

# МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОЕ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ D-УРАВНЕНИЙ

## MULTIPERIODIC SOLUTION OF SOME OF THE VARIABLES OF A NONLINEAR SYSTEM OF D-EQUATIONS

**Бержанов А.Б.**

*Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова, г. Актобе, Казахстан*

Получено достаточное условие устойчивости по временной переменной многопериодического по части переменных решения нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Рассмотрим систему уравнений

$$D_\varepsilon x \equiv \frac{\partial x}{\partial t} + a(t, \varphi, \psi, \varepsilon) \frac{\partial x}{\partial \varphi} + b(t, \varphi, \psi, \varepsilon) \frac{\partial x}{\partial \psi} = P(t, \varphi, \psi)x + \mu \left\{ Q(t, \varphi, \psi, x, \mu) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(t_1, t, \varphi, \psi) \cdot R(t_1, t, \varphi, \psi, x(t_1, \varphi, \psi), \mu) dt_1 \right\}, \quad (1)$$

где  $x, Q, R$  – векторы-столбцы;  $\varphi, a(t, \varphi, \psi, \varepsilon) = a^0(t) + \varepsilon a_1(t, \varphi, \psi, \varepsilon)$  –  $m$ -векторы;

$\psi, b(t, \varphi, \psi, \varepsilon) = b^0(t) + \varepsilon b_1(t, \varphi, \psi, \varepsilon)$  –  $k$ -векторы;  $P(t, \varphi, \psi), K(t_1, t, \varphi, \psi)$  –  $n \times n$  – матрицы;

$a \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}, b \cdot \frac{\partial}{\partial \psi}$  – скалярные произведения  $m, k$ -мерных векторов  $a, b$  и символических

векторов  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_m} \right); \frac{\partial}{\partial \psi} = \left( \frac{\partial}{\partial \psi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \psi_k} \right);$

$\varepsilon, \mu$  – положительные параметры.

Пусть  $t, t_1 \in R, \varphi \in R^m = \{\varphi : \|\varphi\| < \infty\}, \psi \in R^k = \{\psi : \|\psi\| < \infty\},$

$x \in R_\Delta = \{x : \|x\| \leq \Delta\} \subset R^n, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \mu \in [0, \mu_0].$

Вектор функцию  $f(t, \varphi, \psi) \in R^n$ , определенную и непрерывную в  $R^{1+m+k}$  назовем многопериодической по части переменных, если она многопериодична по  $t, \varphi$  с вектор периодом  $(\theta, \omega) \in R^{1+m}$  равномерно относительно  $\psi \in R^k$ . Очевидно для такой функции  $f(t, \varphi, \psi)$  при любых  $(t, \varphi, \psi) \in R^{1+m+k}$  имеет место равенство

$$f(t + \theta, \varphi + q \wedge \omega, \psi) - f(t, \varphi, \psi) = 0.$$

При выполнении определенных условий [1], установлено существование и единственность многопериодического по части переменных решения системы (1).

Выясним теперь условия устойчивости такого решения относительно временной переменной  $t$ .

Будем полагать, что выполнены условия (S), если вектор функции  $a^0(t), b^0(t)$  периодичны по  $t$  с периодом  $\theta$ ;  $a$  вектор-функции  $a_1(t, \varphi, \psi, \varepsilon), b_1(t, \varphi, \psi, \varepsilon), K(t_1, t, \varphi, \psi, x, \mu), Q(t, \varphi, \psi, x, \mu)$  и матрицы  $P(t, \varphi, \psi), K(t_1, t, \varphi, \psi)$  ограничены и непрерывны по  $t_1, t, \varphi, \psi, x, \varepsilon, \mu$ , обладают ограниченными и равномерно непрерывными частными производными до второго порядка по координатам векторов  $\varphi, \psi, x$  при всех  $t_1, t \in R, \varphi \in R^m, \psi \in R^k, x \in R_\Delta, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \mu \in [0, \mu_0]$ ; вектор функция  $K$  диагонально периодична по  $t, t_1$ , многопериодична по  $\varphi$  равномерно относительно  $\psi, x, \mu$ ; вектор функции  $a_1, b_1$  многопериодичны по  $t, \varphi$  равномерно относительно  $\psi, \varepsilon$ , кроме того

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|K(t_1, t, \varphi, \psi)\| dt_1 \leq K_0 < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \left\| \frac{\partial K}{\partial \varphi} \right\| + \left\| \frac{\partial K}{\partial \psi} \right\| \right) dt_1 \leq \bar{K} < \infty.$$

