Демисенов Б.Н. [1], Божко С.А. [2], Таев Р.З. [3]

1. Научный руководитель, кандидат физико-математических наук, доцент

2. Студент 4 курса, кафедра физико-математических и общетехнических дисциплин, специальность «Математика»

3. Студент 4 курса, кафедра физико-математических и общетехнических дисциплин, специальность «Математика»

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ЛИНЕЙНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМ, НА ПРИМЕРЕ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЯ КУБА

В данной статье реализован геометрический подход к линейным представлениям, с помощью общих сведений о представлениях, которые взаимосвязаны с представлениями конечных групп. На примере вращения куба показано, что действие s_* - является линейным представлением, которое задано следующим образом $s_*: S(X) \to GL(K)$.

Подробно рассмотрим группу G вращения куба и ее естественное действие s на множестве X граней куба. Для разбора данного примера нам понадобится ряд определений и теорем из линейной алгебры, которые имеют ключевое значение в данной статье. Более подробно с общими сведениями можно ознакомиться в литературе [1], [2], с представлениями конечных групп и другими специальными представлениями в [3], [4], [5].

Пусть $X -$ произвольное множество и $S(X)$ – группа его биективных отображений на себя. Если $X = \{1,2, \dots, n\}$, то $S(X) = S_n$

Определение 1: Всякий гомоморфизм $s: G \to S(X)$ называется действием группы G на множестве X.

Определение 2: Пусть K- некоторое поле и $K[X]$ – пространство функций на множестве X со значениями в K. Каждому $\sigma \in S(X)$ можно сопоставить линейное преобразование σ_* пространства $K[X]$:

$$(\sigma_* f)(x) = f(\sigma^{-1}x) \quad , \quad (f \in K[X]). [3, \text{стр. } 13]$$

При этом $(\sigma\tau)_* = \sigma_*\tau_*$, т.е. мы получаем линейное представление группы $S(X)$. В самом деле,

$$((\sigma\tau)_* f)(x) = f((\sigma\tau)^{-1}x) = f(\tau^{-1}\sigma^{-1}x),$$
$$(\sigma_*\tau_* f)(x) = (\tau_* f)(\sigma^{-1}x) = f(\tau^{-1}\sigma^{-1}x).$$

Если теперь задано $s: G \to S(X)$, то можно определять линейное представление s_* группы G в пространстве $K[X]$, положив:

$$s_*(\mathrm{g}) = s(\mathrm{g})_*$$

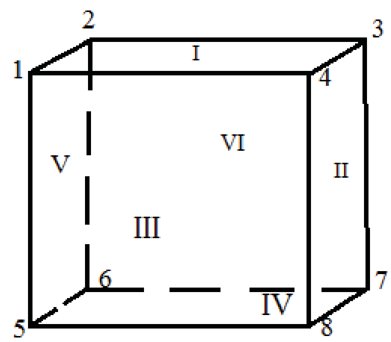
Пусть $X = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \mathrm{VI}\}$- грани куба, $s(\mathrm{g}): G \to S(X)$, где g- вращения куба.

Пространство $K[X]$ в этом случае шестимерно, т.е. $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + +\alpha_4 f_4 + \alpha_5 f_5 + \alpha_6 f_6$. В качестве базисных элементов взяты функции $f_1, \dots, f_6$, каждая из которых равна 1 на одной грани куба и 0 на остальных. В этом базисе операторы $s_*(g)$ операторы запишутся невырожденными матрицами, так как $s_*(g): G \to GL(K[X]), s(g)_*: S(X) \to GL(K[X])$, в данном случае $GL(K[X]) \cong GL_6(K)$. Например: если g – поворот на $\frac{2\pi}{3}$ вокруг оси, проходящей через центр куба и одну из его вершин, то при подходящей нумерации базисных функций

$$s_*(g) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

С помощью представленных рассуждений, можно перейти к записи поворотов куба, представив переходы вершин и граней.

Пусть нам дан куб с вершинами (1,2,3,4,5,6,7,8), грань куба с вершинами (1234) обозначим через – **I,** с вершинами (4378)- **II,** с вершинами (1485)-**III,** с вершинами (5678)-**IV,** с вершинами (1265) **–V,** с вершинами (2376)-**VI.**



Пусть b_i –подстановка, которая показывает переход вершин куба при определенном повороте, c_i - подстановка, которая показывает переход граней куба, $i = \overline{0,23}$.

g –поворот на 360°

$b_0\binom{12345678}{12345678} \to c_0\binom{123456}{123456}$

g – поворот на 90°, 180°, 270°, вокруг оси, проходящей через центры симметрий $\mathrm{I}-$й и $\mathrm{IV}-$й граней. (Кратко: относительно граней (IиIV).

