ПОЧТИ МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТОДОМ РЕДУКЦИИ

ALMOST MULTI PERIODIC SOLUTION OF CERTAIN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN DERIVATIVE BY THE METHOD OF REDUCTION

Ысмагул Р.С
Костанайский государственный университет им. А. Байтурсынова, г.Костанай, Казахстан

Методу исследования счетных систем дифференциальных уравнений с помощью укороченных систем посвящены работы многих авторов. [1-2]. Было показано, что решение от счетного множества переменных основной системы может быть равномерно аппроксимировано почти многопериодическим решением укороченной по независимым переменным системы [3].

Введем ряд обозначений и определений:

$H(\Delta, \delta_m)$ - класс n-мерных π - функций, $f(t,\varphi)$ - удовлетворяющих условиям:

$\|f(t,\varphi)\| \le \Delta, \|f(t, w_m\varphi + v_m\overline{\varphi}) - f(t, w_m\varphi + v_m\varphi)\| \le \delta_m \|v_m(\overline{\varphi} - \varphi)\|$

и почти многопериодическим по t,φ с η-вектор-почти периодом (τ,θ), где $\delta_m \downarrow 0$ при $m \to \infty$; счётномерный вектор $(\tau,\theta) \in R \times R_\varphi$, где $R_\varphi = \{\varphi : \|\varphi\| < \infty\}$; W_mи V_m – операторы, которые вектору $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \ldots)$ ставят в соответствие векторы

$W_m\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m, 0, \ldots)$ и $V_m\varphi = (0, \ldots, 0, \varphi_{m+1}, \varphi_{т+2}, \ldots)$.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений вида

$$D_\varepsilon^x x = P(t,\varphi)x + \mu Q\{t,\varphi,x,\mu) + \mu \int_{-\infty}^{\infty} R(t_1, t, \varphi, x(t_1,\varphi), \mu)\psi(t - t_1)dt_1 , \tag{1}$$

где x,Q,R– nвекторы-столбцы; P(t,φ) – матрица размерности n×n,

$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \ldots)$ – счетномерный вектор, $\varepsilon > 0$, μ >0 – малые параметры.

D_ε^x - дифференциальный оператор вида

$$D_\varepsilon^x = \frac{\partial}{\partial t} + a(t,\varphi,x,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \varphi} , \tag{2}$$

$$\text{где } a \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t,\varphi,x,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \varphi_k} \tag{3}$$

Развивая идеи работ [1,3] при выполнении определенных условии (N_∞) установлены достаточные условия существования, единственности почти периодического решения системы (I) в классе $H_n(\Delta,\delta_n)$ непрерывных вектор-функций $f(t,x)$, почти периодических и имеющих почти периодические частные производные первого порядка по t,x с η - почти периодом $(\tau,0)$, удовлетворяющих условию Липщица по $x \in R_\Delta$.

Будем считать, что выполнены условия (N_∞) [1] и (S_∞), если:

1) вектор-функция $R(t_1,t,\varphi,x,\mu)$ ограничена и непрерывна по всем переменным, обладает ограниченными и непрерывными производными первого порядка по $\varphi \in R_\varphi, x \in R_\Delta$; диагонально – почти периодична по t_1,t, почти многопериодична по φ с η-вектор –почти периодом (τ,ϑ), принадлежит π-классу равномерно относительно x,μ;

2) непрерывная функция $\psi(s)$ такова, что существует несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(s)| ds \le K < \infty$, где $K > 0$ постоянное.

При выполнении этих условий имеют место неравенства:

$$\left\|a^0(t)\right\| \le a_0,\ \left\|b(t,\varphi,0,\varepsilon)\right\| \le b_0,\left\|P(t,\varphi)\right\| \le P_0;$$

$$\left\|Q(t,\varphi,0,\mu)\right\| \le Q_0,\ \left\|R(t,\varphi,0,\mu)\right\| \le R_0; \quad (4)$$

$$\left\|b(t,W_m\varphi+V_m\overline{\varphi,x},\varepsilon)-b(t,W_m\varphi+V_m\varphi,x,\varepsilon)\right\| \le \beta_m\left\|V_m(\overline{\varphi}-\varphi)\right\|+\beta\left\|\overline{x}-x\right\|;$$

$$\left\|Q(t,W_m\varphi+V_m\overline{\varphi,x},\mu)-Q(t,W_m\varphi+V_m\varphi,x,\mu)\right\| \le \sigma_m\left\|V_m(\overline{\varphi}-\varphi)\right\|+\sigma\left\|\overline{x}-x\right\|; \qquad (4)$$

$$\left\|R(t_1,t,W_m\varphi+V_m\overline{\varphi,x},\mu)-R(t_1,t,W_m\varphi+V_m\varphi,x,\mu)\right\| \le \chi_m\left\|V_m(\overline{\varphi}-\varphi)\right\|+\chi\left\|\overline{x}-x\right\|,$$

где положительные постоянные β_m,σ_m,χ_m коэффициенты усиленного условия Липшица, монотонно сходящиеся к нулю при $m\to\infty$. Отсюда видно, что

$$b(t,\varphi,x,\varepsilon)\in\pi(\overline{b}_0,\beta_m),P(t,\varphi)\in\pi(P_0,P_m);$$

$$Q(t,\varphi,x,\mu)\in\pi(\overline{Q}_0,\sigma_m),R(t_1,t,\varphi,x,\mu)\in\pi(\overline{R_0},\chi_m) \qquad (5)$$

равномерно по $x\in R_\Delta,\varepsilon\in E_{\varepsilon_0},\mu\in M_{\mu_0}$,

где $\overline{b}_0=\beta\Delta+b_0;\overline{Q_0}=\sigma\Delta+Q_0;\overline{R_0}=\chi\Delta+R_0$.