Очевидно, что при выполнении условий (S) имеют место соотношения:

$$\begin{aligned}
& \|a^0(t)\| \leq a_0, \quad \|b^0(t)\| \leq b_0, \quad \|K(t_1, t, \varphi, \psi)\| \leq K_1, \quad \|R(t_1, t, \varphi, \psi, o, \mu)\| \leq R_0, \quad \|P(t, \varphi, \psi)\| \leq P_0, \\
& \|Q(t, \varphi, \psi, o, \mu)\| \leq Q_0, \quad \|a_1(t, \varphi, \psi, o, \varepsilon)\| \leq a_{10}, \quad \|b_1(t, \varphi, \psi, o, \varepsilon)\| \leq b_{10}; \\
& \|a_1(t, \bar{\varphi}, \bar{\psi}, \varepsilon) - a_1(t, \varphi, \psi, \varepsilon)\| \leq \beta_1 (\|\bar{\varphi} - \varphi\| + \|\bar{\psi} - \psi\|), \\
& \|b_1(t, \bar{\varphi}, \bar{\psi}, \varepsilon) - b_1(t, \varphi, \psi, \varepsilon)\| \leq \beta_2 (\|\bar{\varphi} - \varphi\| + \|\bar{\psi} - \psi\|), \\
& \|P(t, \bar{\varphi}, \bar{\psi}) - P(t, \varphi, \psi)\| \leq P_1 (\|\bar{\varphi} - \varphi\| + \|\bar{\psi} - \psi\|), \\
& \|K(t_1, t, \bar{\varphi}, \bar{\psi}) - K(t_1, t, \varphi, \psi)\| \leq K_1 (\|\bar{\varphi} - \varphi\| + \|\bar{\psi} - \psi\|), \\
& \|Q(t, \bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{x}, \mu) - Q(t, \varphi, \psi, x, \mu)\| \leq \sigma (\|\bar{\varphi} - \varphi\| + \|\bar{\psi} - \psi\| + \|\bar{x} - x\|); \\
& \|R(t_1, t, \bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{x}, \mu) - R(t_1, t, \varphi, \psi, x, \mu)\| \leq \sigma_1 (\|\bar{\varphi} - \varphi\| + \|\bar{\psi} - \psi\| + \|\bar{x} - x\|), \\
& a^0(t + \theta) = a^0(t), \quad b^0(t + \theta) = b^0(t), \quad a_1(t + \theta, \varphi + q^{\wedge} \omega, \psi, \varepsilon) = a_1(t, \varphi, \psi, \varepsilon), \\
& b_1(t + \theta, \varphi + q^{\wedge} \omega, \psi, \varepsilon) = b_1(t, \varphi, \psi, \varepsilon), \quad Q(t + \theta, \varphi + q^{\wedge} \omega, \psi, x, \mu) = Q(t, \varphi, \psi, x, \mu), \\
& P(t + \theta, \varphi + q^{\wedge} \omega) = P(t, \varphi), \quad K(t_1 + \theta, t + \theta, \varphi + q^{\wedge} \omega, \psi) = K(t_1, t, \varphi, \psi), \\
& R(t_1 + \theta, t + \theta, \varphi + q^{\wedge} \omega, \psi, x, \mu) = R(t_1, t, \varphi, \psi, x, \mu)
\end{aligned} \tag{2}$$

для всех  $t_1, t \in R$ ,  $\bar{\varphi}, \varphi \in R^m$ ,  $\bar{\psi}, \psi \in R^k$ ,  $\bar{x}, x \in R_\Delta$ ,  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ ,  $\mu \in [0, \mu_0]$ ,

где  $a_0, b_0, K_1, R_0, P_0, Q_0, a_{10}, b_{10}, \beta_i, P_1, k_1, \sigma$  – некоторые положительные постоянные.

Предположим, что линейная система

$$D_\varepsilon x = P(t, \varphi, \psi)x \tag{3}$$

является некритической [1]. Тогда для системы (3) может быть построен матрицант (матрица типа Грина) удовлетворяющий условиям

$$\|X(t_0, t, \varphi, \psi)\| \leq B e^{-\gamma|t-t_0|} \tag{4}$$

$$X(t-0, t, \varphi, \psi) - (t+0, t, \varphi, \psi) = E,$$

где  $B \geq 1, \gamma > 0$  – постоянные.

Если система (3) некритическая и имеют условия (S), то можно указать положительные числа  $\varepsilon$  и  $\mu$  такие, что для всех значений  $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ ,  $0 < \mu < \bar{\mu}$  система (1) допускает единственное многопериодическое по части переменных решение

$$x = f^*(t, \varphi, \psi, \varepsilon, \mu) \tag{5}$$

обращающееся при  $\varepsilon = 0$  в многопериодическое (5) по части переменных решение соответствующей условно- вырожденной системы, а при  $\mu = 0$  в тривиальное решение  $x = 0$  однородной системы (3).