$b_1\binom{12345678}{23416785} \to c_1\binom{123456}{135462}$

$b_2\binom{12345678}{34127856} \to c_2\binom{123456}{156423}$

$b_3\binom{12345678}{41238567} \to c_3\binom{123456}{162435}$

g – поворот на 90°, 180°, 270°, относительно граней (IIиV)

$b_4\binom{12345678}{26731584} \to c_4\binom{123456}{621354}$

$b_5\binom{12345678}{65872143} \to c_5\binom{123456}{426153}$

$b_6\binom{12345678}{51486237} \to c_6\binom{123456}{324651}$

g – поворот на 90°, 180°, 270°, относительно граней (IIIиVI)

$b_7\binom{12345678}{43781265} \to c_7\binom{123456}{243516}$

$b_8\binom{12345678}{87654321} \to c_8\binom{123456}{453126}$

$b_9\binom{12345678}{56218734} \to c_9\binom{123456}{513246}$

g – поворот на 120°, 240°, вокруг оси, проходящей через центр куба и вершины 4 и 6

$b_{10}\binom{12345678}{37842651} \to c_{10}\binom{123456}{231564}$

$b_{11}\binom{12345678}{85147623} \to c_{11}\binom{123456}{312645}$

$g-$ поворот на 120°, 240° вокруг оси проходящей через центр куба и вершины 1 и 7

$b_{12}\begin{pmatrix}12345678\\14852376\end{pmatrix} \to c_{12}\begin{pmatrix}123456\\345612\end{pmatrix}$

$b_{13}\begin{pmatrix}12345678\\15624873\end{pmatrix} \to c_{13}\begin{pmatrix}123456\\561234\end{pmatrix}$

$g-$ поворот на 120°, 240° вокруг оси проходящей через центр куба и вершины 2 и 8

$b_{14}\begin{pmatrix}12345678\\62157348\end{pmatrix} \to c_{14}\begin{pmatrix}123456\\534261\end{pmatrix}$

$b_{15}\begin{pmatrix}12345678\\32674158\end{pmatrix} \to c_{15}\begin{pmatrix}123456\\642315\end{pmatrix}$

g - поворот на 120°, 240° вокруг оси проходящей через центр куба и вершины 2 и 8

$b_{16}\begin{pmatrix}12345678\\67325841\end{pmatrix} \to c_{16}\begin{pmatrix}123456\\615342\end{pmatrix}$

$b_{17}\begin{pmatrix}12345678\\84375126\end{pmatrix} \to c_{17}\begin{pmatrix}123456\\264531\end{pmatrix}$

$g-$вращение вокруг оси, проходящей, через центры ребер (2,6) и (4,8)

$b_{18}\begin{pmatrix}12345678\\76583214\end{pmatrix} \to c_{18}\begin{pmatrix}123456\\432165\end{pmatrix}$

$g-$вращение вокруг оси проходящей, через центры ребер (1,5) и (3,7)

$b_{19}\begin{pmatrix}12345678\\58761432\end{pmatrix} \to c_{19}\begin{pmatrix}123456\\465132\end{pmatrix}$

$g-$вращение вокруг оси, проходящей, через центры ребер (2,3) и (5,8)

$b_{20}\begin{pmatrix}12345678\\73268415\end{pmatrix} \to c_{20}\begin{pmatrix}123456\\654321\end{pmatrix}$

$g-$ вращение вокруг оси проходящей, через центры ребер (1,2) и (8,7)

$b_{21}\begin{pmatrix}12345678\\21563487\end{pmatrix} \to c_{21}\begin{pmatrix}123456\\546213\end{pmatrix}$

$g-$ вращение вокруг оси проходящей, через центры ребер (1,4) и (6,7)

$b_{22}\begin{pmatrix}12345678\\48513762\end{pmatrix} \to c_{22}\begin{pmatrix}123456\\531624\end{pmatrix}$

$g-$ вращение вокруг оси проходящей, через центры ребер (4,3) и (5,6)

