Теорема. $\omega = f(\bar{z})$, $\bar{z} = x - iy$ комплекс айнымалылы функция D облысында үзіліссіз дифференциалдануы үшін, осы облыста оның нақты және жорамал бөліктерінің x және y айнымалылары бойынша дербес туындылары болып, олар:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \text{ және } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (*)$$

шарттарын қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті. [3]

Біз (*) шартын шартты түрде Коши-Риманның түйіндес шарты деп атадық.

Демек бұл шарт арқылы аналитикалық функциялар ауқымын кеңейттік.

D облысында регуляр аналитикалық функция $\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ функциясы берілсін және оның нақты, жорамал бөліктерінің бірінші және екінші ретті туындылары болсын, онда D аймағының барлығында Коши-Риманның түйіндес шарты орындалады.

Онда, (*) бірінші теңдікті x айнымалысы бойынша, екінші теңдікті y айнымалысы бойынша дифференциалдап қосатын болсақ, онда $u(x,y)$ функциясының Лапласс теңдеуін қанағаттандыратынын көреміз. Осы секілді жорамал бөлігінің де Лапласс теңдеуін қанағаттандыратынын байқаймыз, яғни, олар D аймағында тербелмелі функциялар.

Бұдан келесі теореманы аламыз.

Теорема. Коши-Риманның түйіндес шартын қанағаттандыратын $\omega = f(\bar{z})$ аналитикалық функциялар тербелмелі болады.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
2. Александров И.А., Соболев В.А. Аналитические функции комплексного переменного. М.: Высшая школа, 1984.
3. Мустафаев А.П. Производная функция комплексного переменного по сапряженному аргументу. В мире научных открытий. «Математика. Механика. Информатика». №8,(1), 2011. Красноярск.

КРУГОВОЕ ПОЛЕ

CIRCULAR FIELD

Пузач В. Н.

КФ ФГБОУ ВПО «Челябинский государственный унивеситет», г.Костанай, Казахстан

> Подчинить вычисления своей воле, сгруппировать математические операции, научиться их классифицировать по степени трудности, а не по внешним признакам – вот задачи математиков будущего, так, как я их понимаю, вот путь, по которому я хочу пойти…
>
> Э. Галуа

На рубеже средних веков в работах арабских математиков формируется термин алгебра. Начиная с этого момента, она выделяется в самостоятельную отрасль математического знания, в центре которой занимает место решение алгебраических уравнений различных степеней в радикалах. Среди наиболее ранних работ в этой области можно отметить работы Лагранжа, Руффини, Абеля. Но фундаментальные результаты в этой области получены в 1830-1832 гг. Э. Галуа. Он впервые ввел такие алгебраические понятия как группа, подгруппа, нормальный делитель и поле. Всякому алгебраическому уравнению Галуа ставил в соответствие однозначно определенную группу, впоследствии названной группой Галуа.

Разрешимость данной группы определяла разрешимость соответствующего ему алгебраического уравнения.

Исследования Галуа привели к новой точке зрения на предмет и задачи алгебры. С этого момента не решение уравнений, а изучение алгебраических операций, производимыми над элементами произвольного множества становится объектом алгебры.

Это постепенное преобразование алгебры как науки приобрело четкие очертания в работах Эмми Нетер – одной из талантливейших женщин мира. Она, начиная с 1920 года, заложила фундамент нового направления в алгебре, так называемой абстрактной или общей алгебры, т. е. общей теории колец, полей, идеалов. Работы Нетер были продолжены Штейницем, Артином и его учеником Ван дер Варденом.

Во всяком разделе математики, в частности, алгебре и теории чисел, приходится иметь дело с различными множествами. Традиционно понятие множества ассоциируется с числовым множеством, хотя как показывает практика, числовыми множествами представлена всего лишь их малая часть. Дальнейшее развитие этого понятия приводит нас к различным действиям над элементами заданного множества, именуемых в дальнейшем операциями, а если быть более точным – алгебраическими операциями. Наряду с этим главное отличие операций друг от друга – наличие или отсутствие определенных свойств. Таким образом, предметом изучения алгебры является традиционная тройка: множество, операция над элементами данного множествами и свойства данной операции, именуемой алгебраической структурой. При этом в центре алгебры находится действие той или иной операции над элементами произвольного множества, наряду с тем как природа элементов носит второстепенный характер.

В арифметике и алгебре оперируют с разными числами: целыми, рациональными, иррациональными, комплексными, с многочленами и алгебраическими дробями; при этом часто констатируют, что свойства производимых над разными объектами действий в основном одни и те же. В развитии алгебры углубленное изучение отдельных типов алгебраических структур происходило параллельно с выяснением их общих свойств. Так возникло одно их основных понятий абстрактной алгебры – кольцо. Обратимость операции умножения приводит к понятию частного случая кольца – поля (иногда называемого телом). Группы, кольца, поля – все это конкретные алгебраические структуры, или, точнее, типы алгебраических структур. Дальнейшее развитие этих понятий приводит нас к понятию модуля, идеала и мн. др.