Заменой  $x = y + f^*$  исследуемый вопрос сводится к вопросу об устойчивости нулевого решения системы

$$D_\varepsilon y = P(t, \varphi, \psi)y + \mu \left\{ Q^*(t, \varphi, \psi, y, \mu) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(t_1, t, \varphi, \psi) R^*(t_1, t, \varphi, \psi, y(t_1, \varphi, \psi), \mu) dt_1 \right\}, \tag{6}$$

где положено  $Q^*(t, \varphi, \psi, y, \mu) = Q(t, \varphi, \psi, y + f^*, \mu) - Q(t, \varphi, \psi, f^*, \mu)$ ,

$$R^*(t_1, t, \varphi, \psi, y, \mu) = R(t_1, t, \varphi, \psi, y + f^*, \mu) - R(t_1, t, \varphi, \psi, f^*, \mu).$$

Рассмотрим пространство  $U$  ограниченных  $n$  - мерных вектор-функций  $u = u(\varphi, \psi \in C_{\varphi, \psi}^{1,1}(R^{m+k}))$ , в котором введем норму  $\|u\|_v = \sup_{R^{m+k}} \|u(\varphi, \psi)\|$ . Через  $V(p)$  обозначим

множество тех  $u(\varphi, \psi) \in V$  для которых имеет место неравенство

$$\|u\|_V \leq \rho.$$

Решение системы (6) которое при  $t=t_0$  обращается в заданную вектор-функцию  $u(\varphi, \psi) \in V(\rho)$ , может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} y(t, \varphi, \psi) = & X(t_0, t, \varphi, \psi) u(\lambda(t_0, t, \varphi, \psi), \xi(t_0, t, \varphi, \psi)) + \\ & + \mu \int_{t_0}^t X(s, t, \varphi, \psi) \{ Q(s, \lambda(s, t, \varphi, \psi), \xi(s, t, \varphi, \psi), y(s, \lambda(s, t, \varphi, \psi), \xi(s, t, \varphi, \psi), \mu)) + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} K(t_1, s, \lambda(s, t, \varphi, \psi), \xi(s, t, \varphi, \psi)) R^*(t_1, s, \lambda(s, t, \varphi, \psi), \xi(s, t, \varphi, \psi), y(t_1, \lambda(s, t, \varphi, \psi), \xi(s, t, \varphi, \psi)), \mu) dt_1 ds \} \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда на основе условия (4) и неравенств (2) имеем

$$\|y\| \leq B\rho e^{-\gamma(t-t_0)} + \mu B(\sigma + \sigma_1 K_0) \int_{t_0}^t e^{-\gamma(t-s)} \|y\| ds.$$

Умножая обе части на  $e^{\gamma t}$ , получим

$$\|y\| e^{\gamma t} \leq B\rho e^{\gamma t_0} + \mu(\sigma + \sigma_1 K_0) B \int_{t_0}^t \|y\| e^{\gamma s} ds.$$

Отсюда по лемме Гронуолла – Беллмана имеем

$$\|y\| e^{\gamma t} \leq B\rho e^{\gamma t_0} e^{\mu(\sigma + \sigma_1 K_0) B(t-t_0)}$$

или

$$\|y\| \leq B\rho e^{(-\gamma + \mu(\sigma + \sigma_1 K_0) B)(t-t_0)}$$

Если выбрать  $0 < \mu < \frac{\gamma}{2(\sigma + \sigma_1 K_0) B}$ , то будем иметь

$$\|y\| \leq B\rho e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t_0)} \quad (8)$$

при  $t \geq t_0$ .

Пусть  $\nu > 0$  – любое наперед заданное число. Выберем  $\rho$  из условия  $0 < \rho < \frac{\nu}{B}$ .

Тогда из условия  $\|u(\varphi, \psi)\| < \rho$  при всех  $(\varphi, \psi) \in R^{m+k}$  будет следовать  $\|y(t, \varphi, \psi)\| < \nu$  для всех  $t \geq t_0$  и  $(\varphi, \psi) \in R^{m+k}$ .

Кроме того, число  $\rho$  не зависит от выбора  $t_0$ . Из (8) при  $t \rightarrow +\infty$  имеем  $\|y(t, \varphi, \psi)\| \rightarrow 0$ .

Результат сформулировано в виде теоремы.

**Теорема.** Если система (3) – некритическая при  $t \rightarrow +\infty$  и выполнены условия (S), то при всех значениях  $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ ,  $0 < \mu < \min\left(\bar{\mu}, \frac{\gamma}{2(\sigma + \sigma_1 K_0) B}\right)$  многопериодическое по части переменных решение  $x = f^*(t, \varphi, \psi, \varepsilon, \mu)$  системы (1) будет равномерно и асимптотически устойчивым относительно  $U$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бержанов А.Б. Многопериодическое по части переменных решение одной системы интегро-дифференциальных уравнений. // Вестник Евразийского Национального университета им. Л.Н.Гумилева, 2004, №1. с.223-227.