2. Боревич З.И., Шафаревич И.Р., Теория чисел. М: Наука, 1985 г. – 504 с.
3. Ван дер Варден Б.Л., Алгебра, М: Наука, 1975 г. – 648 с.
4. Винберг Э.Б., Курс алгебры. М: Факториал-пресс, 2001 г. – 544 с.
5. Девенпорт Г., Введение в теорию чисел. М: Наука, 1965 г. – 176 с.
6. Кострикин А.И., Введение в алгебру Часть 1. М: Наука, 1977 г. – 272 с.
7. Януш Г.Дж., Алгебраические числовые поля. Н.: Научная книга, 2001 г.– 248 с.

ПРИМЕРЫ ТЕНЗОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ НА МАЛЕНЬКИХ РАЗМЕРНОСТЯХ НАД ЭЛЕМЕНТАМИ ТЕЛ КВАТЕРНИОНОВ

EXAMPLES OF TENZORNY SPACES ON SMALL DIMENSIONS OVER ELEMENTS OF QUOTERNIONAL BODIES

Садыкова Б.Б.
Костанайский государственный педагогический институт г.Костанай, Казахстан

Рассмотрим R −модуль V и пусть V^* − двойственный R −модуль. Модули $T_q^p(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{p\ раз} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{q\ раз}$ которые принято называть пространствами q раз ковариантных и p раз контравариантных тензоров или, p и q если определены из контекста, просто *тензорным пространством*., [1]. Элементы тензорных пространств называются *тензорами* над V. Пусть $x \in T_q^p(V) = V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q}$ тогда:

- пара (p, q) обычно называется типом тензора x
- p называется контравариантной валентностью,
- q называется ковариантной валентностью,
- $p + q$ называется полной валентностью,
- тензоры, для которых $p = 0$, называются чисто ковариантными,
- тензоры, для которых $q = 0$, называются чисто контравариантными,
- тензоры, для которых $p, q > 0$, называются смешанными.

Вспомним, что большинство встречающихся нам до сих пор геометрических объектов являются тензорами различных типов.

- $T_0^0(V) = R$ −скаляры
- $T_0^1(V) = V$ −векторы
- $T_1^0(V) = V^*$ −ковекторы
- $T_1^1(V) = V \otimes V^*$ −линейные операторы.
- $T_2^0(V) = V^* \otimes V^* = (V^*)^{\otimes 2}$ − тензорный квадрат модуля V^*, элементы которого естественно интерпретируется как билинейные формы на V.

Перейдем теперь к тензорам большой валентности. Заметим, что чисто ковариантные и чисто контравариантные тензоры, иными словами, тензорные степени V^* и V, интерпретируются как полилинейные формы на V или на V^*, соответственно, см., [2].

- $T_3^0(V) = V^* \otimes V^* \otimes V^* = (V^*)^{\otimes 3}$ − тензорный куб модуля V^*.

Гораздо интереснее понять, а кому вспомнить, каким геометрическим объектом отвечают смешанные тензоры.

- $T_2^1(V) = V \otimes V^* \otimes V^*$.

Элементы пространства $T_2^1(V)$ представляют собой билинейные отображения $m: V \times V \to V$. Как мы уже упоминали, что в точности отображения, задающие на V структуру алгебры. При этом отображение m интерпретируется как умножение в алгебре, а билинейность выражает дистрибутивность умножения относительно сложения.

Элементы $x \in T_2^1(V)$, отвечают данному умножению m на V, называется структурным тензором алгебры (V, m). Кстати, заметим, что с точки зрения алгебраиста структура алгебры на V можно задать линейным отображением, [3]

$$V \otimes V \to V, x \otimes y \to xy.$$

- $T_1^2(V) = V \otimes V \otimes V^*$ —такое отображение обычно называются диагональным отображением.
- $T_3^1(V) = V \otimes V^* \otimes V^* \otimes V^*$ —тензор такого типа можно интерпретировать как структурные тензоры тернарных алгебр, в которых задано тернарное умножение $V \times V \times V \to V,$ сопоставляющее произведение не двум, а трем элементам. Начинающему не встречались нетривиальные примеры таких операций, однако они естественно возникают в теории неассоциативных алгебр, [4].
- $T_2^2(V) = V \otimes V \otimes V^* \otimes V^*$
- $T_3^2(V) = V \otimes V \otimes V^* \otimes V^* \otimes V^*.$

Такие операции естественно возникают в алгебре, и интенсивно изучаются, начиная с 1970-х годов, например структурой (2,2)-алгебры естественно снабжаются спинорные пространства, см. [5].

