КОСТАНАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Материалы Студенческой научно-практической конференции "Модернизация современного образования"

14 апреля 2017 г.

г. КОСТАНАЙ, 2017 г.

УДК 37.031.2(063)
ББК 74.2
М74

М74 Модернизация современного образования. Материалы студенческой научно-практической конференции, 14 апреля 2017 г., г. Костанай. – 279 с.

ISBN 978-601-7934-00-2

В сборнике представлены научные, научно-методические статьи, написанные по материалам докладов студенческой научно-практической конференции, проходившей в Костанайском государственном педагогическом институте 14 апреля 2017 года. В конференции приняли участие студенты Естественно-математического факультета, более 80 статей по 7 специальностям.

Материалы конференции содержат фундаментальные, научные, прикладные проблемы исследований по направлениям: биология, химия, математика, физика, география, информатика, проблемы образования и воспитания в общеобразовательных учреждениях.

Материалы конференции предназначены для бакалавров, магистрантов, и других категорий исследователей.

Научные редакторы: д.и.н., профессор Абиль Е.А., к.т.н., доцент Сухов М.В., к.т.н., доцент Еслямов С.Г., доцент Тобылов К.Т., к.э.н.

ISBN 978-601-7934-00-2

СОДЕРЖАНИЕ

Содержание

«СТАЦИОНАР ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ҚОЙЫЛҒАН ШЕКТІК ЕСЕПТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ШЕШУДІҢ ӘДІСТЕРІ»

Касымова А. Г., ф.-м.к., доцент
Әлшериев Б. С., Математика 4-курс

Сұйық динамикасындағы, электр және магнетизм, механика, оптика, жылу өткізгіштік салаларында көптеген физикалық құбылыстар дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер көмегімен өрнектеледі.

Математикалық физика теңдеулерінің көпшілігі - дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер.

Математикалық физика теңдеулерінің негізгі үш типі бар: гиперболалық, параболалық және эллипстік типті теңдеулер.Бұл айтылған теңдеулерді уақытқа байланысты екі түрге бөлуге болады. Олар стационар емес теңдеулер (уақытқа байланысты) және стационар теңдеулер (уақытқа байланыссыз). Міне, солардың бірі - стационар теңдеулер (эллипстік типті) теңдеулер.Стационар теңдеулердің ішінде физикалық құбылыстарды зерттеуде математикалық моделі дербес туындылы дифференциалдық теңдеуге келтірілетін теңдеулердің бірі - Лаплас, Гелмгольц теңдеулері.

Сондай - ақ табиғаттың физикалық заңдарын көбіне дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер арқылы тұжырымдауға болады. Мысал ретінде Максвелл теңдеуін, Ньютонның қозғалыс теңдеуін, Стокс - Новье теңдеуін, кванттық механикадағы Шредингер теңдеуін келтіруге болады. Бұл барлық теңдеулерде физикалық құбылыстар кеңістік және уақыттық туындылар тілінде суреттеледі.

Дөңгелек, сақина және жарты жазықтықтағы Лаплас теңдеуі үшін қойылған Дирихле есебінің негізінде Гелмгольц теңдеуі үшін шектік есептердің қойылымын әртүрлі облыстар үшін тұжырымдап және олардың шешімін табу [1].

Гелмгольц теңдеуі үшін шектік есептерді шешуде айнымалыларды ажырату әдісін қарастырамыз. Екі айнымалылар жағдайда ішкі және сыртқы дөңгелектер және сақина үшін шектік есептер зерттеледі. Гелмгольц теңдеу үшін шектік есептерді шешу әдісі, екінші тарауда қарастырылған Лаплас теңдеу үшін шектік есептерді шешу әдісіне өте ұқсас. Сондықтан алдымен полярлы координаталар жүйесінде Гелмгольц теңдеуінің дербес шешімдерін қарастырып, содан кейін олардан сәйкес облыстар үшін шектік есептердің шешімін құрамыз.

(r,φ) полярлы координаталар жүйесінде, шешімі:

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \tag{1}$$

түрінде болатындай Гелмгольц теңдеуін:

$$\Delta u + cu = 0, \; c = const \tag{2}$$

қарастырайық.

