В работу не вошло большое количество примеров интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка в программе MathCAD, так как были рассмотрены только основные задачи.

Используемый учебный материал подобран с учетом того, что дисциплины «Дифференциальные уравнения» и «Численные методы» изучаются на третьем курсе.

При помощи поставленных задач достигнута основная цель статьи.

Полученные знания могут быть использованы читателем в изучаемых в дальнейшем дисциплинах, при обработке экспериментальных данных в исследовательских и выпускных работах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириллова, С.Ю. Вычислительная математика: Учеб. пособие. – Владимир: Изд–во Владим. гос. ун–та, 2009. – 102 с.

3.Охорзин В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD: Учебное пособие. 2–е изд, испр. и доп. – СПб.: Изд–во «Лань», 2008. – 352 с.

4. Филлипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Изд. 5–е, испр. – М.: Изд–во «Наука» , 1979. – 128 с.

5.Школьник А.Г. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие для физико– математических факультетов педагогических институтов. – М.: Изд–во «Учпедгиз»,1963. – 200 с.

6. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. 2–е, перераб. – М.: «Высшая школа», 1963. – 546 с.

Применение булевых функций

Автор: Глазырина М.В.
Научный руководитель: Раисова Г.Т.
Костанайский государственный педагогический институт

Булевы функции широко применяются при описании работы дискретных управляющих систем (контактных схем, схем из функциональных элементов, логических сетей и т.д.), при исследовании некоторых электрических цепей, так называемых релейно–контактных схем.

Перед тем как рассмотреть применение булевых функций и полных систем булевых функций, необходимо ввести определение булевой функции.

Булевой функцией от одного аргумента называется функция f, заданная на множестве из двух элементов и принимающая значения в том же двухэлементном множестве. Элементы двухэлементного множества будем обозначать 0 и 1. Таким образом, $f:\{0,1\} \to \{0,1\}$. Нетрудно перечислить все булевы функции от одного аргумента:

x	$f_0(x)$	$f_0(x)$	$f_0(x)$	$f_0(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Всего имеется четыре различных булевых функций от одного аргумента:

$f_0(x) = 0$ – функция, тождественно равная 0 (тождественный нуль);

$f_1(x) = x$ – тождественная функция;

$f_2(x) = x'$ – функция, называемая отрицанием;

$f_3(x) = 1$ – функция, тождественно равная 1 (тождественная единица). [1,с. 94]

Булевой функцией от двух аргументов называется функция g заданная на множестве $\{0,1\} \times \{0,1\}$ и принимающая значения в двухэлементном множестве $\{0,1\}$. Другими словами, булева функция от двух аргументов сопоставляет любой упорядоченной паре, составленной из элементов 0 и 1 (а таких упорядоченных пар будет четыре), либо 0, либо 1.

Перечислим все возможные булевы функции от двух аргументов в форме следующей таблицы:

[1,с. 95]

Булевой функцией от n аргументов называется функция f, заданная на множестве $\{0,1\}^n$ и принимающая значения в двухэлементном множестве $\{0,1\}$. Другими словами, булева функция от n аргументов сопоставляет каждому упорядоченному набору длины n, составленному из элементов 0 и 1, либо 0, либо 1.Булева функция f от n аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$ обозначается так: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. [2]

Суперпозицией булевыхфункций $g_1(y_1^1, y_1^2, \dots, y_1^{m_1}), \dots, g_n(y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^{m_n})$ в булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется новая булева функция, получающаяся из функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ подстановкой вместо (всех или некоторых) аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$ функций $g_1, g_2, \dots, g_n$ соответственно $f(g_1(y_1^1, \dots, y_1^{m_1}), \dots, g_n(y_n^1, \dots, y_n^{m_n}))$. Полученная функция

				,		,						,		,			

$F(y_1^1, \dots, y_1^{m_1}, \dots, y_n^1, \dots, y_n^{m_n})$ зависит от $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ аргументов. [2]

Всякая булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может быть представлена в виде суперпозиции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания; причем знак отрицания стоит только непосредственно около переменной и не стоит ни перед одной из внутренних скобок. [1,с. 104]

Итак, перейдем к применению булевых функций в релейно–контактных схемах. Под релейно–контактной схемой понимается устройство из проводников и двухпозиционных контактов. Оно может быть предназначено, например, для соединения (или разъединения) полюсов источника тока с некоторым потребителем. Контакты релейно–контактной схемы могут быть двух типов: замыкающие и размыкающие. Каждый контакт подключен к некоторому реле (переключателю). К одному реле может быть подключено несколько контактов – как замыкающих, так и размыкающих. Технически реле представляет собой катушку с металлическим сердечником (магнитопроводом), вблизи которого находится соответствующий контакт.

