R\cos(\theta-\theta_0)$. **444.** 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$;3) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; 4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 5) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$; 6) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$; 7) $\frac{x^2}{5}+y^2=1$; 8) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; 9) $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$ немесе $\frac{x^2}{117/4}+\frac{y^2}{9}=1$. 10) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$; 447. 1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{49}=1$; 2) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{25}=1$; 3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$; 4) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$;
5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{144}=1$; 6) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$; **446.** 1) 4 и 3; 2) 2 , 1; 3) 5 , 1; 4) $\sqrt{15}$, $\sqrt{3}$; 5) $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{3}$ 6) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ 7) 1 , $\frac{1}{2}$ 8) 1 , 4 9) $\frac{1}{5}$,$\frac{1}{3}$ 10) $\frac{1}{3}$, 1 **447.** 1) 5 , 3 **;** 2) $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$, 3) $\varepsilon = \frac{4}{5}$; 4) $x = \pm\frac{25}{4}$.
448. 16. **449.** 1) $\sqrt{5}$, 3; 2) $F_1(0;-2)$, $F_2(0;2)$; 3) $\varepsilon = \frac{2}{3}$; 4) $y = \pm \frac{9}{2}$. **450.** $\frac{4\sqrt{5}}{45}$ **451.** $\frac{b^2}{c}$. **453.** $(-3; -\frac{8}{5})$, $(-3; \frac{8}{5})$. **456.** 15. **457.** 8. **458.** $5x + 12y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. **459.** $r_1 = 2{,}6$, $r_2 = 7{,}4$. **460.** 20. **461.** 10.
462. $(-5; 3\sqrt{3})$ және $(-5; -3\sqrt{3})$. **463.** $(-2; \frac{\sqrt{21}}{2})$ және $(-2; -\frac{\sqrt{21}}{2})$. **464.** 3 ,7. **465.** 1) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=1$; 3) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$; 3) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$; 5) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$; 6) $\frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{192}=1$;
6) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$; **466.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$. **467.** **473.** 1) $\frac{(x-2)^2}{169}+\frac{y^2}{25}$ =1 2) $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3 = 0$; 3) $68x^2 + 48xy + 82y^2 - 625 = 0$; 4) $11x^2 + 2xy + 11y^s - 48x - 48y - 24 = 0$. **474.** $5x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 55 = 0$. **475.** $4x^2 + 3y^2 + 32x - 14y + 59 = 0$. **476.** $4x^2 + 5y^2 + 14x + 40y + 81 = 0$. **477.** $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0$. **478.** $17x^2 + 8xy + 23y^2 + 30x - 40y - 175 = 0$. **479.** $x^2 + 2y^2 - 6x + 24y + 31 = 0$. **480.** $(4; \frac{2}{3})$, $(3; \frac{8}{5})$ **485.** $k^2a^2 + b^2 = m^2$. **486.** $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y^2y}{b^2}=1$; **488**. $3x + 2y - 10 = 0$, $3x + 2y + 10 = 0$.

