где $c=\dfrac{2\tau_w+\tau}{\chi(\tau_p\tau+2)}$, $c>0$, $\tau_w>0$, $\tau_p>0$, $\chi\ge 0$, $\tau>0$, $R=\chi(\tau_w\tau+2)$,

$$f(p^m(x),p^{m-1}(x),\Delta p^{m-1}(x))=-\frac{4\tau_w}{R}p^m(x)+\frac{2\tau_w-\tau}{R}p^{m-1}(x)+\frac{\chi\tau_p\tau}{R}\Delta p^{m-1}(x).$$

Смешанная задача (7) для уравнения Гельмгольца (6) на временных слоях $m=1,...,M$ решается тремя методами: после дискретизации по пространственным переменным «блужданиями по решеткам» методов Монте–Карло; «блужданиями по сферам» методов Монте–Карло; вероятностно–разностным методом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Молокович Ю.М., Осипов П.П. Основы теории релаксационной фильтрации. – Казань: Издательство Казанского университета, 1987, 106 с.
2. Михайлов Г.А., Сабельфельд К.К. Решение краевых задач методом Монте-Карло. Новосибирск: Наука, 1980, 174 с.
3. Ермаков С.М., Некруткин В.В., Сипин А.С. Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. – М.: Наука, 1984, 205 с.
4. Кушнер Г. Дж. Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. – М.: Наука, 1985, 222 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНО НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

THE STUDY OF BOUNDARY PROBLEMS
FOR SPECTRALLY LOADED HEAT EQUATION

Б.А. Шалдыкова
Рудненский индустриальный институт, г.Рудный,Казахстан

1. Постановки задач. Рассмотрим в области Q = $\{x\in R_+, t\in R_+\}$ граничные задачи для спектрально нагруженного уравнения теплопроводности:

$$L_\lambda u=f\Leftrightarrow\begin{cases}u_t-u_{xx}+\lambda u_{xx}(x,t)\big|_{x=\alpha(t)}=f,\\ u(x,0)=0,u(0,t)=0;\end{cases}\tag{1}$$

$$L_\lambda^* v=g\Leftrightarrow\begin{cases}-v_t-v_{xx}+\overline{\lambda}\,\delta''(x-\alpha(t))\otimes\displaystyle\int_0^\infty v(\xi,t)d\xi=g,\\ v(x,\infty)=0,v(0,t)=v(\infty,t)=v_x(\infty,t)=0;\end{cases}\tag{2}$$

Заданные функции выбираются из классов

$$(\alpha(t))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}\ f\in L_1(Q),\ (\alpha(t))^{-1}(x+\sqrt{t})\ g\in L_\infty(Q)),$$

$$(\alpha(t))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right)_{|x=\alpha(t)}\in L_1(R_+).\tag{3}$$

Функциональные классы U и V для решений этих граничных задач определены следующим образом:

$$U=\left\{u\left|\alpha(t)(x+\sqrt{t})^{-1}u,(\alpha(t))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}(u_t-u_{xx})\in L_1(Q),(\alpha(t))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}u_{xx}(x,t)_{|x-\alpha(t)}\in L_1(R_+),\right.\right.\tag{4}$$

$$V=\left\{v\left|(\alpha(t))^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}v,(\alpha(t))^{-1}(x+\sqrt{t})(v_t+v_{xx})\in L_\infty(Q),(\alpha(t))^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\int_0^\infty v(\xi,t)d\xi\in L_\infty(R_+)\right.\right\}.\tag{5}$$

В задачах (1), (2) предполагается, что движение точки нагрузки описывается функцией $x = \alpha(t)$, $\alpha(t) = [t(1+\alpha_0(t))]^{\omega}, \omega < \dfrac{1}{2}$ при условии $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\alpha(t)}{\sqrt{t}} = \infty$.

Требуется исследовать вопросы разрешимости граничных задач (1) и (2).

2. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям. Сведем граничные задачи (1) и (2) к исследованию союзных особых интегральных уравнений Вольтерра второго рода. С этой целью обратим дифференциальную часть в граничной задаче (1) и будем иметь:

$$u(x,t) = -\lambda\int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)u_{\eta\eta}(\eta,\tau)\Big|_{\eta=\alpha(\tau)}d\tau + \int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (6)$$

где $G(x,\xi,t-\tau)$ - функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности,

$$K_0(x,t-\tau) = \int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)d\xi = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right).$$

Из соотношения (6) следует, что для нахождения решения задачи (1) достаточно определить нагруженное слагаемое $u_{xx}(x,t)_{|x=\alpha(t)}$. Для этого продифференцируем обе части соотношения (6) по переменной x дважды и введем следующие обозначения:

$$\mu(t) = (\alpha(t))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}u_{xx}(x,t)_{|x=\alpha(t)},$$

$$K_2(t,\tau) = \left[\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right]^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}\cdot\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(\alpha(t))^2}{4(t-\tau)}\right),$$

$$f_1(t) = (\alpha(t))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right)_{|x=\alpha(t)}.$$