$b_{23}\begin{pmatrix}12345678\\78436512\end{pmatrix} \to c_{23}\begin{pmatrix}123456\\216543\end{pmatrix}$

Теперь составим таблицу, в которой записаны результаты перемножения подстановок b_i, b_j, $i,j=\overline{0,23}$. Например: $b_1 \cdot b_2 = \begin{pmatrix}12345678\\23416785\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12345678\\34127856\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12345678\\41238567\end{pmatrix} = b_3$.	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	b_{16}	b_{17}	b_{18}	b_{19}	b_{20}	b_{21}	b_{22}	b_{23}
b_0	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	b_{16}	b_{17}	b_{18}	b_{19}	b_{20}	b_{21}	b_{22}	b_{23}
b_1	b_1	b_2	b_3	b_0	b_{16}	b_{19}	b_{12}	b_{10}	b_{18}	b_{14}	b_{23}	b_6	b_{22}	b_9	b_{21}	b_4	b_{20}	b_7	b_5	b_8	b_{15}	b_{13}	b_{11}	b_{17}
b_2	b_2	b_3	b_0	b_1	b_{20}	b_8	b_{22}	b_{23}	b_5	b_{21}	b_{17}	b_{12}	b_{11}	b_{14}	b_{13}	b_{16}	b_{15}	b_{10}	b_{19}	b_{18}	b_4	b_9	b_6	b_7
b_3	b_3	b_0	b_1	b_2	b_{15}	b_{18}	b_{11}	b_{17}	b_{19}	b_{13}	b_7	b_{22}	b_6	b_{21}	b_9	b_{20}	b_4	b_{23}	b_8	b_5	b_{16}	b_{14}	b_{12}	b_{10}
b_4	b_4	b_{22}	b_2	b_{13}	b_5	b_6	b_0	b_{15}	b_{20}	b_{16}	b_{18}	b_9	b_7	b_{19}	b_1	b_{21}	b_{23}	b_3	b_{14}	b_{17}	b_2	b_{12}	b_8	b_{11}
b_5	b_5	b_{18}	b_8	b_{19}	b_6	b_0	b_4	b_{21}	b_2	b_{23}	b_{14}	b_{16}	b_{15}	b_{17}	b_{10}	b_{12}	b_{11}	b_{13}	b_1	b_3	b_{22}	b_7	b_{20}	b_9
b_6	b_6	b_{14}	b_{20}	b_{17}	b_0	b_4	b_5	b_{12}	b_{22}	b_{11}	b_1	b_6	b_{21}	b_3	b_{18}	b_7	b_9	b_{19}	b_{10}	b_{13}	b_8	b_{15}	b_2	b_{16}
b_7	b_7	b_{12}	b_1	b_{15}	b_{10}	b_{23}	b_{17}	b_8	b_9	b_0	b_{22}	b_3	b_{19}	b_4	b_6	b_{18}	b_1	b_{20}	b_{11}	b_{16}	b_{14}	b_5	b_{13}	b_2
b_8	b_8	b_{19}	b_5	b_{18}	b_{22}	b_2	b_{20}	b_9	b_0	b_7	b_{13}	b_{15}	b_{16}	b_{10}	b_{17}	b_{11}	b_{12}	b_{14}	b_3	b_1	b_6	b_{23}	b_4	b_{21}
b_9	b_9	b_{16}	b_{23}	b_{11}	b_{13}	b_{21}	b_{14}	b_0	b_7	b_8	b_4	b_{18}	b_1	b_{22}	b_{20}	b_3	b_{19}	b_6	b_{15}	b_{12}	b_{17}	b_2	b_{10}	b_5