В данном докладе речь пойдет о круговом поле как подполе поля комплексных чисел. Цель доклада – обозначить место кругового поля во множестве всевозможных подполей поля комплексных чисел.

В связи с этим с этим поставлены следующие задачи:

- дать определение кругового поля;
- показать неразложимость кругового поля над полем Q.

Из курса общей алгебры известны «естественные» числовые поля – поле рациональных чисел, поле действительных чисел и поля комплексных чисел. В свою очередь, очевидно, что поле комплексных чисел является расширением поля действительных чисел, поле действительных чисел – расширение поля рациональных чисел, другими словами имеет место вложение:

$$Q \subset R \subset C$$

При этом поле Q, в отличие от R и C, простое поле нулевой характеристики, так как не содержит другие поля в качестве подполей. Но наряду с вышеуказанными полями существуют и другие подполя поля комплексных чисел. Опишем одно из них.

Пусть m – натуральное число и пусть число ζ, как и все его степени – корни уравнения x^m-1=0, то есть значения корня m-й степени из единицы. Причем корень ζ– первообразный корень m-й степени из единицы, если он не является корнем многочлена x^n-1=0 при n<m. Если ζ– первообразный корень m-й степени из единицы, то любой другой корень степени m из единицы является степенью ζ, а первообразные корни степени m из единицы – это в точности элементы ζ^k, где k и m взаимно просты. Из всего вышесказанного вытекает, что

$F=Q(\zeta)$ – поле разложения для многочлена x^m-1. Таким образом, $x^m-1= (x-1)(x - \zeta) \dots (x-\zeta^{m-1})$. Поле $F=Q(\zeta_m)$ называется круговым полем корней m-й степени из единицы или просто круговым полем. Первым его начал изучать Гаусс в связи с построением правильных многоугольников.

Покажем, что круговое поле неразложимо над полем Q. Пусть $f(x)=0$ неразложимое уравнение, которому удовлетворяет произвольно выбранный примитивный корень из единицы ζ. При этом $f(x)$ можно рассматривать как целочисленный многочлен. Нужно показать, что $f(x) = \Phi_h(x)$, где $\Phi_h(x)=0$ – уравнение деления круга степени h.

Пусть p – простое число, на которое не делится число h. Тогда вместе с ζ также и ζ^pявляется примитивным корнем h-й степени из единицы, и этот элемент удовлетворяет некоторому целочисленному разложимому уравнению $g(\zeta^p)=0$ левая часть которого равна $\Phi_h(x)$. Прежде всего, покажем, что $f(x)=\varepsilon g(x)$, где $\varepsilon= \pm1$ – обратимый элемент в кольце целых чисел.

Многочлен вместе с $f(x)$ имеет корнем элемент ζ, а вместе с $g(x)$ – корень ζ^p; следовательно, этот многочлен делится как на $f(x)$, так и на $g(x)$. Если бы $f(x)$и $g(x)$ были существенно различными многочленами, то x^h-1 должен был делиться на произведение $f(x)g(x)$:

$$x^h-1= f(x)g(x)h(x),$$

где многочлен $h(x)$ тоже должен быть целочисленным. Далее, многочлен $g(x^p)$ имеет ζ своим корнем, а потому должен делиться на $f(x)$:

$$g(x^p)=f(x)k(x),$$

причем опять-таки $k(x)$ – целочисленный многочлен.

Рассмотрим теперь $x^h-1= f(x)g(x)h(x)$ и $g(x^p)=f(x)k(x)$ как сравнения по модулю p. Тогда по модулю p:

$$g(x^p)\equiv \{g(x)\}^p.$$

Действительно, если выполнить возведение в степень справа, записав предварительно $g(x)$ без коэффициентов как сумму степеней x, а затем раскрыть скобки в соответствие с правилами, получив $\{g(x)\}^p$ возведением в p-ю степень каждого слагаемого, то получится как раз $g(x^p)$. И теперь следует, что

$$\{g(x)\}^p\equiv f(x)k(x) \pmod p.$$

Разложим обе части равенства на неразложимые множители по модулю p. В силу теоремы об однозначном разложении на простые множители многочлена с коэффициентами из поля$Z/(p)$, каждый множитель $\varphi(x)$ и $f(x)$ должен входить в $\{g(x)\}^p$, а потому и в $g(x)$. Следовательно, правая часть $x^h-1= f(x)g(x)h(x)$ по модулю p делится на $\varphi^2(x)$, а потому по модулю p как левая часть x^h-1, так и её производная hx^{h-1}должны делится на $\varphi(x)$. Однако производная hx^{h-1} в силу того, что hне сравнимо с 0 по модулю p, имеет лишь те простые делители x, которые не делят x^h-1. Тем самым мы получили противоречие.