Построим для рассмотренных тензоров примеры тензорных пространств на маленьких размерностях над элементами тел кватернионов.

Рассмотрим V - четырехмерное векторное пространство с базисными элементами e, j, k, l над произвольным полем P. Элементами данного поля являются линейные комбинации вида $x = ex_0 + jx_1 + kx_2 + lx_3$, здесь e является единицей, то есть $e^2 = e,\ je = e,$ и т.д. …, и $l^2 = j^2 = k^2 = -1,$

$$jk = l, \quad kj = -l, \quad kl = j, \quad lk = -j, \quad lj = k, \quad jl = -k.$$

Зададим в V - четырехмерном векторном пространстве новую операцию $x \cdot y$ (в дальнейшем данную операцию будем обозначать через xy) и назовем специальным произведением. Определим условия, когда эта алгебра, полученная как расширение поля P, будет являться телом. Данную алгебру, как и пространство удобно обозначать, так же как и пространство через V, [6].

Рассматриваемая алгебра не является телом, но если рассматривать обратимые элементы этой алгебры, то очевидно, что они ведут себя также как элементы тела. Поэтому вычисления в мультипликативной подгруппе обратимых элементов совершенно аналогичны, вычислениям над телом.

Так как тела конструкции даже небольших размерностей, приводят к большим вычислениям, будем рассматривать кватернионы над полемZ_3= $Z/(mod3)$для того, чтобы можно было посчитать, используя элементы мультипликативной подгруппы состоящей из обратимых элементов полученной алгебры, которые ведут себя, так же как и элементы тела, [6].

Элементы тензорного пространства буду являться кватернионовы над полем Z_3.

- $T_0^1(K) = a \otimes b(2e + j + k + l) = 2a(e) + a(j) + a(k) + a(l)$

Если зададим для этого пространства, значения билинейной формы:

$$\begin{pmatrix} a(e) & a(j) \\ a(k) & a(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

мы вычислим один из элементов пространства: $T_0^1(K) = 2 + 0 + 2 + 1 = 5 \underset{3}{\equiv} 2$

- Аналогично и для $T_1^0(K) = a \otimes b(e^* + 2j^* + 2k^* + l^*) = b(e^*) + 2b(j^*) + 2b(k^*) + b(l^*)$

$$\begin{pmatrix} a(e^*) & a(j^*) \\ a(k^*) & a(l^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_1^0(K) = 1 + 4 + 4 = 9 \underset{3}{\equiv} 0$$

- $T_1^1(K) = a \otimes b(2e + 2j + k + l, e + j + 2k + l) = a(2e + 2j + k + l)b(e^* + 2j^* + 2k^* + l^*) = \big(2a(e) + 2a(j) + a(k) + a(l)\big)\big(b(e^*) + 2b(j^*) + 2b(k^*) + b(l^*)\big)$, здесь значение билинейные форм возьмем из $T_0^1(K)$ и $T_1^0(K)$, получим:

$$T_1^1(K) = (2 + 0 + 2 + 1)(1 + 4 + 4 + 0) = 5 \cdot 9 = 45 \underset{3}{\equiv} 0$$

- $T_2^1(K) = a \otimes b(2e + j + 2k + l, 2e^* + 2j^* + 2k^* + l^*, e^* + 2k^* + l^*) = a(2e + j + 2k + l)b(2e^* + 2j^* + 2k^* + l^*, e^* + 2k^* + l^*) = (2a(e) + a(j) + 2a(k) + a(l))(2(e^*, e^*) + 4(e^*, k^*) + 2(e^*, l^*) + 2(j^*, e^*) + 4(j^*, k^*) + 2(j^*, l^*) + 2(k^*, e^*) + 4(k^*, k^*) + 2(k^*, l^*) + (l^*, e^*) + 2(l^*, k^*) + (l^*, l^*)$.

$$\begin{pmatrix} a(e^*, e^*) & a(e^*, j^*) & a(e^*, k^*) & a(e^*, l^*) \\ a(j^*, e^*) & a(j^*, j^*) & a(j^*, k^*) & a(j^*, l^*) \\ a(k^*, e^*) & a(k^*, j^*) & a(k^*, k^*) & a(k^*, l^*) \\ a(l^*, e^*) & a(l^*, j^*) & a(l^*, k^*) & a(l^*, l^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$T_2^1(K) = (2 + 0 + 4 + 1)(4 + 8 + 0 + 0 + 4 + 0 + 2 + 8 + 0 + 2 + 0 + 1) = 7 \cdot 29 = 203 \underset{3}{\equiv} 2$