Пусть $f(t,\varphi)\in H_n(\Delta,\delta_n)$. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$D_\varepsilon^f=\frac{\partial}{\partial t}+[a^0(t)+\varepsilon b(t,\varphi,f(t,\varphi),\varepsilon)]\frac{\partial}{\partial\varphi}. \qquad (6)$$

Для сокращения записи введем

$$r(t,\varphi,\varepsilon)=b(t,\varphi,f(t,\varphi),\varepsilon).$$

Заметим, что коэффициентами усиленного условия Липшица для вектор-функции $r(t,\varphi,\varepsilon)$ являются $r_m=\beta_m+\beta\delta_m$.

Пусть $\lambda_f(t_0,t,\varphi)$ – характеристическая функция оператора D_ε^f, которая удовлетворяет интегральному уравнению

$$\lambda_f(t_0,t,\varphi)=\varphi+\int_t^{t_0}[a^0(s)+\varepsilon r(s,\lambda_f(s,t,\varphi),\varepsilon)]ds.$$

Для характеристической функции $\lambda_f(t_0,t,\varphi)$ имеют место оценки, аналогичные соотношениям вида I(a-b) и 1^0-9^0 [1,с.77,158-162].

Рассмотрим линеаризованное уравнение:

$$D_\varepsilon^f x=P(t,\varphi)x. \qquad (7)$$

Пусть $X_f^*(t_0,t,\varphi)$-матрица типа Грина для уравнения (7) .Будем считать, что выполняется группа оценок , аналогичным оценкам II(a-b) [1].

3. Рассмотрим оператор T, отображающий каждую вектор-функцию $f(t,\varphi)\in H_n(\Delta,\delta_m)$ в вектор-функцию

$$T(f)=\mu\int_{-\infty}^{\infty}X_f^*(s,t,\varphi)Q\{s,\lambda_f,f(s,\lambda_f),\mu)ds+$$

$$+\mu\int_{-\infty}^{\infty}X_f^*(s,t,\varphi)\int_{-\infty}^{\infty}R(t_1,s,\lambda_f,f(t_1,\lambda_f),\mu)\psi(s-t_1)dt_1ds$$

Будем изучать

$$I^*(f)=F_f^*(t,\varphi)=\mu\int_{-\infty}^{\infty}X_f^*(s,t,\varphi)\int_{-\infty}^{\infty}R(t_1,s,\lambda_f,f(t_1,\lambda_f),\mu)\psi(s-t_1)dt_1ds.$$

Для вектор-функции $F_f^*(t,\varphi)$ выполняются соотношения вида:

$a)$ $\left\|F_f^*(t,\varphi)\right\|\le\mu L\overline{R_0}K$, где $\overline{R_0}=\chi\Delta+R_0$;

$$b)\ \left\|F_f^*(t,W_m\varphi+V_m\bar{\varphi})-F_f^*(t,W_m\varphi+V_m\varphi)\right\|\le\frac{2\mu K}{\gamma}[B(1+\frac{2r_m}{r_0}*(\chi_m+\chi\sigma_m)+B\frac{r_m}{r_0}*(\chi_m+\chi\sigma_m)+$$

$$+4L\overline{R_0}(BP_m+B^*\gamma\frac{r_m}{r_0})]\left\|V_m(\bar{\varphi}-\varphi)\right\|$$

$$c)\ \left\|F_f^*(t+\tau,\varphi+\vartheta)-F_f^*(t,\varphi)\right\|\le\mu LK\{2L\overline{R_0}\left\|\Delta_{\tau,\vartheta}P\right\|+\left\|\Delta_\tau^\vartheta R\right\|+$$

$$+\left\|\Delta_{\tau,\vartheta}f\right\|+2[RL^*+\frac{2(\chi_0+\chi\sigma_0)}{\gamma}]\left\|\Delta_{\tau,\vartheta}a\right\|\}:\quad , \qquad (8)$$

$$d)\ \left\|F_f^*(t,\varphi)-F_g^*(t,\varphi)\right\|\le\frac{2\mu K}{r_0}(2B*\overline{R_0}\beta+[(\chi_0+\varphi\sigma_0)\beta+r_0\chi]\}\left\|f-g\right\|_H$$