489. $x + y - 5 = 0$, $x + y + 5 = 0$, **490**. $2x - y - 12 = 0$, $2x - 2y + 12 = 0$; $d = \frac{24\sqrt{5}}{5}$. **491.** $M_1(-3; 2)$; $d = \sqrt{13}$. **492.** $x + y - 5 = 0$, $x + 4y - 10 = 0$. **493**. $4x - 5y - 10 = 0$. **494**. $d = 18$. **495**. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$, , $\frac{x^2}{80} + \frac{y^2}{5} = 1$. **496**. $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$. **499**. $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$ **502.** $2x + 11y - 10 = 0$. **503**. (3; 2) ,(3; – 2). **504.** $R = \frac{mn\sqrt{2}}{\sqrt{m^2 + n^2}}$. **505.** $10{,}5\sqrt{3}$. **506.** $\varphi = 60°$. **507.** 16,8. **508.** 60°. **509**. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. **510.** $x^2 + y^2 = 9$, **511.** $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$. **512.** $q = \frac{4}{3}$. **513.** $q = \frac{2}{3}$. **514.** $q_1 = \frac{4}{3}$. $q_2 = \frac{4}{5}$. **515.** 1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 3) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. 4) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ 5) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$. 6) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ 7) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 8) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 9) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ **516.** 1) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{324} = 1$ 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$. 3) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = -1$. 4) $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{25} = -1$. 5) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$. **517.** 1) $a = 1$, $b = 2$; 2) $a = 4$, $b = 1$; 3) $a = 4$, $b = 2$; 4) $a = 1$, $b = 1$; 5) $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{5}{3}$; 6) $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{1}{4}$; 7) $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{8}$; **518.** 1) $a = 3$, $b = 4;$ 2) $F_2(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$; 3) $\varepsilon = \frac{5}{3}$; 4) $y = \pm\frac{3}{4}x$. 5) $x = \pm\frac{9}{5}$. **519.** 1) $a = 3$, $b = 4$;2) $F_1(0;-5)$, $F_2(0;5)$;3) $\varepsilon = \frac{5}{4}$; 4) $y = \pm\frac{4}{3}x$. 5) $y = \pm\frac{16}{5}$. **520.** 12 **522.** $x + 4\sqrt{5}y + 10 = 0$, $x - 10 = 0$. **523.** $r_1 = 2\frac{1}{4}$, $r_2 = 10\frac{1}{4}$. **524.** 8. **525.** 12. **526.** 10. **527.** 27.**528.** $(10; \frac{9}{2}) : (10; -\frac{9}{2})$ **529.** $(-6; 4\sqrt{3})$, $(-6; -4\sqrt{3})$. **530.** $2\frac{1}{12}$, $26\frac{1}{12}$. **532.** 1) $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$; 2) $x^2 - y^2 = 16$; 3) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. немесе $\frac{x^2}{61/9} - \frac{y^2}{305/16} = 1$ 4) $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$; 5) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;**534.** $\varepsilon = \sqrt{3}$. **535.** 1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$; **536.** $\frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{40} = 1$. **540.** 1) $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$; 2) $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$; **541.** 1) $C(2;-3)$, $a = 3$, $b = 4$, $\varepsilon = 5/3$, $5x - 1 = 0$, $5x - 19 = 0$, $4x - 3y - 17 = 0$, $4x + 3y + 1 = 0$; 2) $C(-5; 1)$, $a = 8$, $b = 6$, $\varepsilon = 1{,}25$; **543.** 1) $\frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1$; 2) $24xy + 7y^2 - 144 = 0$; 3) $2xy + 2x - 2y + 7 = 0$. **544.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; **545.** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$; **546.** $x^2 - 4y^2 - 6x - 24y - 47 = 0$. **547.** $7x^2 - 6xy - y^2 + 26x - 18y - 17 = 0$. **548.** $91x^2 - 100xy + 16y^2 - 136x + 84y - 47 = 0$. **549.** $xy = \frac{a^2}{2}$ –45°; $xy = -\frac{a^2}{2}$ +45°. **550.** 1) $C(0; 0)$, $a = b = 6$, $x = 0 : y = 0$; 2) $C(0; 0)$, $a = b = 3$, $x = 0 : y = 0$; 3) $C(0; 0)$, $a = b = 5$, $x = 0 : y = 0$. **551.** (6; 2) , $(\frac{14}{3}; -\frac{2}{3})$. **552.** $(\frac{25}{4}; 3)$ – **556.** $k^2a^2 - b^2 = m^2$. **557.** $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$. **559.** $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y + 10 = 0$. **560.** $10x - 3y - 32 = 0$, $10x - 3y + 32 = 0$. **561.** $x + 2y - 4 = 0$, $x + 2y + 4 = 0$; $d = \frac{8\sqrt{5}}{5}$. **562.** $M_1(-6; 3)$; **563.** $5x - 3y - 16 = 0$, $13x + 5y + 48 = 0$. **564.** $2x + 5y - 16 = 0$. **565.** $d = \frac{5}{17}\sqrt{10}$. **566.** $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{45} = 1$, $\frac{3x^2}{10} - \frac{4y^2}{45} = 1$. **567.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. 5**68.** $x = -4$, $x = 4$, $y = -1$, $y = 1$. 572. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$. **573.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **575.** $2x + y + 6 = 0$ **577.** $x^2 - y^2 = 16$. **578.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **579.** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$. **580.** $q = \frac{2}{3}$. 581. $q = 2$. **582.** $q_1 = 2$, $q_2 =$ у. **583.** 1) $y^2 = 6x$; 2) $y^2 = -x$. 3) $x^2 = \frac{1}{2}y$.; 4) $x^2 = -6y$. **584.** 1) $p = 3$; **585.** 1) $y^2 = 4x;$