- $T_1^2(K) = a \otimes b(2e + j + 2k + l, 2e + j + k, 2e^* + 2j^* + l^*) = a(2e + j + 2k + l, 2e + j + k)b(e^* + 2j^* + 2k^* + l^*) = \big(4(e, e) + 2(e, j) + 2(e, k) + 2(j, e) + (j, j) + (j, k) + 4(k, e) + 2(k, j) + 2(k, k) + 2(l, e) + (l, j) + (l, k)\big)\big(b(e^*) + 2b(j^*) + 2b(k^*) + b(l^*)\big)$

$$\begin{pmatrix} a(e, e) & a(e, j) & a(e, k) & a(e, l) \\ a(j, e) & a(j, j) & a(j, k) & a(j, l) \\ a(k, e) & a(k, j) & a(k, k) & a(k, l) \\ a(l, e) & a(l, j) & a(l, k) & a(l, l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$T_1^2(K) = (0 + 4 + 4 + 0 + 2 + 1 + 4 + 4 + 0 + 4 + 0 + 1)(1 + 4 + 4 + 1) = 24 \cdot 10 = 240 \underset{3}{\equiv} 0.$

- $T_2^2(K) = a \otimes b(2e + j + 2k + l, 2e + j + k, 2e^* + 2j^* + 2k^* + l^*, e^* + 2k^* + l^*) = a(2e + j + 2k + l, 2e + j + k)b(2e^* + 2j^* + 2k^* + l^*, e^* + 2k^* + l^*) = \big(4(e, e) + 2(e, j) + 2(e, k) + 2(j, e) + (j, j) + (j, k) + 4(k, e) + 2(k, j) + 2(k, k) + 2(l, e) + (l, j) + (l, k)\big)(2(e^*, e^*) + 4(e^*, k^*) + 2(e^*, l^*) + 2(j^*, e^*) + 4(j^*, k^*) + 2(j^*, l^*) + 2(k^*, e^*) + 4(k^*, k^*) + 2(k^*, l^*) + (l^*, e^*) + 2(l^*, k^*) + (l^*, l^*)$

$T_2^2(K) = (0 + 4 + 4 + 0 + 2 + 1 + 4 + 4 + 0 + 4 + 0 + 1)(4 + 8 + 0 + 0 + 4 + 0 + 2 + 8 + 0 + 2 + 0 + 1) = 24 \cdot 29 = 696 \underset{3}{\equiv} 0.$

- $T_3^0 = a \otimes b = (e^* + j^* + k^*, e^* + 2j^* + 2k^* + l^*, 2e^* + j^* + l^*) = b(e^1(x_1)e^* + e^2(x_1)j^* + e^3(x_1)k^* + e^4(x_1)l^*,\ e^1(x_2)e^* + e^2(x_2)j^* + e^3(x_2)k^* + e^4(x_2)l^*, e^1(x_3)e^* + e^2(x_3)j^* + e^3(x_3)k^* + e^4(x_3)l^*) = 2b(e^*, e^*, e^*) + b(e^*, e^*, j^*) + b(e^*, e^*, l^*) + 4b(e^*, j^*, e^*) + 2b(e^*, j^*, j^*) + 2b(e^*, j^*, l^*) + 4b(e^*, k^*, e^*) + 2b(e^*, k^*, j^*) + 2b(e^*, k^*, l^*) + 2b(e^*, l^*, e^*) + b(e^*, l^*, j^*) + b(e^*, l^*, l^*) + 2b(j^*, e^*, e^*) + b(j^*, e^*, j^*) + b(j^*, e^*, l^*) + 4b(j^*, j^*, e^*) + 2b(j^*, j^*, j^*) + 2b(j^*, j^*, l^*) + 4b(j^*, k^*, e^*) + 2b(j^*, k^*, j^*) + 2b(j^*, k^*, l^*), +2b(j^*, l^*, e^*) + b(j^*, l^*, j^*) + b(j^*, l^*, l^*) + 2b(k^*, e^*, e^*) + b(k^*, e^*, j^*) + b(k^*, e^*, l^*) + 4b(k^*, j^*, e^*) + 2b(k^*, j^*, j^*) + 2b(k^*, j^*, l^*) + 4b(k^*, k^*, e^*) + 2b(k^*, k^*, j^*) + 2b(k^*, k^*, l^*) + 2b(k^*, l^*, e^*) + b(k^*, l^*, j^*) + b(k^*, l^*, l^*)$