Полагая теперь $\Phi_f(t,\varphi)=F_f(t,\varphi)+F_f^*(t,\varphi)$, можно записать $\left\|\Phi_f(t,\varphi)\right\|=\left\|F_f(t,\varphi)\right\|+\left\|F_f^*(t,\varphi)\right\|$. Из оценок III(a-d) [1] и (8) следует, что существует такое число $\bar{\mu}>0$, для которого при всех $0<\mu<\bar{\mu}$ выполняются соотношения:

1) $\left\|\Phi_f(t,\varphi)\right\|\le\Delta$,

2) $\left\|\Phi_f(t,W_m\varphi+V_m\bar{\varphi})-\Phi_f(t,W_m\varphi+V_m\varphi)\right\|\le\delta_m\left\|V_m(\bar{\varphi}-\varphi)\right\|$,

3) $\left\|\Phi_f(t+\tau,\varphi+\theta)-\Phi_f(t,\varphi)\right\|\le\eta$,

4) $\left\|\Phi_f(t,\varphi)-\Phi_g(t,\varphi)\right\|\le\frac{1}{2}\left\|f-g\right\|_H$.

Тем самым приходим к утверждению теоремы 1.

Теорема 1. Если уравнение (7) некритическое относительно класса $H_n(\Delta,\delta_m)$ и выполнены условия (N_∞), (S_∞) для уравнения (1), то для всех значений $0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}$, $0<\mu<\bar{\mu}$ уравнение (1) имеет единственное почти многопериодическое решение из класса $H_n(\Delta,\delta_m)$, сходящиеся при $\mu\to0$ в нулевой вектор.

4. Рассмотрим укороченную по φ систему, получающуюся из (1):

$$D_m^y y=P(t,W_m\varphi)y+\mu Q\{t,W_m\varphi,y,\mu)+\mu\int_{-\infty}^{\infty}R[t_1,t,W_m\varphi,y,\mu]\psi(t-t_1)dt_1, \qquad (9)$$

где $D_m^y=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(t,W_m\varphi,y,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\varphi_k}$ -укороченный дифференциальный оператор. Тогда $\xi_m(t_0,t,\varphi)=W_m\varphi+\int_t^{t_0}[W_ma^0(s)+\varepsilon W_mr(s,\xi_m(s,t,\varphi),\varepsilon)]ds$ является характеристической функцией оператора

$$D_m^y=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(t,W_m\varphi,y,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\varphi_k}.$$

Пусть $Y^*(t_0,t,\varphi)$ - матрица типа Грина для линеаризованного однородного уравнения:

$$D_m^f y=P(t,W_m\varphi)y \qquad (10)$$

удовлетворяющая условиям:

$$\left\|Y^*(t_0,t,\varphi)\right\|\le Be^{-\gamma|t-t_0|},$$

$$\left\|\frac{\partial Y^*(t_0,t,\varphi)}{\partial\varphi}\right\|\le Be^{-\frac{\gamma}{2}|t-t_0|},$$

для $m>m_0$,где m_0 - достаточно большое натуральное число.

Доказана следующая теорема по существовании и единственности почти многопереодического решения данной системы в указанном классе для достаточно малых μ. Далее показывается, что почти многопериодическое решение основной системы может быть равномерно аппроксимировано почти многопериодическим решением системы по μ вида:

$$D_m^y y = P(t, W_m\varphi)y + \mu Q\{t, W_m\varphi, y, \mu) + \mu \int_{-\infty}^{\infty} R[t_1, t, W_m\varphi, y, \mu]\psi(t - t_1)dt_1$$

Теорема 2. Если уравнение (10)-некритическое и выполнены условия (N_∞), (S_∞) для величин $\mathbf{b}(\mathbf{t}, \varphi, \mathbf{x}, \varepsilon), P(t, \varphi), a^0(t), Q(t, \varphi, x, \mu), R(t_1, t, \varphi, x, \mu)$ тогда уравнения (1) и (9) при $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}$ а при, $0 < \mu < \overline{\mu}$ имеют единственные почти многопериодическое решение $x_m^*(t, \varphi, \varepsilon, \mu)$, $y_m^*(t, \varphi, \varepsilon, \mu)$ соответственно, причем имеет место соотношение

$$\lim_{m \to \infty} y_m^*(t, \varphi, \varepsilon, \mu) = x^*(t, \varphi, \varepsilon, \mu)$$

в смысле сходимости по норме [3],

где $y_m^*(t, \varphi, \varepsilon, \mu) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} y^*(s, t, W_m\varphi) Q\{s, W_m\xi_m, y^*(s, \xi_m); \mu\} ds$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Умбетжанов Д.У. Почти периодические решения эволюционных уравнений. Алма-ата, Наука, 1990, 188 с.
2. Жаутыков О.А. Счетные системы дифференциальных уравнений и их приложения // Дифференциальные уравнения. 1965,Т.I, №2, С. 162-170.
3. Исмагулова Р.С. О применении метода укорочения к построению почти многопериодического решения одной системы интегродифференциальных уравнений частных производных // Алма-Ата, 1987, 25 с. Деп. в ВИНИТИ 3.07.87.№5474-В.87 Деп.