2) $y^2 = -9x$; 3) $x^2 = y$;4) $x^2 = -2y$. **586.** 40 см. **587.** $x^2 = -12y$. **589**. $F(6; 0)$, $x + 6 = 0$. **590.** 12. **591.** 6. **592.** (9; 12), (9; – 12). **593.** $y^2 = -28x$. **594.** 1) $(y - \beta) = 2p(x - \alpha)$; 2) $(y - \beta)^2 = -2p(x - \alpha)$. **595.** 1) $(x - \alpha)^2 = 2p(y - \beta)$; 2) $(x - \alpha)^2 = -2p(y - \beta)$. **596.** 1) $A(2; 0)$, $p = 2$, $x - 1 = 0$; 2) $A(\frac{2}{3}; 0)$, $p = 3$, $6x - 13 = 0$; 3) $A(0; -\frac{1}{3})$. $p = 3$, $6y - 13 = 0$; 4) $A(0; 2)$, $p = \frac{1}{2}$; $4y - 9 = 0$. **597.** 1) $A(-2; 1)$, $p = 2$; 2) $A(1; 3)$, $p = \frac{1}{8}$; 3) $A(6; -1)$, $p = 3$. **598.** 1) $A(-4; 3)$, $p = \frac{1}{4}$; 2) $A(1; 2)$, $p = 2$; 3) $A(0; 1)$, $p = \frac{1}{2}$. **600.** $x = \frac{1}{4}y^2 - y + 7$. **601.** $y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$. **602.** $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$. **603.** $F(9; -8)$. **604.** $4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y + 89 = 0$.**605.** (2; 1), (–6; 9). **606.** (–4; 6) **609.** 1) $k < \frac{1}{2}$; 2) $k = 1/2$; 3) $k > 1/2$. **6l0.** $p = 2bk$. **612.** $y_1 y = p(x + x_1)$. **613.** $x + y + 2 = 0$. **614.** $2x - y - 16 = 0$. **615.** $d = 2\sqrt{13}$. **616.** $M_1(9; -24)$; $d = 10$. **617.** $3x - y + 3 = 0$ және $3x - 2y + 12 = 0$. **619.** $5x - 18y + 25 = 0$. **620.** $d = 13\frac{5}{13}$. **621**. (6; 12) ,(6; –12). **622.** $(10; \sqrt{30})$, $(10; -\sqrt{30})$, $(2; \sqrt{6})$, $(2; -\sqrt{6})$. **623.** (2; 1), (–1; 4), $(\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{7+\sqrt{13}}{2})$, $(\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{7-\sqrt{13}}{2})$ **625.** $y - 18 = 0$. **628.** 1) $\rho = \frac{16}{5 - 3\cos\theta}$; 2) $\rho = \frac{16}{5 + 3\cos\theta}$. **629.** 1) $\rho = \frac{9}{4 - 5\cos\theta}$; 2) $\rho = -\frac{9}{4 - 5\cos\theta}$. **630.** 1) $\rho = \frac{144}{5 + 13\cos\theta}$; 2) $\rho = -\frac{144}{5 + 13\cos\theta}$; **633.** 13, 12. **634.** 8,6. **635.** $\rho = -\frac{21}{2\cos\theta}$, $\rho = \frac{21}{2\cos\theta}$. **636.** $\rho = -\frac{34}{5\cos\theta}$, $\rho = -\frac{16}{5\cos\theta}$, $\rho = \frac{20}{3\sin\theta - 4\cos\theta}$, $\rho = -\frac{20}{3\sin\theta + 4\cos\theta}$. **637.** $(6; \frac{\pi}{4})$, $(6; -\frac{\pi}{4})$. **638.** $(3; \frac{2}{3}\pi)$, $(3; -\frac{2}{3}\pi)$. **639.** $(\frac{p}{2}; \pi)$ 2) $(p; \frac{\pi}{2})$, $(p; -\frac{\pi}{2})$, **640.** $\rho^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2\cos^2\theta}$. **641.** $\rho^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2\cos^2\theta - 1}$. **642.** $\rho = \frac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta}$. **643.** $8x + 25y = 0$. **644.** $9x - 32y - 73 = 0$. **645.** $x - y = 0$, $x + 4y = 0$. **646.** $x + 2y = 0$, $8x - 9y = 0$. **647.** $x + 2y = 0$, $2x - 3y = 0$. **654.** $2x - 5y = 0$. **655.** $7x + y - 20 = 0$. **656.** $x - 8y = 0$, $2x - y = 0$. **657.** $x - 2y = 0$, $3x - y = 0$; $x + 2y = 0$, $3x + y = 0$. **661.** $y + 2 = 0$. **662.** $2x - y + l = 0$. **748,** $|a| = 7$. **749.** $z = \pm 3$. 750. $\overline{AB}$ = {–4;_3 –1}, $\overline{BA}$ = {4;–3;1}. **751.** $N(4;1; 1)$. **752.** (–1;2;3). **753.** $X = \sqrt{2}$, $Y = 1$, $Z = -1$. **754.** $\cos\alpha = \frac{12}{25}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $\cos\gamma = -\frac{16}{25}$. **755.** $\cos\alpha = \frac{3}{13}$, $\cos\beta = \frac{4}{13}$, $\cos\gamma = \frac{12}{13}$.**758.** 60° немесе 120°.**759.** a= $\{1; -1; \sqrt{2}\}$ немесе α= $\{1; -1; -\sqrt{2}\}$. **760.** M_1 $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, M_2 $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, **762.** |a–b|=22. **763.** |a +b|=20. **764.** |a+b|=|a–b|=13. **765.** |a + b| $= \sqrt{129} \approx 11{,}4$, |a –b |=7. **766.** |a + b| = $\sqrt{19} \approx 4{,}4$, |a –b|=7. **768.** | a |= |b|. **774**. |R| = 15. **775.** 1) {t; –1; –6}; 2) {5; –3; 6}; 3) {6; –4; 12}; 4) $\{l; -\frac{1}{2}; 0\}$; 5) {0; –1; 12}; 6) $\{3; -\frac{5}{3}; 2\}$. **777.** α=4, β=–1**780.** $a^0 = \{\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}\}$. **781**. $a^0 = \{\frac{3}{13}; -\frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\}$. **782**. $|a + b| = 6$, $|a - b| = 14$. **783.** $d = -48i + 45j - 36k$. **784**. $c = \{-3; 15; 12\}$. **785.** $\overline{AM} = \{3; 4; -3\}$, $\overline{BN} = \{0; -5; 3\}$, $\overline{CP} = \{-3; 1; 0\}$. **787**. $a = 2p + 5q$. **788**. $a = 2b + c$, $b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c$, $c = a - 2b$. **789**. $p = 2a - 3b$ **791**. $\overline{AD} = 11\overline{AB} - 7\overline{AC}$; $\overline{BD} = 10\overline{AB} - 7\overline{AC}$; $\overline{CD} = 11\overline{AB} - 8\overline{AC}$; $\overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD} = 32\overline{AB} - 22\overline{AC}$. **793.** $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{p} - 3\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$. **794.** $d = 2a - 3b + c$, $c = -2a + 3b + d$, $b = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}d$, $a = \frac{3}{2}b - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d$. **795.** l)–62 2)162; 3)16; 4)13; 5)–61; 6) 37; 7) 73. **796.** 1) –62; 2) 162; 3) 373. **800.** $\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{ca} = -\frac{3}{2}$. **801.** $\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{ca} = -13$. **802.** $|\boldsymbol{p}| = 10$. **803.** $\alpha = \pm\frac{3}{5}$. **804.** $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$. **807.** $\overline{BD} = \frac{bc}{c^2}c - b$.