b_{10}	b_{10}	b_{22}	b_{13}	b_4	b_{23}	b_{17}	b_7	b_{18}	b_{14}	b_1	b_{11}	b_0	b_8	b_{16}	b_{12}	b_5	b_0	b_{15}	b_6	b_{20}	b_{21}	b_{19}	b_9	b_3
b_{11}	b_{11}	b_9	b_{16}	b_{23}	b_3	b_{15}	b_{18}	b_6	b_{12}	b_{22}	b_0	b_{10}	b_{14}	b_2	b_8	b_{17}	b_{13}	b_5	b_7	b_{21}	b_{19}	b_{20}	b_1	b_4
b_{12}	b_{12}	b_{21}	b_{15}	b_7	b_1	b_{16}	b_{19}	b_{22}	b_{11}	b_6	b_2	b_{17}	b_{13}	b_0	b_5	b_{10}	b_{14}	b_8	b_{23}	b_9	b_{18}	b_4	b_3	b_{20}
b_{13}	b_{13}	b_4	b_{10}	b_{22}	b_{21}	b_{14}	b_9	b_3	b_{17}	b_{19}	b_{15}	b_8	b_0	b_{12}	b_{16}	b_2	b_5	b_{11}	b_{20}	b_6	b_{23}	b_1	b_7	b_{18}
b_{14}	b_{14}	b_{20}	b_{17}	b_6	b_9	b_{15}	b_{21}	b_1	b_{10}	b_{18}	b_{16}	b_5	b_2	b_{11}	b_{15}	b_0	b_8	b_{12}	b_4	b_{22}	b_7	b_3	b_{23}	b_{19}
b_{15}	b_{15}	b_7	b_{12}	b_{21}	b_{18}	b_{11}	b_3	b_{20}	b_{16}	b_4	b_8	b_{13}	b_{17}	b_5	b_0	b_{14}	b_{10}	b_2	b_9	b_{23}	b_1	b_6	b_{19}	b_{22}
b_{16}	b_{16}	b_{23}	b_{11}	b_9	b_{19}	b_{12}	b_1	b_4	b_{15}	b_{20}	b_5	b_{14}	b_{10}	b_8	b_2	b_{13}	b_{17}	b_0	b_{21}	b_7	b_3	b_{22}	b_{18}	b_6
b_{17}	b_{17}	b_6	b_{14}	b_{20}	b_7	b_{10}	b_{23}	b_{19}	b_{13}	b_3	b_{12}	b_2	b_5	b_{15}	b_{11}	b_8	b_0	b_{16}	b_{22}	b_4	b_9	b_{18}	b_{21}	b_1
b_{18}	b_{18}	b_8	b_{19}	b_5	b_{11}	b_3	b_{15}	b_{14}	b_1	b_{10}	b_9	b_4	b_{20}	b_{23}	b_7	b_6	b_{22}	b_{21}	b_0	b_2	b_{12}	b_{17}	b_{16}	b_{13}
b_{19}	b_{19}	b_5	b_{18}	b_8	b_{12}	b_1	b_{16}	b_{13}	b_3	b_{17}	b_{21}	b_{20}	b_4	b_7	b_{23}	b_{22}	b_6	b_9	b_2	b_0	b_{11}	b_{10}	b_{15}	b_{14}
b_{20}	b_{20}	b_{17}	b_6	b_{14}	b_8	b_{22}	b_2	b_{16}	b_4	b_{15}	b_{19}	b_{21}	b_{23}	b_{18}	b_3	b_9	b_7	b_1	b_{13}	b_{10}	b_0	b_{11}	b_5	b_{12}
b_{21}	b_{21}	b_{15}	b_7	b_{12}	b_{14}	b_9	b_{13}	b_2	b_{23}	b_5	b_{20}	b_{19}	b_3	b_6	b_4	b_1	b_{18}	b_{22}	b_{16}	b_{11}	b_{10}	b_0	b_{17}	b_8
b_{22}	b_{22}	b_{13}	b_4	b_{10}	b_2	b_{20}	b_8	b_{11}	b_6	b_{12}	b_3	b_7	b_9	b_1	b_{19}	b_{23}	b_{21}	b_{18}	b_{17}	b_{14}	b_5	b_{16}	b_0	b_{15}