Получим интегральное уравнение

$$\mathrm{K}_{2\lambda}\mu \equiv (I-\lambda\mathrm{K}_2)\mu \equiv \mu(t) - \lambda\int_0^t K_2(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = f_1(t),\ t\in R_+. \qquad (7)$$

Ядро интегрального уравнения $K_2(t,\tau)$ обладает следующими свойствами:

1^0 ядро $K_2(t,\tau)$ непрерывно, $0<\tau<t<\infty$;

2^0 ядро $K_2(t,\tau)\geq 0$, $0<\tau<t<\infty$;

3^0 справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t\to+0}\int_0^t K_2(t,\tau)d\tau = 0. \qquad (8)$$

Теперь перейдем к рассмотрению сопряженной краевой задачи (2) и, обращая ее дифференциальную часть, получим:

$$v(x,t) = -\bar{\lambda}\int_t^\infty\int_0^\infty G(x,\xi,\tau-t)\delta''(\xi-\alpha(\tau))\otimes\int_0^\infty v(\eta,\tau)d\eta d\xi d\tau + \int_t^\infty\int_0^\infty G(x,\xi,\tau-t)g(\xi,\tau)d\xi d\tau\cdot \qquad (9)$$

Интегрируя соотношение (9) по переменной x от 0 до ∞ и обозначая

$$\nu(t) = (\alpha(t))^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\int_0^\infty \nu(\eta,t)d\eta,$$

получим интегральное уравнение

$$\mathrm{K}^*_{2\lambda}\nu \equiv (I-\bar{\lambda}\mathrm{K}^*_2)\nu \equiv \upsilon(t) - \bar{\lambda}\int_t^\infty K_2(\tau,t)\upsilon(\tau)d\tau = g_1(t),\ t\in R_+, \qquad (10)$$

где были использованы следующие обозначения:

$$K_2(\tau,t)=\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{б(ф)}{2\sqrt{p}(\tau-t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(б(ф))^2}{4(ф-t)}\right),$$

$$g_1(t)=(\alpha(t))^{\frac{3/2.-\omega}{\omega}}\int_t^\infty\int_0^\infty erf\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau-t}}\right)g(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Отметим, что ядро сопряженного интегрального уравнения (10) обладает следующим свойством:

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty K_2(\tau,t)d\tau=1\cdot \tag{11}$$

Из предельного соотношения (11) следует, что норма интегрального оператора, действующего в пространстве ограниченных и непрерывных функций и определенного ядром $K^*_{2\lambda}$, равна единице (хотя ядро $K^*_{2\lambda}$ имеет интегрируемую особенность).Это принципиальным образом отличает уравнение (10) от уравнений Вольтерра второго рода.

Таким образом, решение сопряженных граничных задач (1), (2) сведено к исследованию пары союзных интегральных уравнений (7) и (10).

3. Исследование характеристических интегральных уравнений. Построим характеристические интегральные уравнения, соответствующие интегральным уравнениям (7) и (10):

$$\mathrm{K}_\lambda\mu\equiv(I-\lambda\mathrm{K})\mu\equiv\mu(t)-\lambda\int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=f_1(t),\ t\in R_+, \tag{12}$$

$$\mathrm{K}^*_\lambda\nu\equiv(I-\bar\lambda\mathrm{K}^*)\nu\equiv\upsilon(t)-\bar\lambda\int_t^\infty K(\tau,t)\upsilon(\tau)d\tau=g_1(t),\ t\in R_+, \tag{13}$$

где

$$K(\tau,t)=\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\cdot\frac{(1-2\omega)^{3/2}[\alpha(\tau)]^{-2}\left([\alpha(\tau)]^{\frac{1}{\omega}}\right)'}{2\sqrt{\pi}\left([\alpha(\tau)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-[\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)^{3/2}}\exp\left(-\frac{1-2\omega}{4\left([\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-[\alpha(\tau)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)}\right).$$

Ядро характеристического уравнения $K(\tau,t)$ обладает теми же свойствами, что и ядро $K_2(\tau,t)$ и для него справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty K(\tau,t)d\tau=1.$$

Комплексную плоскость параметра λ делим на непересекающиеся области

$$D_{2n}=\{D_n^{(1)}\cap D_n^{(2)}\}\setminus\bigcup_{k=-1}^{2n-1}D_k,\ D_{-1}=\varnothing,\ D_{2n+1}=\{D_n^{(1)}\cup D_n^{(2)}\}\setminus\bigcup_{k=0}^{2n}D_k,$$

где

$$D_n^{(1)}=\{\lambda:|\lambda|<\exp[(2n+1)\pi-\arg\lambda]\},\ D_n^{(2)}=\{\lambda:|\lambda|<\exp[2n\pi+\arg\lambda]\},\ n=0,1,2,...,$$