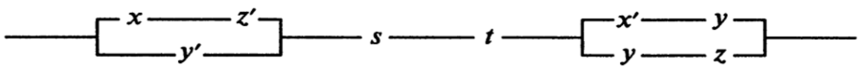
Когда через катушку пропускается электрический ток, металлический сердечник намагничивается и замыкает все находящиеся при нем замыкающие контакты. Одновременно все размыкающие контакты, относящиеся к данному реле, размыкаются. Поскольку замыкающие контакты при отсутствии в реле электрического тока разомкнуты, то они называются также нормально разомкнутыми. Аналогично, размыкающие контакты называются также нормально замкнутыми. При обесточивании обмоток реле (т.е. когда реле отключается) все замыкающие контакты снова размыкаются, а все размыкающие, замыкаются.

Каждому реле ставится в соответствие своя булева переменная x_1 илиx_2, или $x_т$, которая принимает значение 1, когда реле срабатывает, и принимает значение 0 при отключении реле. На чертеже все замыкающие контакты, подключенные к реле x, обозначаются тем же символомx а все размыкающие контакты, подключенные к этому реле, обозначаются отрицаниемx'. Это означает, что при срабатывании реле все его замыкающие контакты x проводят ток и им сопоставляется значение 1, а все размыкающие контакты не проводят электрический ток и им сопоставляется значение 0. При отключенном реле x создается противоположная ситуация: все его замыкающие контакты x разомкнуты, т. е. в этот момент им сопоставляется (переменная x принимает) значение 0, а все его размыкающие контакты x' замкнуты, т. е. в этот момент им сопоставляется (другими словами, переменная x' принимает) значение 1.

Всей релейно–контактной схеме тогда ставится в соответствие булева переменная y, зависящая от булевых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, сопоставленным тем реле, которые участвуют в схеме. Если при данном наборе состояний реле $x_1, x_2, \dots, x_n$ (некоторые из этих реле находятся в рабочем состоянии под током, остальные отключены, т.е. "обесточены") вся релейно–контактная схема проводит электрический ток, то переменной y ставится в соответствие (другими словами, переменная принимает) значение 1. Если же при этом наборе состояний реле $x_1, x_2, \dots, x_n$ схема не проводит электрический ток, то считаем, что переменная у принимает значение 0. Поскольку каждый набор состояний реле $x_1, x_2, \dots, x_n$ характеризуется набором, составленным из нулей и единиц и имеющим длину n, то данная релейно–контактная схема определяет некоторое правило, по которому каждому такому набору длины n, составленному из нулей и единиц, сопоставляется либо 0, либо 1. Таким образом, каждая релейно–контактная схема, в которой занято n независимых реле (контактов в ней может быть или больше), определяет некоторую булеву функцию от аргументов. Она принимает значение 1 на тех и только тех наборах значений аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые соответствуют тем состояниям реле $x_1, x_2, \dots, x_n$, при которых данная схема проводит электрический ток. Такая булева функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется функцией проводимости данной релейно–контактной схемы. [1,с. 111–112]

Рассмотрим некоторые реализации булевых функций в виде релейно–контактных схем.

Пример 1. По данной релейно–контактной схеме найти функцию проводимости:



Решение. Данная релейно–контактная схема состоит из трех последовательных участков. Первый участок цепи состоит в свою очередь из двух последовательных контактов $-x, z'$, которые параллельно соединены с контактом – y'. Поэтому этому участку цепи будет соответствовать следующая функция проводимости: $(x \wedge z') \vee y'$.

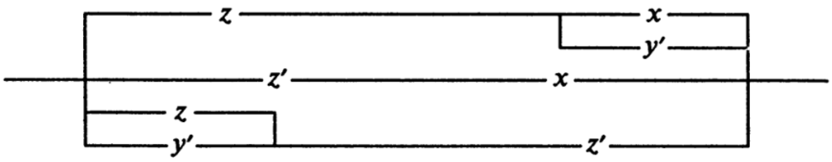
Второй участок состоит из двух последовательно соединённых контакта: s, t, и поэтому функция проводимости для данного участка будет иметь вид: $s \wedge t$.

Третий участок цепи состоит из 2 ветвей, которые соединены параллельно. Первая ветвь состоит из двух последовательных контактов – x', y. Вторая ветвь также состоит из двух последовательных контактов – y, z. Поэтому этому участку цепи будет соответствовать следующая функция проводимости: $(x' \wedge y) \vee (y \wedge z)$.