$$\begin{pmatrix} b(e^*,e^*,e^*) & b(e^*,e^*,j^*) & b(e^*,e^*,k^*) & b(e^*,e^*,l^*) & b(e^*,j^*,e^*) & b(e^*,j^*,j^*) & b(e^*,j^*,k^*) & b(e^*,l^*,l^*) & b(e^*,k^*,e^*) & b(e^*,k^*,j^*) & b(e^*,k^*,k^*) & b(e^*,k^*,l^*) & b(e^*,l^*,e^*) & b(e^*,l^*,j^*) & b(e^*,l^*,k^*) & b(e^*,l^*,l^*) \\ b(j^*,e^*,e^*) & b(j^*,e^*,j^*) & b(j^*,e^*,k^*) & b(j^*,e^*,l^*) & b(j^*,j^*,e^*) & b(j^*,j^*,j^*) & b(j^*,j^*,k^*) & b(j^*,j^*,l^*) & b(j^*,k^*,e^*) & b(j^*,k^*,j^*) & b(j^*,k^*,k^*) & b(j^*,k^*,l^*) & b(j^*,l^*,e^*) & b(j^*,l^*,j^*) & b(j^*,l^*,k^*) & b(j^*,l^*,l^*) \\ b(k^*,e^*,e^*) & b(k^*,e^*,j^*) & b(k^*,e^*,k^*) & b(k^*,e^*,l^*) & b(k^*,j^*,e^*) & b(k^*,j^*,j^*) & b(k^*,j^*,k^*) & b(k^*,j^*,l^*) & b(k^*,k^*,e^*) & b(k^*,k^*,j^*) & b(k^*,k^*,k^*) & b(k^*,k^*,l^*) & b(k^*,l^*,e^*) & b(k^*,l^*,j^*) & b(k^*,l^*,k^*) & b(k^*,l^*,l^*) \\ b(l^*,e^*,e^*) & b(l^*,e^*,j^*) & b(l^*,e^*,k^*) & b(l^*,e^*,l^*) & b(l^*,j^*,e^*) & b(l^*,j^*,j^*) & b(l^*,j^*,k^*) & b(l^*,j^*,l^*) & b(l^*,k^*,e^*) & b(l^*,k^*,j^*) & b(l^*,k^*,k^*) & b(l^*,k^*,l^*) & b(l^*,l^*,e^*) & b(l^*,l^*,j^*) & b(l^*,l^*,k^*) & b(l^*,l^*,l^*) \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$T_3^0 = 2 + 2 + 2 + 8 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 8 + 2 + 2 + 0 + 0 + 4 + 2 + 1 + 1 + 0 + 1 + 2 + 4 + 4 + 4 + 4 + 0 + 0 + 4 + 1 + 2 = 81 \underset{3}{\equiv} 0.$

- $T_3^1 = a \otimes b = (e + 2j + k + 2l, e^* + k^*, e^* + 2j^* + k^* + l^*, 2e^* + j^* + l^*) = a(e + 2j + k + 2l)\, b(e^* + j^* + k^*, e^* + 2j^* + 2k^* + l^*, 2e^* + j^* + l^*) = (a(e) + 2a(j) + a(k) + 2a(k))(2b(e^*, e^*, e^*) + b(e^*, e^*, j^*) + b(e^*, e^*, l^*) + 4b(e^*, j^*, e^*) + 2b(e^*, j^*, j^*) + 2b(e^*, j^*, l^*) + 2b(e^*, k^*, e^*) + b(e^*, k^*, j^*) + b(e^*, k^*, l^*) + 2b(e^*, l^*, e^*) + b(e^*, l^*, j^*) + b(e^*, l^*, l^*) + 2b(k^*, e^*, e^*) + b(k^*, e^*, j^*) + b(k^*, e^*, l^*) + 4b(k^*, j^*, e^*) + 2b(k^*, j^*, j^*) + 2b(k^*, j^*, l^*) + 2b(k^*, k^*, e^*) + b(k^*, k^*, j^*) + b(k^*, k^*, l^*) + 2b(k^*, l^*, e^*) + b(k^*, l^*, j^*) + b(k^*, l^*, l^*)$.