808. $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$. **809.** $\varphi = \arccos(-\frac{4}{5})$. **812.** 1) 22; 2) 6; 3) 7; 4) –200; 5) 129; 6) 41. **813.** 17.
814. 1) –524; 2) 13; 3) 3; 4) $(\overline{AB}*\overline{AC}*\overline{BC}=\{-70;70;-350\}$. $\overline{AB}(\overline{AC}*\overline{BC})=\{-78;104;-312\}$. **815.** 31.
816. 13. **818.** $\alpha = -6$. **819.** $\cos\varphi = \frac{5}{21}$. **820.** 45°. **821.** $\arccos(-\frac{4}{9})$. **823.** $x = \{-24; 32; 30\}$.
824. $x = \{1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\}$. **825.** $x = -4i - 6j + 12k$. **826.** $x = \{-3; 3; 3\}$. **827.** $x = \{2; -3; 0\}$.
828. $x=2i+3j-2k$. **829.** $\sqrt{3}$. **830.**–3. **831.**–5. **832.** 6. **833.** –4. **834.** 5. **835.** –11. **836.** $X=-\frac{14}{3}$, $Y=-\frac{14}{3}$
$Z=-\frac{7}{3}$. **837.** 3. **838.** $-6\frac{5}{7}$. **839.** $|[ab]|=15$. **840.** $|[ab]|=16$. **841.** $\boldsymbol{ab}=\pm 30$. **842.**1) 24; 2) 60.
843. 1) 3; 2) 27; 3) 300. **850.** 1) {5; 1; 7}; 2) {10; 2; 14}; 3) {20; 4; 28}. **851.** 1) {6; –4; –6}; 2) {–2; 8; 12}. **852.** {2; 11; 7}. **853.** {– 4;3; 4}. **854.** 15; $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{15}$, $\cos\gamma=\frac{11}{15}$.
855. 28; $\cos\alpha=-\frac{3}{7}$, $\cos\beta=-\frac{6}{7}$, $\cos\gamma=\frac{2}{7}$. **856.** $\sqrt{66}$; $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{66}}$, $\cos\beta=-\frac{4}{\sqrt{66}}$, $\cos\gamma=\frac{7}{\sqrt{66}}$.
857. 14 кв.бірл. **858.** 5. **859.** $\sin\varphi=\frac{5\sqrt{17}}{21}$. **860.** {–6;–24;8}. **861.** $\boldsymbol{m}$ ={45; 24; 0}. **862.** x = {7, 5; 1}.
864. $[[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}]=\{-7,14;-7\}$; $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]=\{10;13;19\}$ **876.** 3 куб. бірл. **877.** 11. **878.** $D_1(0;8;0)$; $D_2(0;-7;0)$.
881. $X=-6$, $У=-8$, $Z=-6$ **889.** $x^2+y^2+z^2=r^2$ **890.** $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$. **891.** $y-3=0$.
892. $2z-7=0$. **893.** $2x+3=0$. **894.** $20y+53=0$. **895.** $x^2+y^2+z^2=a^2$. **396.** $x^2+y^2+z^2=a^2$.
897. $x+2z=0$. **893.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$. **899.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=-1$. **902.** 1) (3; 2; 6) и (3; –2; 6); 2) (3; 2; 6), (–3; 2; 6); **904.** $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ y=0.\end{cases}$ **905.** $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25,\\ y+2=0.\end{cases}$ **906.** $\begin{cases}(x-5)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=169,\\ x=0.\end{cases}$
907. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=36,\\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=25.\end{cases}$ **909.** (1; 2; 2), (–1; 2; 2). $\frac{1}{4}$. **911.** 1) $x^2+5y^2-8y-12=0$;
2) $4x^2+5a^2+4z-60=0$; 3) $2y-2z-2=0$. **912.** **1)** $\begin{cases}8x^2+4y^2-36x+16y-3=0,\\ z=0;\end{cases}$ **2)** $\begin{cases}2x-2z-7=0,\\ y=0;\end{cases}$
3) $\begin{cases}4y^2+8z^2+16y+20z-31=0,\\ x=0.\end{cases}$ **913.** $x-2y+3z+3=0$. **914.** $5x-3z=0$ **915**. $2x-y-z-6=0$
916. $x-y-3z+2=0$. **917**. $x+4y+7z+16=0$. **919.** $9x-y+7z-40=0$. **921.** $3x+3y+z-8=0$.
923. **1)** $n=\{2;-1;-2\}, n=\{2\lambda;-\lambda;-2\lambda\}$. **927.** 1)6;2) −19;3) $-\frac{1}{7}$. **928.1)** $\frac{1}{3}\pi\ \frac{2}{3}\pi$; **2)** $\frac{1}{4}\pi\ \frac{3}{4}\pi$ **; 3)** $\frac{\pi}{2}$; **4)** $\arccos\frac{2}{15}$ **;**
$\pi-\arccos\frac{2}{15}$. **929.** $5x-3y+2z=0$. **930.** $2x-3z-27=0$. **931.** $7x-y-5z=0$. **932.** $x+2z-4=0$.
934. $4x-y-22-9=0$. **936.** $x=1$; $y=-2$, $2=2$. **939.** 1) $a\neq 7$; 2) $a=7$, $b=3$; 3) $a=7$, $b\neq 3$.
940. 1) $z-3=0$; 2) $y+2=0$; 3) $x+5=0$. **941.** 1) $2y+z=0$; 2) $3x+z=0$; 3) $4x+3y=0$.
942. 1) $y+2+10=0$; 2) $x-z-1=0$; 3) $5x+y-13=0$. **943.** (12; 0; 0), (0; –8; 0), (0; 0; –6).
944. $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-2}=1$. **945.** $a=-4$, $b=3$, $c=\frac{1}{2}$. **946.** 240 кв. бірл. **947.** 8 куб. бірл.
948. $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{2}=1$. **949.** $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$. **950.** $x+y+z+5=0$. **951.** $2x-21y+2z+88=0$, $2x-3y-22+12=0$.
952. $x+y+2-9=0$, $x-y-2+1=0$, $x-y+z-3=0$, $x+y-z-5=0$. **953.** $2x-y-3z-15=0$.
954. $2x-3y+z-6=0$. **955.** $x-3y\ 22+2=0$. **957.** 1) $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-6=0$; 2) $-\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{2}{7}z-3=0$;
3) $\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{6}{7}z-\frac{11}{14}=0$; 4) $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-\frac{11}{14}=0$; 5) $-\frac{5}{13}y+\frac{12}{13}z-2=0$; 6) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}z=0$;