b_{23}	b_{23}	b_{11}	b_9	b_{16}	b_{17}	b_7	b_{10}	b_5	b_{21}	b_2	b_6	b_1	b_{18}	b_{20}	b_{22}	b_{19}	b_3	b_4	b_{12}	b_{15}	b_{13}	b_8	b_{14}	b_0

В следующей таблице представлены результаты перемножения подстановок c_i, c_j, где $i, j=\overline{0,23}$. Например:

$$c_1 \cdot c_2 = \begin{pmatrix} 123456 \\ 135462 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 123456 \\ 156423 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123456 \\ 162435 \end{pmatrix} = c_3$$

·	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_{17}	c_{18}	c_{19}	c_{20}	c_{21}	c_{22}	c_{23}
c_0	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_{17}	c_{18}	c_{19}	c_{20}	c_{21}	c_{22}	c_{23}
c_1	c_1	c_2	c_3	c_0	c_{16}	c_{19}	c_{12}	c_{10}	c_{18}	c_{14}	c_{23}	c_6	c_{22}	c_9	c_{21}	c_4	c_{20}	c_7	c_5	c_8	c_{15}	c_{13}	c_{11}	c_{17}
c_2	c_2	c_3	c_0	c_1	c_{20}	c_8	c_{22}	c_{23}	c_5	c_{21}	c_{17}	c_{12}	c_{11}	c_{14}	c_{13}	c_{16}	c_{15}	c_{10}	c_{19}	c_{18}	c_4	c_9	c_6	c_7
c_3	c_3	c_0	c_1	c_2	c_{15}	c_{18}	c_{11}	c_{17}	c_{19}	c_{13}	c_7	c_{22}	c_6	c_{21}	c_9	c_{20}	c_4	c_{23}	c_8	c_5	c_{16}	c_{14}	c_{12}	c_{10}
c_4	c_4	c_{22}	c_2	c_{13}	c_5	c_6	c_0	c_{15}	c_{20}	c_{16}	c_{18}	c_9	c_7	c_{19}	c_1	c_{21}	c_{23}	c_3	c_{14}	c_{17}	c_2	c_{12}	c_8	c_{11}
c_5	c_5	c_{18}	c_8	c_{19}	c_6	c_0	c_4	c_{21}	c_2	c_{23}	c_{14}	c_{16}	c_{15}	c_{17}	c_{10}	c_{12}	c_{11}	c_{13}	c_1	c_3	c_{22}	c_7	c_{20}	c_9
c_6	c_6	c_{14}	c_{20}	c_{17}	c_0	c_4	c_5	c_{12}	c_{22}	c_{11}	c_1	c_6	c_{21}	c_3	c_{18}	c_7	c_9	c_{19}	c_{10}	c_{13}	c_8	c_{15}	c_2	c_{16}
c_7	c_7	c_{12}	c_1	c_{15}	c_{10}	c_{23}	c_{17}	c_8	c_9	c_0	c_{22}	c_3	c_{19}	c_4	c_6	c_{18}	c_1	c_{20}	c_{11}	c_{16}	c_{14}	c_5	c_{13}	c_2
c_8	c_8	c_{19}	c_5	c_{18}	c_{22}	c_2	c_{20}	c_9	c_0	c_7	c_{13}	c_{15}	c_{16}	c_{10}	c_{17}	c_{11}	c_{12}	c_{14}	c_3	c_1	c_6	c_{23}	c_4	c_{21}
c_9	c_9	c_{16}	c_{23}	c_{11}	c_{13}	c_{21}	c_{14}	c_0	c_7	c_8	c_4	c_{18}	c_1	c_{22}	c_{20}	c_3	c_{19}	c_6	c_{15}	c_{12}	c_{17}	c_2	c_{10}	c_5