$$\begin{pmatrix} a(e) & a(j) \\ a(k) & a(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b(e^*,e^*,e^*) & b(e^*,e^*,j^*) & b(e^*,e^*,k^*) & b(e^*,e^*,l^*) & b(e^*,j^*,e^*) & b(e^*,j^*,j^*) & b(e^*,j^*,k^*) & b(e^*,l^*,l^*) & b(e^*,k^*,e^*) & b(e^*,k^*,j^*) & b(e^*,k^*,k^*) & b(e^*,k^*,l^*) & b(e^*,l^*,e^*) & b(e^*,l^*,j^*) & b(e^*,l^*,k^*) & b(e^*,l^*,l^*) \\ b(j^*,e^*,e^*) & b(j^*,e^*,j^*) & b(j^*,e^*,k^*) & b(j^*,e^*,l^*) & b(j^*,j^*,e^*) & b(j^*,j^*,j^*) & b(j^*,j^*,k^*) & b(j^*,j^*,l^*) & b(j^*,k^*,e^*) & b(j^*,k^*,j^*) & b(j^*,k^*,k^*) & b(j^*,k^*,l^*) & b(j^*,l^*,e^*) & b(j^*,l^*,j^*) & b(j^*,l^*,k^*) & b(j^*,l^*,l^*) \\ b(k^*,e^*,e^*) & b(k^*,e^*,j^*) & b(k^*,e^*,k^*) & b(k^*,e^*,l^*) & b(k^*,j^*,e^*) & b(k^*,j^*,j^*) & b(k^*,j^*,k^*) & b(k^*,j^*,l^*) & b(k^*,k^*,e^*) & b(k^*,k^*,j^*) & b(k^*,k^*,k^*) & b(k^*,k^*,l^*) & b(k^*,l^*,e^*) & b(k^*,l^*,j^*) & b(k^*,l^*,k^*) & b(k^*,l^*,l^*) \\ b(l^*,e^*,e^*) & b(l^*,e^*,j^*) & b(l^*,e^*,k^*) & b(l^*,e^*,l^*) & b(l^*,j^*,e^*) & b(l^*,j^*,j^*) & b(l^*,j^*,k^*) & b(l^*,j^*,l^*) & b(l^*,k^*,e^*) & b(l^*,k^*,j^*) & b(l^*,k^*,k^*) & b(l^*,k^*,l^*) & b(l^*,l^*,e^*) & b(l^*,l^*,j^*) & b(l^*,l^*,k^*) & b(l^*,l^*,l^*) \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$T_3^1 = (2+4+2+2)(2+2+2+8+2+2+2+1+1+2+2+1+0+1+2+4+4+4+2+0+0+4+1+2) = 10 \cdot 51 = 510 \underset{3}{\equiv} 0$

- $T_3^2 = a \otimes b = (e+2j+k+2l, e+j+2k+l, e^*+j^*+k^*, e^*+2j^*+2k^*+l^*, 2e^*+j^*+l^*) = a(e+2j+k+2l, e+j+2k+l)\, b(e^*+j^*+k^*, e^*+2j^*+2k^*+l^*, 2e^*+j^*+l^*) = ((e,e)+(e,j)+2(e,k)+(e,l)+2(j,e)+2(j,j)+4(j,k)+2(j,l)+(k,e)+(k,j)+2(k,k)+(k,l)+2(l,e)+2(l,j)+4(l,k)+2(l,l))(2b(e^*,e^*,e^*)+b(e^*,e^*,j^*)+b(e^*,e^*,l^*)+4b(e^*,j^*,e^*)+2b(e^*,j^*,j^*)+2b(e^*,j^*,l^*)+4b(e^*,k^*,e^*)+2b(e^*,k^*,j^*)+2b(e^*,k^*,l^*)+2b(e^*,l^*,e^*)+b(e^*,l^*,j^*)+b(e^*,l^*,l^*)+2b(j^*,e^*,e^*)+b(j^*,e^*,j^*)+b(j^*,e^*,l^*)+4b(j^*,j^*,e^*)+2b(j^*,j^*,j^*)+2b(j^*,j^*,l^*)+4b(j^*,k^*,e^*)+2b(j^*,k^*,j^*)+2b(j^*,k^*,l^*),+2b(j^*,l^*,e^*)+b(j^*,l^*,j^*)+b(j^*,l^*,l^*)+2b(k^*,e^*,e^*)+b(k^*,e^*,j^*)+b(k^*,e^*,l^*)+4b(k^*,j^*,e^*)+2b(k^*,j^*,j^*)+2b(k^*,j^*,l^*)+4b(k^*,k^*,e^*)+2b(k^*,k^*,j^*)+2b(k^*,k^*,l^*)+2b(k^*,l^*,e^*)+b(k^*,l^*,j^*)+b(k^*,l^*,l^*)).$

