Пусть K – коммутативное кольцо с единицей, E – K – модуль и E^* – дуальный к нему модуль/2, с. 172/. Обозначим через φ канонический гомоморфизм модуля $E \otimes E^*$ в End(E) /3, с. 254/.

Назовем псевдоотражением в E любой отличный от 1 элемент из End(E) вида

$$s_{x,y^*} = 1 - \varphi(x \otimes y^*),$$

где $x \in E$ и $y^* \in E^*$. Такой элемент s называется отражением, если можно выбрать x и y^*, связанные соотношением $\langle x, y^* \rangle = 2$. Покажем, что тогда $s^2=1$ и $s(x) = -x$.

$\varphi(x \otimes y^*)(x) = \langle x, y^* \rangle (x)$ /1, с. 82/

$s_{x,y^*}(x) = (1 - \varphi(x \otimes y^*))(x) = x - \varphi(x \otimes y^*)(x) = x - \langle x, y^* \rangle (x) = x - 2x = -x$,

откуда $s(x)=-x$

$s_{x,y^*}(s_{x,y^*}(x)) = s_{x,y^*}(-x) = (1 - \varphi(x \otimes y^*)(-x) =$

$= -x - \varphi(x \otimes y^*)(-x) = -x - \langle x, y^* \rangle (-x) = -x + 2x = x,$

откуда $s^2=1$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Бурбаки. Группы и алгебра Ли. Москва «МИР» 1972 г.
2. А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Москва «НАУКА» 1977 г.
3. А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. Линейная алгебра и геометрия. Москва «НАУКА» 1986 г.

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ С ВЕСОМ СУММЫ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ УОЛША СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ABOUT INTEGRABILITY WITH WEIGHT OF THE SUM OF RANKS ON SYSTEM UOLSH WITH SPECIAL FACTORS

Смирнова С.В.

Рудненский индустриальный институт,г. Рудный, Казахстан

Функции Уолша после появления компьютеров, в которых в основном используется представление чисел в двоичной системе счисления, нашли широкое применение в различных областях математики, физики, радиотехники, электроники.

Широкий диапазон применений обусловил большой интерес к функциям Уолша, теории рядов Фурье – Уолша и преобразованиям Фурье – Уолша.

Впервые ортонормированную систему функций, получившую название системы Уолша, построил в 1923 году американский математик Дж. Уолш. Функции этой системы являются ступенчатыми на отрезке $[0,1]$ и принимают всего два значения, а именно -1 и +1 на промежутках, концы которых являются двоично-рациональными числами.

В данном докладе приводятся условия, при которых сумма рядов по системе Уолша интегрируема с весом. При этом коэффициенты ряда принадлежат специальному классу.

Рассмотрим на полуинтервале $[0;1)$ функцию

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, \mathrm{x} \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \\ -1, \mathrm{x} \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

и продолжим ее периодически с периодом 1 на всю числовую ось.

Определим функции $r_k(x) = r_0(2^k x)$, k=0,1,2…. Функции $r_k(x)$ называются функциями Радемахера.

Систему функций Уолша в нумерации Пэли $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ получим в результате перемножений между собой функций Радемахера (см.[1]).

Представим натуральное число n в двоичной записи, т.е. в виде

$$n = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i \cdot 2^i,$$

где $\varepsilon_k=1$, $\varepsilon_i=0$ или 1 при i=0,1,…k.

Положим

$$w_n(x) = \prod_{i=0}^{k} (r_i(x))^{\varepsilon_i} .$$

Рассмотрим ряд по системе Уолша

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x). \tag{1}$$

Известен следующий результат.