7) $-y-2=0$; 8) $x-5=0$; 9) $z-3=0$; 10) $z-\frac{1}{2}=0$. **958.** 1) $\alpha=60°$, $\beta=45^0$, $\gamma=60°$, $\rho=5$; 2) $\alpha=120°$, $\beta=60°$, $\gamma=45°$, $\rho=8$; 3) $\alpha=45°$, $\beta==90°$, $\gamma=45°$, $\rho=3\sqrt{2}$; 4) $\alpha=90°$, $\beta=135°$; $\gamma=45°$, $\rho=\sqrt{2}$, 5) $\alpha=150°$, $\beta=120°$, $\gamma=90°$, $\rho=5$; 6) $\alpha=90^0$, $\beta=90^0$, $\gamma=0°$, $\rho=2$; 7) $\alpha=180°$, $\beta=90°$, $\gamma=90°$, $\rho=\frac{1}{2}$; 8) $\alpha=90°$, $\beta=180°$, $\gamma=90°$, $\rho=\frac{1}{2}$; 9) $\alpha=\arccos\frac{1}{3}$, $\beta=\pi-\arccos\frac{2}{3}$, $\gamma=\arccos\frac{2}{3}$, $\rho=2$; 10) $\alpha=\pi-\arccos\frac{2}{7}$ $\beta=\pi-\arccos\frac{3}{7}$, $\gamma=\arccos\frac{6}{7}$, $\rho=\frac{4}{7}$. **959.** 1) $\delta=-3$, $d=3$; 2) $\delta=1$, $d=1$; 3) $\delta=0$, $d=0$ 4) $\delta=-2$, $d=2$; 5) $\delta=-3$, $d-3$. **960.** $d=4$. **964.** 1) $d=2$; 2) $d=3{,}5$; 3) $d=6{,}5$; 4) $d=1$; 5) $d=0{,}5$; 6) $d=\frac{5}{6}$. **965.** 8 куб.бірл. **969.** $4x-4y-2z+15=0$. **970.** $6x+3y+2z+11=0$. **971.** $2x-2y-z-18=0$, $2x-2y-z+12=0$. **972.** 1) $4x-y-2z-4=0$; 2) $3x+2y-z+1=0$; 3) $20x-12y+4z+13=0$. **973.** 1) $4x-5y+z-2=0$, $2x+y-3z+8=0$; 2) $x-3y-1=0$, $3x+y-2z-1=0$; 3) $3x-6y+7z+2=0$, $x+4y+3z+4=0$. **978.** $8x-4y-4z+5=0$. **979.** $23x-y-z-24=0$. **980.** $x-y-z-1=0$. **981.** $x+y+2z=0$. **982.** $\begin{cases}5x-7y-3=0,\\ z=0;\end{cases}$ $\begin{cases}5x+2z-3=0,\\ y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}7y-2z+3=0,\\ x=0;\end{cases}$ **983.** $\begin{cases}3x-y-7z+9=0,\\ 5x+2z=0;\end{cases}$ **984.** (2;–1;0); $(1\frac{1}{3};0;-\frac{1}{3})$. ***986.*** *1) D=– 4; 2) D=9; 3) D=3* **989.** 1) $2x+15y+7z+7=0$; 2) $9y+3z+5=0$; 3) $3x+3z-2=0$; 4) $3x-9y-7=0$; **990.** 1) $23x-2y+21z-33=0$; 2) $y+z-18=0$; 3) $x+z-3=0$; 4) $x-y+15=0$. **991.** $5x+5z-8=0$. **992.** $\alpha(5x-2y-z-3)+\beta(x+3y-2z+5)=0$. **993.** $11x-2y-15z-3=0$. **994.** $\alpha(5x-y-2z-3)+\beta(3x-2y-5z+2)=0$. **995.** $9x+7y+8z+7=0$. **996.** $x-2y+z-2=0$, $x-5y+4z-20=0$. **999.** $l=-5$, $m=-11$. **1000.** $3x-2y+6z+21=0$, $189x+28y+48z-591=0$. **1001.** $2x-3y-6z+19=0$, $6x-2y-3z+18=0$. **1002.** $4x-3y+6z-12=0$, $12x-49y+38z+84=0$. **1003.** $4x+3y-5=0$, $5x+3z-7=0$, $5y-4z+1=0$ **1004.** $\begin{cases}7x-y+1=0,\\ z=0;\end{cases}$ $\begin{cases}5x-z-1=0,\\ y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}5y-7z-12=0,\\ x=0;\end{cases}$.