Итак, поскольку данная схема состоит из трех последовательных участков, функции проводимости которых мы нашли, то для нахождения функции проводимости всей схемы, необходимо рассмотреть конъюнкцию найденных функций:

$$f(x, y, z, s, t) = ((x \wedge z') \vee y') \wedge (s \wedge t) \wedge ((x' \wedge y) \vee (y \wedge z)).$$

Пример 2. Упростите данную контактную схему:



Решение. Для того чтобы упростить данную схему, необходимо для начала составить для нее функцию проводимости. Так как схема состоит из трех параллельных ветвей то нужно рассмотреть дизъюнкцию функций проводимости каждой ветви. Итак, функция проводимости схемы будет иметь вид:

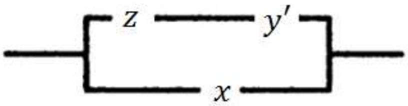
$$f(x,y,z) = (z \wedge (x \vee y')) \vee (z' \wedge x) \vee ((z \vee y') \wedge z').$$

Следующим шагом будет преобразование этой функции путем применения основныхравносильностей:

$$f(x,y,z) = (z \wedge (x \vee y')) \vee (z' \wedge x) \vee ((z \vee y') \wedge z') \equiv (z \wedge x) \vee (z \wedge y') \vee (z' \wedge x) \vee (z \wedge z') \vee (z \wedge y') \equiv (((z \wedge x) \vee z') \wedge ((z \wedge x) \vee x)) \vee 0 \vee (z \wedge y') \equiv ((z \vee z') \wedge (x \vee z') \wedge ((z \vee x) \wedge (x \vee x)) \vee (z \wedge y') \equiv ((x \vee z') \wedge ((z \vee x) \wedge x)) \vee (z \wedge y') \equiv ((x \vee z') \wedge x) \vee (z \wedge y') \equiv x \vee (z \wedge y')$$

.

Итак, функция проводимости упрощена. Схема будет состоять из двух параллельных ветвей, в одной из них последовательно соединены два контакта–z, y', в другой один контакт – x. Схема имеет вид:



.

Пример 3.Каждый из трех членов комитета, голосуя «за», нажимает на кнопку. Построить по возможности более простую схему, через которую проходил бы ток и включал электрическую лампочку тогда и только тогда, когда не менее двух членов комитета голосуют «за».[3,с.139]

Решение. Используя условия, которым должна удовлетворять искомая схема, составим сначала таблицу значений функции проводимости π этой схемы.

Зная теперь все наборы значений аргументов, построим функцию проводимости:

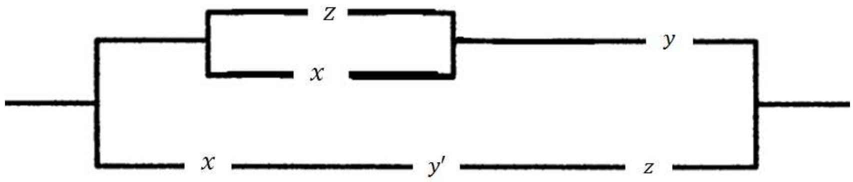
$$\pi(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z).$$

Можно легко заметить, что мы имеем СДНФ, упростим ее с помощью законов булевой алгебры:

$$\begin{aligned}\pi(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \\ \equiv ((y \wedge z) \wedge (x \vee x')) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z) \\ \equiv ((y \wedge z) \wedge 1) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z) \\ \equiv (y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z) \\ \equiv (y \wedge ((x \wedge z') \vee z)) \vee (x \wedge y' \wedge z) \\ \equiv (y \wedge ((x \vee z) \wedge (z' \vee z))) \vee (x \wedge y' \wedge z) \\ \equiv (y \wedge ((x \vee z) \wedge 1)) \vee (x \wedge y' \wedge z) \equiv (y \wedge (x \vee z)) \vee (x \wedge y' \wedge z).\end{aligned}$$

Имея функцию проводимости, мы можем построить схему. Она будет состоять из двух параллельных ветвей. Первая ветвь будет состоять из контакта – y, который последовательно соединен с участком, который состоит ихдвух параллельных ветвей – z, x. Вторая ветвь будет состоять из трех последовательно соединенных контактов – z, x, y'.

Схема имеет вид:



.

Существует очень много видов задач на применение булевых функций в релейно–контактных схемах. Таким образом, теория булевых функций предоставляет математические модели реальных физических релейно–контактных схем.

Литература:

1. В.И.Игошин «Математическая логика и теория алгоритмов.».2–ое издание,Москва–2008.
2. http://mathhelpplanet.com/static.php?p=bulevy–funktsii–ot–n–argumentov
3. В.И. Игошин «Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов». 3–е издание,Москва–2007.

Актуарная математика в современном мире

Автор: Исмуратова Д.А,
Научный руководитель: Мусабекова М.М,
Костанайский государственный педагогический институт

В настоящее время возросла роль математики в изучении сложнейших экономических процессов. В связи с активным развитием банковской системы, страховой, пенсионной и инвестиционной деятельности стало актуальным изучение актуарной математики.

Актуарная математика – это область знаний математики, которая включает в себя совокупность математических методов, средств