Таким образом, $f(x)=\pm g(x)$ и ζ^p – корень многочлена $f(x)$.

Покажем теперь следующее: все примитивные корни h-й степени из единицы являются корнями многочлена $f(x)$. Пусть ζ^v – такой корень из единицы и пусть

$$v = p_1 \dots p_n$$

где p_i – равные или различные простые множители, взаимно простые с h.

Так как ζ удовлетворяет уравнению $f(x) = 0$, таким же должен быть и элемент $\zeta^p{}_1$. Повторение рассуждений для нового простого числа p_2 показывает, что и элемент $\zeta^{p_1 p_2}$удовлетворяет этому уравнению. Продолжая, таким образом, мы получим, что ζ^v удовлетворяет уравнению $f(x)=0$.

Следовательно, все корни многочлена $\Phi_h(x)$ удовлетворяют уравнению $f(x)=0$; так как $f(x)$ неразложим, а $\Phi_h(x)$ не имеет кратных корней, то $\Phi_h (x) = f(x)$. Тем самым доказана неразложимость уравнения деления круга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айерленд К., Роузен М., Классическое введение в современную теорию чисел. М: Наука, 1987 г. – 416 с.

2. Боревич З.И., Шафаревич И.Р., Теория чисел. М: Наука, 1985 г. – 504 с.
3. Ван дер Варден Б.Л., Алгебра, М: Наука, 1975 г. – 648 с.
4. Винберг Э.Б., Курс алгебры. М: Факториал-пресс, 2001 г. – 544 с.
5. Девенпорт Г., Введение в теорию чисел. М: Наука, 1965 г. – 176 с.
6. Кострикин А.И., Введение в алгебру Часть 1. М: Наука, 1977 г. – 272 с.
7. Януш Г.Дж., Алгебраические числовые поля. Н.: Научная книга, 2001 г.– 248 с.

ПРИМЕРЫ ТЕНЗОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ НА МАЛЕНЬКИХ РАЗМЕРНОСТЯХ НАД ЭЛЕМЕНТАМИ ТЕЛ КВАТЕРНИОНОВ

EXAMPLES OF TENZORNY SPACES ON SMALL DIMENSIONS OVER ELEMENTS OF QUOTERNIONAL BODIES

Садыкова Б.Б.
Костанайский государственный педагогический институт г.Костанай, Казахстан

Рассмотрим R −модуль V и пусть V^* − двойственный R −модуль. Модули $T_q^p(V) = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p\ раз} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q\ раз}$ которые принято называть пространствами q раз ковариантных и p раз контравариантных тензоров или, p и q если определены из контекста, просто *тензорным пространством*., [1]. Элементы тензорных пространств называются *тензорами* над V. Пусть $x \in T_q^p(V) = V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q}$ тогда:

- пара (p, q) обычно называется типом тензора x
- p называется контравариантной валентностью,
- q называется ковариантной валентностью,
- $p + q$ называется полной валентностью,
- тензоры, для которых $p = 0$, называются чисто ковариантными,
- тензоры, для которых $q = 0$, называются чисто контравариантными,
- тензоры, для которых $p, q > 0$, называются смешанными.

Вспомним, что большинство встречающихся нам до сих пор геометрических объектов являются тензорами различных типов.

- $T_0^0(V) = R$ −скаляры
- $T_0^1(V) = V$ −векторы
- $T_1^0(V) = V^*$ −ковекторы
- $T_1^1(V) = V \otimes V^*$ −линейные операторы.
- $T_2^0(V) = V^* \otimes V^* = (V^*)^{\otimes 2}$ − тензорный квадрат модуля V^*, элементы которого естественно интерпретируется как билинейные формы на V.

Перейдем теперь к тензорам большой валентности. Заметим, что чисто ковариантные и чисто контравариантные тензоры, иными словами, тензорные степени V^* и V, интерпретируются как полилинейные формы на V или на V^*, соответственно, см., [2].

- $T_3^0(V) = V^* \otimes V^* \otimes V^* = (V^*)^{\otimes 3}$ − тензорный куб модуля V^*.

Гораздо интереснее понять, а кому вспомнить, каким геометрическим объектом отвечают смешанные тензоры.

- $T_2^1(V) = V \otimes V^* \otimes V^*$.

Элементы пространства $T_2^1(V)$ представляют собой билинейные отображения $m: V \times V \to V$. Как мы уже упоминали, что в точности отображения, задающие на V структуру алгебры. При этом отображение m интерпретируется как умножение в алгебре, а билинейность выражает дистрибутивность умножения относительно сложения.