1005. $x-8y+5z-3=0$. **1006.** $\begin{cases}2x-4y-8z+1=0,\\ 2x-y+z-1=0;\end{cases}$ **1007.** 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$; 3) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{0}$; 5) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{1}$.

1008. 1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$; 2) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$ 3) $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-3}{-2}$; 4) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{0}$.

1009. 1) $x=2t+1$, $y=-3t-1$, $z=4t-3$; 2) $x=2t+1$, $y=5t-1$, $z=-3$; 3) $x=3t+1$, $y=-2t-1$, $z=5t-3$. **1010.** 1) $x=t+2$, $y=-2t+1$, $z=t+1$ 2) $x=t+3$, $y=-t-1$, $z=t$; **3)** $x=0$, $y=t$, $z=-3t+1$. **1011.** (9;–4;0), (3;0;–2), (0;2;–3). **1012.** $x=5t+4$, $y=-11t-7$, $z=-2$. **1013.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+7}{-8}$ **1014.** $\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{-7}$

1015. x=3t+3y =15t +1z =19t–3. a =–2i+11j + 5k; a=–2λi+11λj +5λk **1018.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-7}=\frac{z}{4}$

1019. $\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{-7}$. **1020.1)** $x=t+1$, $y=-7t$, $z=-19t-2$; **2)** $x=-t+1$, $y=3t+2$, $z=5t-1$.

1023. 60°. **1024.** 135°. **1025.** $\cos\varphi=\pm\frac{4}{21}$ **1027.** $l=3$. **1029** $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{6}$

1030 $\frac{x+4}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-3}{-1}$. **1031.** $x=2t-5$, $y=-3t+1$, $z=-4t$. **1032.** $v=13$. **1033.** $d=21$. **1034.** $x=3-6t$, $y=-1+18t$, $z=-5+9t$. **1035.** $x=-7+4t$, $y=12-4t$, $z=5-2t$. **1036.** $x=20-6t$, $y=-18+8t$, $z=-32+24t$; (2; 6; 40). **1037.** $x=-5+6t$, $y=4-12t$, $z=-5+4t$

1041. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+4}{5}=\frac{z+1}{3}$. **1042.** $\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}$. **1043.** *2x–3y+4z–1=0.* **1044.** *x+2y+3z =0***.**

1045. *m = –3.* **1046.** *C* = – 2**. 1047.** A = 3, D = – 23**. 1048.** *A = – 3, B =* $4\frac{1}{2}$**. 1049.** *l = – 6, C =* $\frac{3}{2}$**.**

1050. (3;–2;4) **1051.** Q(2;–3;2)**. 1052.** Q(4;1;–3)**. 1053.** (1;4;–7). **1060. .** *x* = 28 – 7,5*t*, *y* = – 30 + 8*t*, *z*=–27+ 6*t*; 1) P(–2;2;–3); 2) от t_1=0 до t_2 = 4; 3) M_0P *= 50.* **1061.** 3. **1062.** d = 7. **1063.** 1) 21; 2) 6; 3) 15. **1064.** *d =25.* **1065.** *9x+11y+5z–16=0.* **1068.** *4x+6y +5z –1=0.* **1070.** *2x– I6y – 13z + 31 =0.* **1072.***6x–20y–11z +1=0.* **1074.**(2;–3;–5). **1075.** Q(1;2;–2)**. 1076.** Q(l;–6;3)**. 1077.** *13x–14y+11+51=0***. 1079.** *x–8y – 13z + 9 = 0.* **1081.** $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z+4}{9}$. **1082.** *x = 8t – 3, y= – 3t – 1, z = – 4t + 2.* **1083.** 1) 13; 2) 3; 3) 7. **1084.** 1) $x^2+y^2+z^2=81$**;** 2) $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=4$; 3) $(x-4)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=36$; 4) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=18$; 5) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$; 6) $x^2+y^2+z^2=9$; 7) $(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=56$; 8) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49$; 9) $(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=81$

1085. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$ **;** $x^2+(y+1)^2+(z+5)^2=9$**. 1086.** *R = 5.* **1087.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=4$**. 1088.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=49$**.** **1089.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$**. 1090.** 1) *C*(3;–2;5), r =4; 2)C(–1; 3; 0), r = 3; 3) C (2; 1;–1), r = 5; 4) C(0; 0; 3), r = 3; 5) C (0;–10; 0), r =10. **1091.** *x = 5t – 1, y = –t + 3, z = 2t – 0,5.* **1092.** $\frac{x-\frac{1}{2}}{2}=\frac{y+\frac{3}{2}}{-3}=\frac{z+\frac{1}{2}}{4}$**.1098.** C(–1;2;3),R=8. **1099** $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36,\\ 2x-z-1=0.\end{cases}$