$$\begin{pmatrix} a(e,e) & a(e,j) & a(e,k) & a(e,l) \\ a(j,e) & a(j,j) & a(j,k) & a(j,l) \\ a(k,e) & a(k,j) & a(k,k) & a(k,l) \\ a(l,e) & a(l,j) & a(l,k) & a(l,l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b(e^*,e^*,e^*) & b(e^*,e^*,j^*) & b(e^*,e^*,k^*) & b(e^*,e^*,l^*) & b(e^*,j^*,e^*) & b(e^*,j^*,j^*) & b(e^*,j^*,k^*) & b(e^*,l^*,l^*) & b(e^*,k^*,e^*) & b(e^*,k^*,j^*) & b(e^*,k^*,k^*) & b(e^*,k^*,l^*) & b(e^*,l^*,e^*) & b(e^*,l^*,j^*) & b(e^*,l^*,k^*) & b(e^*,l^*,l^*) \\ b(j^*,e^*,e^*) & b(j^*,e^*,j^*) & b(j^*,e^*,k^*) & b(j^*,e^*,l^*) & b(j^*,j^*,e^*) & b(j^*,j^*,j^*) & b(j^*,j^*,k^*) & b(j^*,j^*,l^*) & b(j^*,k^*,e^*) & b(j^*,k^*,j^*) & b(j^*,k^*,k^*) & b(j^*,k^*,l^*) & b(j^*,l^*,e^*) & b(j^*,l^*,j^*) & b(j^*,l^*,k^*) & b(j^*,l^*,l^*) \\ b(k^*,e^*,e^*) & b(k^*,e^*,j^*) & b(k^*,e^*,k^*) & b(k^*,e^*,l^*) & b(k^*,j^*,e^*) & b(k^*,j^*,j^*) & b(k^*,j^*,k^*) & b(k^*,j^*,l^*) & b(k^*,k^*,e^*) & b(k^*,k^*,j^*) & b(k^*,k^*,k^*) & b(k^*,k^*,l^*) & b(k^*,l^*,e^*) & b(k^*,l^*,j^*) & b(k^*,l^*,k^*) & b(k^*,l^*,l^*) \\ b(l^*,e^*,e^*) & b(l^*,e^*,j^*) & b(l^*,e^*,k^*) & b(l^*,e^*,l^*) & b(l^*,j^*,e^*) & b(l^*,j^*,j^*) & b(l^*,j^*,k^*) & b(l^*,j^*,l^*) & b(l^*,k^*,e^*) & b(l^*,k^*,j^*) & b(l^*,k^*,k^*) & b(l^*,k^*,l^*) & b(l^*,l^*,e^*) & b(l^*,l^*,j^*) & b(l^*,l^*,k^*) & b(l^*,l^*,l^*) \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$T_3^2 = (1+2+4+0+0+4+4+2+1+2+0+0+4+0+4+2)(2+2+2+4+2+2+8+2+2+2+2+1+2+1+1+0+2+2+0+0+4+2+1+1+0+1+2+4+4+4+4+0+0+2+1+2) = 30 \cdot 71 = 2130 \underset{3}{\equiv} 0.$

Таким образом, мы рассмотрели тензорные пространства и в каждом тензорном пространстве, задавая билинейные и полилинейные формы вычислили по одному элементу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М.: 1963г.
2. Мантуров О.В. Элементы тензорного исчисления. – М: «Просвещение», 1991г., 255с.
3. Поликов С.В. О тензорных произведениях неприводимых представлении конечных почти простых групп // математический сборник 2011г. том 201 №5 с.27-28.
4. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве, – М: «Наука», 2003г.
5. Худалов В.Т. Конусы в тензорных пространствах упорядоченных банаховых пространств // Владикавказский математический журнал, январь - март, 1991г. выпуск 1, с.51-66.
6. Материалы международной научно-практической конференции «Валихановские чтения-16», посвященной 50-летию Кокшетауского государственного университета им. Ш. Уалиханова. Кокшетау, 5 том, 2012, с. 273-278. /Об одном расширении поля элементами тела кватернионов/