c_{10}	c_{10}	c_{22}	c_{13}	c_4	c_{23}	c_{17}	c_7	c_{18}	c_{14}	c_1	c_{11}	c_0	c_8	c_{16}	c_{12}	c_5	c_0	c_{15}	c_6	c_{20}	c_{21}	c_{19}	c_9	c_3
c_{11}	c_{11}	c_9	c_{16}	c_{23}	c_3	c_{15}	c_{18}	c_6	c_{12}	c_{22}	c_0	c_{10}	c_{14}	c_2	c_8	c_{17}	c_{13}	c_5	c_7	c_{21}	c_{19}	c_{20}	c_1	c_4
c_{12}	c_{12}	c_{21}	c_{15}	c_7	c_1	c_{16}	c_{19}	c_{22}	c_{11}	c_6	c_2	c_{17}	c_{13}	c_0	c_5	c_{10}	c_{14}	c_8	c_{23}	c_9	c_{18}	c_4	c_3	c_{20}
c_{13}	c_{13}	c_4	c_{10}	c_{22}	c_{21}	c_{14}	c_9	c_3	c_{17}	c_{19}	c_{15}	c_8	c_0	c_{12}	c_{16}	c_2	c_5	c_{11}	c_{20}	c_6	c_{23}	c_1	c_7	c_{18}
c_{14}	c_{14}	c_{20}	c_{17}	c_6	c_9	c_{15}	c_{21}	c_1	c_{10}	c_{18}	c_{16}	c_5	c_2	c_{11}	c_{15}	c_0	c_8	c_{12}	c_4	c_{22}	c_7	c_3	c_{23}	c_{19}
c_{15}	c_{15}	c_7	c_{12}	c_{21}	c_{18}	c_{11}	c_3	c_{20}	c_{16}	c_4	c_8	c_{13}	c_{17}	c_5	c_0	c_{14}	c_{10}	c_2	c_9	c_{23}	c_1	c_6	c_{19}	c_{22}
c_{16}	c_{16}	c_{23}	c_{11}	c_9	c_{19}	c_{12}	c_1	c_4	c_{15}	c_{20}	c_5	c_{14}	c_{10}	c_8	c_2	c_{13}	c_{17}	c_0	c_{21}	c_7	c_3	c_{22}	c_{18}	c_6
c_{17}	c_{17}	c_6	c_{14}	c_{20}	c_7	c_{10}	c_{23}	c_{19}	c_{13}	c_3	c_{12}	c_2	c_5	c_{15}	c_{11}	c_8	c_0	c_{16}	c_{22}	c_4	c_9	c_{18}	c_{21}	c_1
c_{18}	c_{18}	c_8	c_{19}	c_5	c_{11}	c_3	c_{15}	c_{14}	c_1	c_{10}	c_9	c_4	c_{20}	c_{23}	c_7	c_6	c_{22}	c_{21}	c_0	c_2	c_{12}	c_{17}	c_{16}	c_{13}
c_{19}	c_{19}	c_5	c_{18}	c_8	c_{12}	c_1	c_{16}	c_{13}	c_3	c_{17}	c_{21}	c_{20}	c_4	c_7	c_{23}	c_{22}	c_6	c_9	c_2	c_0	c_{11}	c_{10}	c_{15}	c_{14}
c_{20}	c_{20}	c_{17}	c_6	c_{14}	c_8	c_{22}	c_2	c_{16}	c_4	c_{15}	c_{19}	c_{21}	c_{23}	c_{18}	c_3	c_9	c_7	c_1	c_{13}	c_{10}	c_0	c_{11}	c_5	c_{12}
c_{21}	c_{21}	c_{15}	c_7	c_{12}	c_{14}	c_9	c_{13}	c_2	c_{23}	c_5	c_{20}	c_{19}	c_3	c_6	c_4	c_1	c_{18}	c_{22}	c_{16}	c_{11}	c_{10}	c_0	c_{17}	c_8
c_{22}	c_{22}	c_{13}	c_4	c_{10}	c_2	c_{20}	c_8	c_{11}	c_6	c_{12}	c_3	c_7	c_9	c_1	c_{19}	c_{23}	c_{21}	c_{18}	c_{17}	c_{14}	c_5	c_{16}	c_0	c_{15}
c_{23}	c_{23}	c_{11}	c_9	c_{16}	c_{17}	c_7	c_{10}	c_5	c_{21}	c_2	c_6	c_1	c_{18}	c_{20}	c_{22}	c_{19}	c_3	c_4	c_{12}	c_{15}	c_{13}	c_8	c_{14}	c_0