1100 $\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=65,\\ 18x-22y+5z-30=0.\end{cases}$ **1103.** *5x–8y +5z –7=0.* **1104.** x^2*+y +*z^2*– 10x+ 15y – 25z = 0.* **1105.** $x^2+y^2+z^2$ *+13x –9y +9z –14 =0.* **1106.** $x^2+(y+2)^2+z^2=41$*.* **1107.** *6x – 3y – 2z – 49 = 0.* **1108.** (2; – 6; 3). **1109.** *a = ± 6.* **1110.** *2x – y – z + 5 = 0.* **1111.** $x_1x+y_1y+z_1z=r^2$*.* **1112.** $A^2R^2+B^2R^2+C^2R^2=D^2$*.* **1113.** $(x_1-\alpha)(x-\alpha)+(y_1-\beta)(y-\beta)+(z_1-\gamma)(z-\gamma)=r^2$. **1114.***3x – 2y + 6z – 11=0, 6x + 3y + 2z – 30 = 0.* **1115.** *x + 2y – 2z – 9 = 0, x + 2y – 2z + 9 = 0.* **1116.** *4x + 3z – 40 = 0, 4x + 3z + 10 = 0.* **1117.** *4x + 6y + 5z – 103 = 0, 4x + 6y + 5z + 205 = 0.* **1118.** *2x –3y +4z –10=0, 3x –4y +2z –10 = 0.* **1120.** *x – y – z – 2 = 0.* **1122.** *Ax + By + Cz + D = 0.*

1123. $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$. **1124.** $d=|r_1n-p|$; $d=|x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p|$.

1125. $(r_2-r_1)(r-r_1)=0$; $(x_2-x_1)(x-x_1)+(y_2-y_1)(y-y_1)+(z_2-z_1)(z-z_1)=0$**.**

1126. $a_1a_2(r-r_0)=0$**;** $\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}$=0. **1127.** $(r_2-r_1)(r_3-r_1)(r-r_1)=0$; $\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}$ *=0.*

1128. $n_1n_2(r-r_0)=0$; $\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}$ =0 **1131.** $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$. **1132.** $[(r-r_1)(r_2-r_1)]=0$; $[r(r_2-r_1)]=[r_1r_2]$, $r=r_1+(r_2-r_1)t$. **1133.** $a(r-r_1)=0$**;** $l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0$**.**

1134. $a_1a_2(r-r_0)=0$**. 1135.** $n_1n_2(r-r_0)=0$**. 1136.** $r=r_0+nt$**,** $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$**.**

1137. $r=r_0+[n_1n_2]t$, $\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}$. **1138.** $\begin{cases}r_0n+D=0,\\ an=0\end{cases}$ $\begin{cases}Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,\\ Al+Bm+Cn=0.\end{cases}$

1139. $a_1a_2(r-r_0)=0$**. 1140.** $a_1a_2(r_2-r_1)=0.$ **1141.** $r_0-\frac{r_0n+D}{an}a$; $x=x_0-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}m$,

$x=y_0-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}m$, $z=z_0-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}m$, **1142.** $r_1-\dfrac{r_1n+D}{n^2}n$, $x=x_1-\dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A^2+B^2+C^2}A$, $y=y_1-\dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A^2+B^2+C^2}B$, $z=z_1-\dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A^2+B^2+C^2}C$. **1143.** $r_0+\dfrac{(r_1-r_0)a}{a^2}a$, $x=x_0+\dfrac{(x_1-x_0)l+(y_1-y_0)m+(z_1-z_0)n}{l^2+m^2+n^2}l$ **1144.** $d=\dfrac{\sqrt{[(r_1-r_2)a]^2}}{\sqrt{a^2}}$, $d=\dfrac{\sqrt{\left|\begin{matrix}y_1-y_0 z_1-z_0\\ mn\end{matrix}\right|^2+\left|\dfrac{z_1-z_0x_1-x_0}{nl}\right|^2+\left|\dfrac{x_1-x_0y_1-y_0}{lm}\right|^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$

1145. $d=\dfrac{|a_1a_2(r_1-r_2)|}{\sqrt{[a_1a_2]^2}}$ **:** $d=\dfrac{\text{абс.вел.}\begin{vmatrix}l_1l_2x_2-x_1\\ m_1m_2y_2-y_1\\ n_1n_2z_2-z_1\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix}m_1n_1\\ m_2n_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}n_1l_1\\ n_2l_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}l_1m_1\\ l_2m_2\end{vmatrix}^2}}$. **1147.** $\dfrac{R}{|a|}a$ **;** $-\dfrac{R}{|a|}a$ **;** $x_1=\dfrac{Rl}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ **,**

$y_1=\dfrac{Rm}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ **,** $z_1=\dfrac{Rn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ **;** $x_2=-\dfrac{Rl}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ **,** $y_2=-\dfrac{Rm}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ **,** $z_2=-\dfrac{Rn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ **. 1148.** $r_0+\dfrac{R}{|a|}a$ және $r_0-\dfrac{R}{|a|}a$ **;** $x_1=x_0+\dfrac{Rl}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ **,** $y_1=y_0+\dfrac{Rm}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ **,** $z_1=z_0+\dfrac{Rn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ және $x_2=x_0-\dfrac{Rl}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ **,**