(1) формуланы (2) теңдеуге қойып және айнымалыларды ажыратып, келесі теңдеуді аламыз:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right) + cr^2R}{R(r)} \equiv -\frac{\Phi''}{\Phi(\varphi)} = \lambda .$$

Бұдан $R(r)$ функциясы үшін

$$r^2R'' + rR' + \left(cr^2 - \lambda\right)R = 0 \tag{3}$$

және $\Phi(\varphi)$ функциясы үшін келесі теңдеуді аламыз:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0 .$$

φ айнымалысы циклді болғандықтан, Φ функциясы периоды 2π болатын периодты функция. Демек, $\Phi(\varphi)$ функциясын анықтау үшін периодты шартпен Штурм - Лиувилдің есебі қарастырылады

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \; 0 \le \varphi \le 2\pi ,$$

$$\Phi(\varphi+2\pi)\equiv\Phi(\varphi) \text{ кез келген } \varphi \text{ үшін } \Phi(\varphi)\not\equiv 0.$$

Бізге белгілі, оның шешімі келесі түрде беріледі:

$$\Phi_n(\varphi)=\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases} \quad \lambda=\lambda_n=n^2, \quad n=0,1,\dots,\infty$$

Табылған λ_n мәнді (3) теңдеуге қойып, келесі теңдеуді аламыз:

$$r^2R''+rR'+\left(cr^2-n^2\right)R=0.$$

Енді дербес жағдайда $c>0$ және $c<0$ қарастырамыз. $c=k^2>0$ болсын

$$r^2R''+rR'+\left(k^2r^2-n^2\right)R=0$$

берілген теңдеудің жалпы шешімін келесі түрде жазып алуға болады:

$$R=R_n(r)=C_1J_n(kr)+C_2N_n(kr)$$

немесе

$$R=R_n(r)=A_1H_n^{(1)}(kr)+A_2H_n^{(2)}(kr),$$

мұндағы $J_n(x)$, $N_n(x)$, $H_n^{(1)}(x)$, $H_n^{(2)}(x)$ - Бесселдің, Нейманнің, Ханкелдің сәйкесінше n ретті бірінші және екінші текті функциялары.

$$\Delta u+ku=0.$$

Сонымен, яғни $c=k^2$ болғанда Гелмгольц теңдеуінің шешімдері келесі жүйемен беріледі:

$$J_n(kr)=\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases} \tag{45}$$

$$N_n(kr)=\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases} \tag{46}$$

$$H_n^{(1)}(kr)=\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases} \tag{47}$$

$$H_n^{(2)}(kr)=\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi.\end{cases} \tag{48}$$

$r=0$ болғанда $J_n(kr)=\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi\end{cases}$ шешім шектелген, $r\to 0$ болғанда (46) - (48) шешімдер шектелмеген. $r\to\infty$ болғанда

$$u_n^{(1)}(r,\varphi)=H_n^{(1)}(kr)=\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi\end{cases}$$

шешім келесі түрде сәулелену шартын қанағаттандырады:

$$\frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial r}-iku_n^{(1)}=o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),$$

ал келесі шешім

$$u_n^{(2)}(r,\varphi)=H_n^{(2)}(kr)=\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi\end{cases}$$

келесі түрде сәулелену шартын қанағаттандырады:

$$\frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial r}-iku_n^{(2)}=o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right).[2]$$

Енді $c=-\chi^2<0$ жағдайды қарастырайық. Теңдеудің жалпы шешімін

$$r^2R''+rR'+\left(\chi^2r^2+n^2\right)R=0$$

келесі түрде жазып алуға болады:

$$R=R_n(r)=C_1I_n(\varphi r)+C_2K_n(\varphi r),$$

мұндағы $I_n(x)$ және $K_n(x)$ - Инфелдің және Макдоналдің n ретті сәйкес функциялары. Демек,

$$\Delta u - \chi^2 u = 0$$

теңдеуі жазықтықта келесі шешімдер жүйесімен беріледі:

$$I_n(\chi r) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \qquad K_n(\chi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases}$$

мұндағы

$$I_n(\chi r) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \qquad n = 0,1,...,\infty. \tag{49}$$

$r = 0$ болғанда шектелген, ал $r \to \infty$ ұмтылғанда шексіз өседі.

$$K_n(\chi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \tag{50}$$

шешімі $r = 0$ болғанда шенелмеген және $r \to \infty$- те нөлге бірқалыпты ұмтылады.

Полярлы координаталар жүйесінде Гелмгольц теңдеуінің дербес шешімін құрып, келесі түрдегі шектік есептерді қарастырайық.[3]

Алдымен ішкі дөңгелек үшін шектік есептерінен бастаймыз:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ дөңгелектің ішінде } 0 \le r \le a, \tag{51}$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial r} + \beta u\Big|_{r=a} = f(\varphi), \ |\alpha| + |\beta| \ne 0, \ \alpha, \beta = const. \tag{52}$$

Бұл есептің шешімін (45) дербес шешім бойынша $r = 0$ болғанда шектелген қатар түрінде құрамыз:

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} J_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr)\{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\}, \tag{53}$$

оның коэффициенттері (52) шектік шарттан анықталады.