а числа N_1, N_2, z_k определены следующими соотношениями:

$$N_1=\left[\frac{\ln|\lambda|+\arg\lambda}{2\pi}\right],\ N_2=\left[\frac{\ln|\lambda|-\arg\lambda}{2\pi}\right],$$

$$z_k=s_k+i\sigma_k=2(\arg\lambda+2k\pi)\ln|\lambda|-i\left[\ln^2|\lambda|-(\arg\lambda+2k\pi)^2\right],k\in\mathrm{Z}.$$

Используя решения характеристических уравнений [2,3], получим основные результаты для особых интегральных уравнений (7) и (10) в виде следующих теорем:

Теорема 1. *Значения* $\lambda\in D_0$ *являются регулярными числами оператора* $\mathrm{K}^*_{2\lambda}$ *(10).*

Теорема 2. *Множество* $C \backslash D_0$ *составляет характеристические числа оператора* $K^*_{2\lambda}$ *(10). Причем, если* $\lambda \in D_m \bigcup \Gamma_{m-1} \backslash \{(-1)^m e^{m\pi}\}$, *m = 1,2,..., то* $dimKer(K^*_{2\lambda}) = \chi(\lambda)=m$; *и соответствующими собственными функциями будут решения уравнений*

$$v_{\lambda k}(t) = [\widehat{K}^*_\lambda]^{-1}\left[[\alpha(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} exp\left(-\frac{iz_k}{1-2\omega}[\alpha(t)]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)\right],\ k = 1,...,\ m= N_1 + N_2 + 1.$$

Теорема 3. *1. Каждое значение* $\lambda \in C$ *является регулярным числом оператора* $K_{2\lambda}$ *(7).*

2. Неоднородное интегральное уравнение (7) однозначно разрешимо при любой правой части $f_1(t)$, *если* $\overline{\lambda} \in D_0$.

3. Если $\lambda \in D_m \bigcup \Gamma_{m-1} \backslash \{(-1)^m e^{m\pi}\}$, *m = 1,2,..., то для однозначной разрешимости неоднородного интегрального уравнения (7), необходимо и достаточно, чтобы функции* $f_1(t)$ *удовлетворяли следующим условиям ортогональности:*

$$\int_0^\infty v_{\lambda k}(t) f_1(t)dt = 0,\ k = 1,...,\ m=\chi(\lambda)= N_1 + N_2 + 1.$$

4. Исследование граничных задач (1) и (2). Сформулируем полученные результаты по разрешимости граничных задач (1) и (2) в виде следующих теорем.

Теорема 4. *Если* $\lambda \in D_0$, *то для* $\forall f$ *граничная задача (1) имеет единственное решение* $u \in U$. *Если* $\lambda \in \{C \backslash D_0\} \bigcap \{D_m \bigcup \Gamma_{m-1} \backslash \{(-1)^m e^{m\pi}\}\}$, *то для однозначной разрешимости граничной задачи (1) в классе U необходимо и достаточно, чтобы функция* f *удовлетворяла условиям ортогональности:*

$$\int_0^\infty v_{\lambda k}(x,t) f(x,t)dxdt = 0,\ \text{k=1,...,m=}\chi(\lambda)\text{=} N_1 + N_2 + 1.$$

Теорема 5. *Если* $\lambda \in D_0$, *то для* $\forall g$ *граничная задача (2) имеет единственное решение* $v \in V$. *Если* $\lambda \in D_m \bigcup \Gamma_{m-1} \backslash \{ (-1)m\ exp\{m\pi\}$, *то для* $\forall g$ *граничная задача (2) имеет общее решение* $v \in V$, *состоящее из решений* $v_{одн.}(x,t)$ *однородного уравнения*

$$v_{одн}(x,t) = \sum_{k=1}^m c_k v_{\lambda k}(x,t),$$

плюс частного решения неоднородного уравнения

$$v_{част}(x,t) = -\overline{\lambda}\int_t^\infty (\alpha(\tau))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} K_0(x,t-\tau)[\widehat{K}^*_\lambda]^{-1}\widehat{g}(\tau)d\tau +$$

$$+\int_t^\infty\int_0^\infty (\alpha(\tau))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} G(x,\xi,t-\tau)\tau^{3/2-\omega} g(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амангалиева М.М., Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Граничные задачи для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности с приближением линии нагрузки в нуле или на бесконечности. // Диффереpц. уравнения. – 2011. – Т. 47. – № 2. – С. 231-243.
2. Дженалиев М.Т., Шалдыкова Б.А., Кусайынова Б.С. Жылуөтгізштік спектралды-жүктелген операторы үшін шекаралық есебі.1 // Вестн. Карагандинского ун-та. Сер. Математика. – 2010. – № 1 (57). – С.12-19.
3. Шалдыкова Б.А. Жылуөтгізштік спектралды-жүктелген операторы үшін шекаралық есебі. 2 //Вестн. Карагандинского ун-та. Сер. Математика. – 2010. – № 2 (58). – С.75-82.