$y_2=y_0-\dfrac{Rm}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ **,** $z_2=z_0+\dfrac{Rn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ **. 1149.** $(r_1-r_0)(r-r_0)=R^2$. **1150.** $(r-r_1)^2=\dfrac{(r_1n+D)^2}{n^2}$;

$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\dfrac{(Ax_1+By_1+Cz_1+D)^2}{A^2+B^2+C^2}$. **1151.** $\dfrac{nr}{|n|}-R=0$ **,** $\dfrac{nr}{|n|}+R=0$ **;** $\dfrac{Ax+By+Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}-R=0$ **,**

$\dfrac{Ax+By+Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+R=0$ **. 1152.** $\dfrac{a(r-r_0)}{|a|}-R=0$ **,** $\dfrac{a(r-r_0)}{|a|}+R=0$ **;** $\dfrac{l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}-R=0$ **,** $\dfrac{l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}+R=0$ **. 1153.** 3, $\sqrt{3}$; (2;3;0), (2;–3;0), (2;0; $\sqrt{3}$), (2;0; $-\sqrt{3}$). **1154.** 4,3; (4;0;–1), (–4; 0; –1). **1155.** 15; (0; –6; $-\dfrac{3}{2}$).**1162.** (9; 5; –2). **1163.** (3; 0; –10). **1164.** (6; –2; 2).

1165. $m=\pm18$. **1166.** *2x – y – 2z –* 4 = 0. **1167.** *x – 2y + 2z–1=0, x– 2y + 2z + 1 = 0;* $\dfrac{2}{3}$. **1168.**

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2+z^2}{25}=1.$ **1169.** $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{9}=1.$ **1170.** $q_1=\dfrac{2}{5}$**,** $q_2=\dfrac{4}{5}$**. 1172.** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2+z^2}{b^2}=1$**. 1173.** $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

1178. $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z.$ **1180.** а) (3; 4; – 2); (6; – 2; 2); б) (4; – 3; 2) **1181.** $\begin{cases}2x-12y-z+16=0,\\ x-2y+4=0;\end{cases}$

$\begin{cases}2x-12y-z+16=0,\\ x-2y-8=0;\end{cases}$ **1182.** $\begin{cases}x+2z=0,\\ x-5=0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x-5z=0,\\ y+4=0;\end{cases}$ **1183.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-1}{-2}$**,** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+9}{12}=\dfrac{z+3}{2}$**.**

1184. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z}{-2}$, $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-4}$. **1185.** $\arccos\dfrac{1}{17}$. **1186**. 1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$ =0, 2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ **=0** ; 3) $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$. **1188**. $x^2+y^2-z^2=0$. **1189.** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{(z-c)^2}{c^2}=0.$

1190. 3 x^2– 5y^2+7z^2– 6*xy*+10*xг* – 2*yz*–4*x* + 4*y* – 4*z* + 4 = 0. **1191.** $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{49}=0.$**1192.** x^2 – 3y^2 + z^2 = *0*. **1193.** 35x^2+35y^2–52z^2–232*xy* – 16*xz*+116*yz*+232*x*–70*y*–116*z*+35=0. **1194.** *xy +–xz +yz = 0* – ось **1195.** *9x²–16y² –16z² –90x+225=0.***1196.** *x²+4y²–4z²+4xy +12xz–6yz =0.* **1197.** 4x²– 15y²– 6z² *–12xz—36x +24z +66 = 0.* **1198**. *16x² + 16y² + 13x² – 16xz+ 24yz + 16x – 24y — 26z –23 = 0.* **1199**. *x²–y² –2xz+2yz+ x +y –2z= 0.* **1200.** *5x² +5y² + 2z² – 2xy + 4xz + 4yz – 6 = 0.* **1201.** 45л–² + 72y² + 45г² + 36xj;+ + *Т2xz – Щг–\–* 54л– + 216y –54г – 567 = 0. **1202.** *5x² + 10y ²+ 13z² + 12xy – 6xг + 4yz + 26x+20y – 38г + 3 = 0.* **1203**. *x:² + 4y² +5z ²– 4xy – 125 = 0***.**

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

Негізгі:

1. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия ч. I М. Просвещение 1986г. – 336 с.
2. Ильин В. А. Поздняк Э. Г. Аналитическая геометрия М. Наука 1984. – 232 с.
3. Моденов П. С. Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. М. Наука 1976. – 384 с.
4. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М. Наука 1986. – 223 с.
5. Базылев В. Т. Дуничев К. И. Иваницкая В. П. Геометрия 1. Учебное пособие для студентов I курса. М. Просвещение 1974. – 351с.
6. Атанасян Л. С., Атанасян В. А. Сборник задач по геометрии. Ч. I. М. Просвещение. 1973. – 256 с.
7. Привалов И.И. Аналитическая геометрия.М. Наука 1966. – 272с.

Қосымша:

8. Погорелов А. В. Геометрия М. Наука 1983. – 288 с.
9. Цупербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии М. Наука 1970 – 336 с.
10. Бахвалов С. В., Моденов П. С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М. Наука. 1964. – 440 с.
11. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М. Наука 1975. – 272с.
12. Александров П.С. Курс аналитической геометрии. – М., Наука, 1979.
13. Рубан П.И., Гармаш Е.Е. Руководство к решению задач по аналитической геометрии. – М. Высшая школа 1963 г. – 314 с.
14. Рябушко А.П. и др. Сборник индивидуальных заданий часть 1.Минск. Высшая школа 1990 Минск. Просвещение. 1958, 438 с.