(53) теңдеуді (52) шектік шартқа қойып және $f(\varphi)$ функцияны тригонометриялық қатарға жіктеп, аламыз:

$$A_n \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial r} J_n(kr) + \beta J_n(kr) \right\}\Big|_{r=a} = f_n^{(c)}, \tag{54}$$

$$B_n \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial r} J_n(kr) + \beta J_n(kr) \right\}\Big|_{r=a} = f_n^{(s)}, \tag{55}$$

мұндағы $f_n^{(c)}$ және $f_n^{(s)}$ - $f(\varphi)$ функцияның Фурье коэффициенттері:

$$\begin{aligned} f_n^{(c)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \\ f_n^{(s)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi. \end{aligned} \tag{56}$$

Егер барлық $n = 0,1,...,\infty$ болғанда

$$\alpha k J_n'(ka) + \beta J_n(ka) \ne 0,$$

онда (45) және (46) теңдеулерден барлық A_n және B_n коэффициенттері бір мәнді анықталып, (47) шешім келесі түрде жазылады:

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{2} f_0^{(c)} \frac{J_0(kr)}{\alpha k J_n'(ka) + \beta J_n(ka)} + \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(kr)}{\alpha k J_n'(ka) + \beta J_n(ka)} \left\{ f_0^{(c)} \cos n\varphi + f_0^{(s)} \sin n\varphi \right\} \end{aligned} \tag{57}$$

Бұл жағдайда (51) және (52) шектік есептің шешімі бар және жалғыз.

Егер $n = n_0$ болғанда $\alpha kJ_n'(ka) + \beta J_n(ka) = 0$, онда арақатынас:

$$A_{n_0}\left\{\alpha kJ_n'(ka) + \beta J_n(ka)\right\} = f_{n_0}^{(c)}, \tag{58}$$

$$B_{n_0}\left\{\alpha kJ_n'(ka) + \beta J_n(ka)\right\} = f_{n_0}^{(s)} \tag{59}$$

шарты

$$\alpha kJ_n'(ka) + \beta J_n(ka) = 0$$

келесі шартқа эквивалентті: дөңгелек үшін Штурм – Лиувилль есептің k^2 меншік мән болады:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ дөңгелек ішінде } 0 \le r < a, \tag{60}$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial r} + \beta u\Big|_{r=a} = 0,\ u \not\equiv 0$$

сонымен қатар $k^2 = \lambda_m^{(n_0)}$.[4]

Егер k^2 дөңгелек үшін Лаплас операторының меншік мәні болса, онда (51), (51) шектік есептің шешімі жоқ немесе шешімі бар болса, ол жалғыз емес. Егер $\left|f_{n_0}^{(c)}\right| + \left|f_{n_0}^{(s)}\right| \ne 0$, онда (51), (51) шектік есептің шешімі жоқ. Егер $f_{n_0}^{(c)} = f_{n_0}^{(s)} \ne 0$, онда (58), (59) арақатынастан A_n және B_n барлық коэффициенттер $n \ne n_0$ болғанда бірмәнді анықталады, ал A_{n_0} және B_{n_0} коэффициенттері еркін болып қалады. Сондықтан бұл жағдайда шектік есептің шешімі

$$u = \left(A_{n_0}\cos n_0\varphi + B_{n_0}\sin n_0\varphi\right)J_{n_0}(kr) + \\ + \sum_{n \ne n_0} \frac{J_n(kr)}{\alpha kJ_n'(ka) + \beta J_n(ka)}\left\{f_n^{(c)}\cos n\varphi + f_n^{(s)}\sin n\varphi\right\}, \tag{61}$$

мұндағы A_{n_0} және B_{n_0} - тұрақтылар [5].

Қоғамтану, физика, техника, экономика және де тағы басқа ғылым салалары көптеген есептерді шешуде, әсіресе, соңғы уақытта математикалық физика саласына жүгінеді.

Жұмыстың барысында бірінші бөлімде гармоникалық функциялар және оның қасиеттер зерттелінді, екінші бөлімде Лаплас теңдеуі үшін қойылған есептерді шешу, үшінші бөлімде Гелмгольц теңдеуі үшін қойылған есептерді шешу әдістері келтірілді.

Математикалық физика курсын білген маман дүниенің біртұтас екендігіне көзін жеткізеді, өйткені математикалық физиканың пәнаралық байланысы өте зор.

Сондықтан дипломдық жұмыстың негізгі мақсатына жету үшін математикалық физика теңдеулерінің негізгі типтердің бірі - эллипстік типті теңдеу қарастырылған. Эллипстік типті теңдеулердің ішінен Лаплас және Гелмгольц теңдеулерін терең зерттеліп, аса маңыздылығы көрсетілген.

ӘДЕБИЕТТЕР:

1 Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функций. М, Наука, 1984 - 250 с.

2 Бакельман И.Я. Геометрические методы решения эллиптических уравнений. - М., Наука, 1965 - 340с.

3 Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. - М., Наука, 1976 - 238 с.

4 Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. - М., Наука, 1985 - 464 с.

5 Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. - М., Наука, 1980 - 688с.