Теорема A ([2]) Пусть $\{a_n \ge 0\} \in Q,\ 1 < p < \infty,\ 1 - p < \alpha < 1.$

Тогда

$$x^{-\alpha} |\psi(x)|^p \in L(0,\pi) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+p-2} a_n^p < \infty,$$

где

$$\psi(x) - \text{сумма синус или косинус рядов.}$$

Для M - класса монотонных убывающих последовательностей результаты приведены в работах R.P. BoasJr. [3], P.Heywood [4], для QM - класса квазимонотонных последовательностей в работе R.Askey, WaingerS. [5], для класса $GM(\overline{\beta})$ в работе С.Тихонова [6], для $GM(\beta^*)$ в работе D.S.Yu, P.ZhouandS.P.Zhou [7], где

$$GM(\beta) := \left\{ \{a_k\} : \sum_{k=n}^{2n} |\Delta a_k| \le C\beta_n \right\}$$

и

$$\overline{\beta}_n = |a_n|, \quad \beta_n^* = \sum_{k=[n/c]}^{[nc]} \frac{|a_k|}{k} \quad \text{для некоторого } c > 1.$$

В работах [6] и [8] показано, что

$$M \subseteq QM \subseteq GM(\overline{\beta}) \subseteq GM(\beta^*). \tag{2}$$

В работе M. Дьяченко и С.Тихонова [2] рассмотрены β – обобщенно монотонные коэффициенты.

Следуя С.Тихонову [6] будем говорить, что последовательность $\{a_k\} \in \overline{GM_\theta}$ если

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k| < C \cdot n^{\theta-1} \sum_{k=[n/c]}^{\infty} \frac{|a_k|}{k^\theta}, \quad \text{для некоторого } c > 1,$$

где

$\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$, $[t]$ – целая часть числа t.

При θ=1 определяют $\overline{GM} \equiv \overline{GM}_1$.

Согласно (2)

$$GM(\beta^*) \subseteq \overline{GM} \equiv \overline{GM}_1 \subseteq \overline{GM}_{\theta_2} \subseteq \overline{GM}_{\theta_1}, \quad 0 < \theta_1 \le \theta_2 \le 1.$$

Рассматривается ряд по системе Уолша (1), коэффициенты которого из класса $\overline{GM}_\theta$ – последовательности обобщенной монотонности.

Справедливы теоремы.

Теорема 1Пусть $f(x) -$ сумма ряда (1), $1 \le p < \infty$, $\{a_n \ge 0\} \in \overline{GM}_\theta$, $\theta \in (0,1]$, $1 - \theta \cdot p < \alpha < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+p-2} \cdot a_n^p < \infty$.

Тогда $\int_0^1 x^{-\alpha} |f(x)|^p dx < \infty$.

Теорема 2Пусть $f(x) -$ сумма ряда (1), $1 \le p < \infty$, $\{a_n \ge 0\} \in \overline{GM}_\theta$, $\theta \in (0,1]$, , $1 - \theta \cdot p < \alpha < 1$, $\int_0^1 x^{-\alpha} |f(x)|^p dx < \infty$.

Тогда $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} 2^{k(\alpha+p-1)} \cdot \left(\frac{1}{2^k} \sum_{\nu=2^k}^{2^{k+1}-1} a_\nu^p \right) < \infty$.

Следует отметить, что для рядов Уолша в теореме 2 необходимое условие для интегрируемости с весом выражено в терминах средних коэффициентов рассматриваемых рядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Walsh J.L. A closed set of normal orthogonal functions.Amer.J.Math. – 1923. – V.45. – P. 5-24.
2. Dyachenko M. and Tikhonov S.. Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria. St. mathematica 193(3). – 2009. P.285-306.
3. Boas R.P. Integrability of trigonometric series. Quat. J. Math. Oxford Ser. (2). – 3(1952). – P. 217-221.
4. HeywoodP. On the integrability of functions defined by trigonometric series. J.Math. – (1954). – P. 71-76.
5. Askey R, Wainger S. Integralibiti theorems for Fourier series. Duke Math. J.1966. – V.33. – № 1. P. 223-228.
6. Tikhonov S. Yu. Trigonometric series with general monotone coefficients.J.Math.Anal.№ 26 (2007). P. 721-735.
7. Yu D.S., Zhou P. and Zhou S.P. On L^p integrability and convergenseof trigonometric series. St. Math. – 182 (2007). – P. 215-226.
8. Tikhonov S. Yu.Best approximation and moduli of smmoothness: computation and equivalence theorems. Approx.Theory . – 153 (2008). – P. 19-39.