О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ МЕТОДАМИ МОНТЕ–КАРЛО

ABOUT THE SOLUTION OF ONE MIXED TASK OF RELAKSATSIONAL FILTRATION BY THE METHOD OF MONTE-KARLO

Тастанов М.Г.

Костанайский государственный университет имени А. Байтурсынова,
Костанай, Казахстан

Постановка задачи. Рассматривается модель фильтрации по простейшему неравновесному закону в упругой пористой среде. В этой модели ядра релаксации закона фильтрации $F(t)$ и закона сжимаемости $\Phi(t)$ имеют вид:

$F(t)=\dfrac{\mu}{\kappa}\left\{t+(\tau_w-\tau_p)\left[1-\exp(-t/\tau_p)\right]\right\}\eta(t)$, $\quad \Phi(t)=\rho_0\beta\eta(t)$ и модель описывается следующей системой уравнений

$$\chi\cdot\Delta\left(p+\tau_p\frac{\partial p}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(p+\tau_w\frac{\partial p}{\partial t}\right), \tag{1}$$

$$-\frac{\kappa}{\mu}\operatorname{grad}\left(p+\tau_p\frac{\partial p}{\partial t}\right)=\vec{w}+\tau_w\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}, \tag{2}$$

где $\mu-$ вязкость жидкости, $\kappa-$ коэффициент проницаемости, $t-$ время, τ_w и τ_p- некоторые положительные постоянные равномерности времени, $\eta(t)-$ функция Хевисайда, $\eta(t)=\begin{cases}1 & \text{при } t>0\\ \dfrac{1}{2} & \text{при } t=0\\ 0 & \text{при } t<0\end{cases}$, ρ_0- плотность жидкости в невозмущенных пластовых условиях, $\beta-$ коэффициент упругоёмкости пласта, $\chi=\dfrac{\kappa}{\mu\beta}-$ коэффициент пьезопроводности пласта, $\Delta-$ оператор Лапласа, $p(t,x)-$ давление, $\vec{w}(t,x)-$ вектор скорости фильтрации, [1].

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega\in R^3$ с границей $\partial\Omega$ следующую начально-граничную задачу для давления $p(t,x)$:

$$\chi\cdot\Delta\left(p+\tau_p\frac{\partial p}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(p+\tau_w\frac{\partial p}{\partial t}\right), \tag{3}$$

$$p(0,x)=0, \tag{4}$$

$$a\cdot p(t,x)+b\cdot\frac{\partial p(t,x)}{\partial\vec{n}}=\varphi(t,x),\quad 0<t\le T,\quad x\in\partial\Omega, \tag{5}$$

где a и $b-$ заданные постоянные, $\varphi(t,x)-$ заданная функция.

Дискретизируем (3) и (5), применяя неявную схему, только по временной переменной t, $0\le t\le T$, с шагом $\tau=\dfrac{T}{M}$, $t_n=\tau m$, $m=0,1,...,M$. Обозначим $p(t_m,x)\equiv p^m(x)$, $x\in\Omega$, и после несложного преобразования получим следующую конечноразностную смешанную задачу для уравнения Гельмгольца относительно давления в области $\Omega\in R^3$ для временных слоев $t_n=\tau m$, $m=0,1,...,M$:

$$\Delta p^{m+1}(x)-cp^{m+1}(x)=f(p^m(x),p^{m-1}(x),\Delta p^{m-1}(x)),\quad x\in\Omega,\quad m=1,2,...,M-1, \tag{6}$$

$$ap^m(x)+b\frac{\partial p^m(x)}{\partial\vec{n}}=\varphi^m(x),\quad x\in\partial\Omega,\quad m=0,1,...,M, \tag{7}$$

где $c = \dfrac{2\tau_w + \tau}{\chi(\tau_p \tau + 2)}$, $c > 0$, $\tau_w > 0$, $\tau_p > 0$, $\chi \ge 0$, $\tau > 0$, $R = \chi(\tau_w \tau + 2)$,

$$f(p^m(x), p^{m-1}(x), \Delta p^{m-1}(x)) = -\frac{4\tau_w}{R} p^m(x) + \frac{2\tau_w - \tau}{R} p^{m-1}(x) + \frac{\chi \tau_p \tau}{R} \Delta p^{m-1}(x).$$

Смешанная задача (7) для уравнения Гельмгольца (6) на временных слоях $m = 1,...,M$ решается тремя методами: после дискретизации по пространственным переменным «блужданиями по решеткам» методов Монте–Карло; «блужданиями по сферам» методов Монте–Карло; вероятностно–разностным методом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Молокович Ю.М., Осипов П.П. Основы теории релаксационной фильтрации. – Казань: Издательство Казанского университета, 1987, 106 с.
2. Михайлов Г.А., Сабельфельд К.К. Решение краевых задач методом Монте-Карло. Новосибирск: Наука, 1980, 174 с.
3. Ермаков С.М., Некруткин В.В., Сипин А.С. Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. – М.: Наука, 1984, 205 с.
4. Кушнер Г. Дж. Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. – М.: Наука, 1985, 222 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНО НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

THE STUDY OF BOUNDARY PROBLEMS FOR SPECTRALLY LOADED HEAT EQUATION

Б.А. Шалдыкова
Рудненский индустриальный институт, г.Рудный,Казахстан

1. Постановки задач. Рассмотрим в области Q = $\{x \in R_+, t \in R_+\}$ граничные задачи для спектрально нагруженного уравнения теплопроводности:

$$L_\lambda u = f \Leftrightarrow \begin{cases} u_t - u_{xx} + \lambda u_{xx}(x,t)\big|_{x=\alpha(t)} = f, \\ u(x,0) = 0, u(0,t) = 0; \end{cases} \tag{1}$$

$$L_\lambda^* v = g \Leftrightarrow \begin{cases} -v_t - v_{xx} + \bar{\lambda}\delta''(x - \alpha(t)) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)d\xi = g, \\ v(x,\infty) = 0, v(0,t) = v(\infty,t) = v_x(\infty,t) = 0; \end{cases} \tag{2}$$

Заданные функции выбираются из классов

$$(\alpha(t))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} f \in L_1(Q),\ (\alpha(t))^{-1}(x + \sqrt{t})\ g \in L_\infty(Q)),$$

$$(\alpha(t))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau \right)_{|x=\alpha(t)} \in L_1(R_+). \tag{3}$$

Функциональные классы U и V для решений этих граничных задач определены следующим образом:

$$U = \{u \big| \alpha(t)(x+\sqrt{t})^{-1}u, (\alpha(t))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}(u_t - u_{xx}) \in L_1(Q), (\alpha(t))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} u_{xx}(x,t)_{|x-\alpha(t)} \in L_1(R_+), \tag{4}$$

$$V = \left\{ v \left| (\alpha(t))^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} v, (\alpha(t))^{-1}(x+\sqrt{t})(v_t + v_{xx}) \in L_\infty(Q), (\alpha(t))^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \int\limits_0^\infty v(\xi,t)d\xi \in L_\infty(R_+) \right\}. \right. \tag{5}$$