Представленные таблицы показывают, что соответствующие группы естественно изоморфны.

Теперь необходимо получить линейное представление группы $S(X)$ для данного примера. Для этого необходимо показать действие $\sigma_* = s_*(\mathrm{g})$, где $\sigma = s(\mathrm{g})$, т.е. показать что: $(s_*(\mathrm{g})f)(x) = f(s(\mathrm{g})^{-1}x)$, $(f \in K[X])$, а затем проверить равенство:

$$((\sigma\tau)_* f)(x) = f((\sigma\tau)^{-1}x) = f(\tau^{-1}\sigma^{-1}x),$$
$$(\sigma_*\tau_* f)(x) = (\tau_* f)(\sigma^{-1}x) = f(\tau^{-1}\sigma^{-1}x).$$

Пустьg- поворот на $\frac{2\pi}{3}$ вокруг оси, проходящей через центр куба и одну из его вершин (4,6)

$$\mathrm{g} = b_{10} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 37842651 \end{pmatrix}, s(\mathrm{g}) = c_{10} = \begin{pmatrix} 123456 \\ 231564 \end{pmatrix}$$

$$s_*(\mathrm{g}):\begin{Vmatrix}0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{Vmatrix}(s_*(\mathrm{g})f)(x)=f(s(\mathrm{g})^{-1}x)$$

$$f(s(\mathrm{g})^{-1}x_1)=f(x_3)=\alpha_3$$

$$(s_*(\mathrm{g})f)(x_1)=\{100000\}\times\begin{Vmatrix}0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{Vmatrix}\times\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\\\alpha_6\end{pmatrix}=\alpha_3$$

$$(s_*(\mathrm{g})f)(x_i)=f(s(\mathrm{g})^{-1}x_i)\quad(i=1,2,3,4,5,6)$$

Проверим, что: $(\sigma\tau)_*=\sigma_*\tau_*$

$\sigma=s(\mathrm{g}_1)=\begin{pmatrix}123456\\231564\end{pmatrix},\tau=s(\mathrm{g}_2)=\begin{pmatrix}123456\\345612\end{pmatrix}$, где g_1- поворот на $\frac{2\pi}{3}$ вокруг оси, проходящей через центр куба и одну из его вершин (4,6), g_2- поворот на $\frac{2\pi}{3}$ вокруг оси, проходящей через центр куба и одну из его вершин (1,7). Тогда

$$\sigma\tau=\begin{pmatrix}123456\\156423\end{pmatrix},(\sigma\tau)^{-1}=\begin{pmatrix}123456\\156423\end{pmatrix},\tau^{-1}\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}123456\\156423\end{pmatrix}$$

$$f((\sigma\tau)^{-1}x_5)=f(\tau^{-1}\sigma^{-1}x_5)=f(x_2)=\alpha_2$$

$$(\sigma\tau)_*:\begin{Vmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{Vmatrix}$$

$$((\sigma\tau)_*f)(x_5)=\{0\ldots10\}\times\begin{Vmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{Vmatrix}\times\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\\\alpha_6\end{pmatrix}=\alpha_2$$

$$\sigma_*:\begin{Vmatrix}0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{Vmatrix},\tau_*:\begin{Vmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{Vmatrix},$$

$$\sigma_*\tau_*:\begin{Vmatrix}0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{Vmatrix}\times\begin{Vmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{Vmatrix}$$

$$(\sigma_* \tau_* f)(x_5) = \{0 \dots 10\} \times \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} = \alpha_2$$

Значит, $((\sigma\tau)_* f)(x_i) = (\sigma_* \tau_* f)(x_i)$ $(i = 1,2,3,4,5,6)$

Список использованных источников:

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру: Наука, 1977.
2. Проскуряков И.В.Сборник задач по линейной алгебре: Наука,1966
3. Винберг Э.Б. Линейные представления групп: Наука,1985
4. Белоногов В.А. Представления и характеры в теории конечных групп: Свердловск, 1990.
5. Берман С.Д. Представления конечных групп: Алебра,1966.

Асканбаева Г.Б. [1], Ведзижев Е.Х. [2]

1. Научный руководитель, старший преподаватель

2. Студент 4 курса, кафедра физико-математических и общетехнических дисциплин, специальность «Математика»

ОСЕВАЯ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Решение задач служит одним из средств овладения системой научных знаний по тому или иному учебному предмету. Особо велико значение решения задач в овладении системой понятий.

Когда ученик работает над теоретическим материалом, то усваивает чужие мысли, когда решает задачи, то мыслит самостоятельно. Польза от решения заключается не в отыскании ответа, а в том, что в процессе решения ученик целенаправленно, последовательно совершенствует технику (закрепляет знание формул, алгоритмов, методов и приемов решений), развивает творческие способности.

Решение задач по геометрии имеет большое образовательное и воспитательное значение. Поиск решения задачи развивает инициативу, настойчивость и сообразительность. Если к тому же задачи достаточно разнообразны, то их решение является прекрасным средством развития логического мышления, строгости суждений и математического вкуса.

Одной из самых ценных сторон геометрических задач является то, что они развивают поисковые навыки решения практических проблем, приобщают к посильным самостоятельным исследованиям, способствуют выработке конкретных геометрических представлений, а также более тщательной обработке умений и навыков. А это в свою очередь усиливает прикладную и политехническую направленность обучения геометрии. Геометрические задачи