ISSN 2310-3353

BU

BAITURSYNULY UNIVERSITY

«А.БАЙТҰРСЫНҰЛЫ АТЫНДАҒЫ ҚОСТАНАЙ ӨҢІРЛІК УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

ҚМПИ ЖАРШЫСЫ

ҒЫЛЫМИ-ӘДІСТЕМЕЛІК ЖУРНАЛ

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

№ 4

2023

ЭМПИРИКАЛЫҚ ЗЕРТТЕУЛЕР
ЭМПИРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

УДК 519.245

Ахметханова, Д.О.,
магистрантка 2 курса
специальности 7М05401-Математика,
КРУ им.А.Байтурсынулы
Тастанов, М.Г.,
кандидат физико-математических наук,
доцент, и.о профессора кафедры математики
и физики КРУ им.А.Байтурсынулы,
г.Костанай, Казахстан

РАСЧЕТ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Аннотация

С расширением использования сверхбольших интегральных систем и развитием высокочастотной электротехники элементы паразитного сопротивления, индуктивности и емкости начали оказывать значительное влияние на работу электронных систем. Для определения их влияния на части системы разрабатываются системы автоматизированого проектирования и изготовления микро электромеханических систем. Использование метода Монте-Карло для решения описанных задач значительно упрощает реализацию алгоритма параллельных вычислений и не требует значительных затрат на хранение промежуточных данных. В данной работе рассматривается решение проблемы Дирихле, поставленное в уравнение Гельмгольца, с использованием подхода Монте-Карло.

Ключевые слова: *задача Дирихле, уравнение Гельмгольца, трехмерная задача, методы Монте-Карло, блуждание по сферам, интегральный оператор.*

1 Введение

В общем случае трехмерная задача Дирихле для уравнения Гельмгольца приводится к граничным слабо сингулярным интегральным уравнениям Фредгольма первого рода. Они сначала приближаются систамами алгебраических уравнений, которые в свою очередь решаются обобщенными методами минимальной невязки. Вычислительнуя сложность решения можно снизить за счет использования методов Монте-Карло [1].

В процессе решения множества прикладных задач мы сталкиваемся необходимостью решения краевых задач для уравнений математической физики. Самым типовым примером является решение задачи Дирихле (так называемая первая краевая задача) для двухмерного и трехмерного уравнения Лапласа. Затем, последовательно можно решить задачу Дирихле для уравнений Пуассона и Гельмгольца. Обычно, решение даже простейшей задачи (задачи Дирихле для уравнения Лапласа) очень трудоемкий процесс. В первую очередь это связано с частым использованием итерационных способов, особенно, если мы не хотим применять такие методы как, метод прогонки или метод факторизации. В случаях применения итерационных методов мы сталкиваемся многократным использованием значения неизвестной функции и ведением расчетов во всех узлах сетки (решетки). Поскольку число узлов сетки очень велико, возникают трудности при хранении значений неизвестной функции в оперативной памяти ЭВМ и еще огромного количества обращений к внешней памяти. Вследствие чего мы теряем очень большое количество машинного времени. А время решения данной задачи является весьма важной характеристикой современных электронных вычислительных машин. По этой причине решение задачи Дирихле для уравнений Лапласа, Пуассона и Гельмгольца являются неотъемлемой частью программы испытаний новых ЭВМ.

2 Материалы и методы

Задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца являются классическими задачами математической физики. Их аналитические решения могут быть найдены лишь в случае простейших областей, допускающих разделение переменных. Поэтоиу, основным инструментом исследования таких задач является компьютерное моделирование.

В данной статье задача Дирихле формулируется в виде слабо сингулярных граничных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Дискретные аналоги указанных уравнений могут быть построены различными способами. Для этого мы используем способ «блуждания по сферам» методов Монте-Карло [2].

3-4 Результаты и обсуждение

Рассмотрим трехмерную задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца с переменными параметрами:

$$\Delta u_1 + c u_1 = -g, \quad u_1 \big|_{\Gamma} = \psi \tag{1}$$

В домене $D \in X_3$, с границей Γ, в данном случае $c\ (r) < c^*$, где $(-c^*)\ d, r = (x, y, z)$ является первым членом оператора Лапласа для домена D.

Условия последовательности функций C, g, ψ удовлетворяются, а граница G, в (2.1) обеспечивают вычисление задачи и являются уникальной. Они также обеспечивают его вероятностное и интегральное представление функцией Грина [3,4,5]. Оценка метода Монте-Карло в области D связана с процессом называемым «блужданием по сферам» [6]. Для описания данного процесса введем следующие обозначения: замыкание области $D - \dot{D}$, $d(r) -$ расстояние от точки r до границы G, $G_\varepsilon - \varepsilon$ граничащей с G, т.е. $G_\varepsilon = \{r \in \overline{D}: d(r) < \varepsilon\}$ и $S(r)$ – максимальная из сфер лежащих в D, с центрами располеженными в точке r, т.е.

$$S(r) = \{Q \in \overline{D}: |Q - r| = d(r)\}$$

В процессе «блуждания по сферам» последующая точка моделируется как $S(r) -$ равномерно распределенная по поверхности сферы S, при достижении точки границы G процесс завершается.

Далее рассматриваем алгоритм для вычисления задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца с переменной $c(r)$.

Запишем (1) следующим образом:

$$\Delta u_1 = -c u_1 - g, \ u_1 \big|_{\Gamma} = \psi$$

и рассмотрим интегральное уравнение

$$u = Ku + \square \tag{2}$$

Здесь воспользуемся формулой

$$u(r) = \frac{1}{4\pi d^2(r)} \int\limits_{S(r)} u(r(s))ds + \int\limits_{D(r)} c(r')G_r(r')u(r')dr' + \int\limits_{D(r)} G_r(r')g(r')dr'$$

где $r \in \frac{E}{G_\varepsilon}$.

Михайлов Г.А. доказал [7,8,9] что функция u является решением задачи (1) если ее переопределить в G_ε:

$$u(r) \equiv u_1(r), r \in G_\varepsilon,$$

где

$$G_r(r') = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|r-r'|} - \frac{1}{d(r)}\right), \quad |r-r'| \leq d(r). \tag{3}$$

Она является функцией для шара $D(r)$ если $r \in \frac{E}{G_\varepsilon}$. Интегральный оператор K для нее записывается следующим образом:

$$\left[1 - \frac{c_0 d^2(r)}{6}\right]\frac{\left[1-\frac{c_0 d^2(r)}{6}\right]^{-1}}{4\pi d^2(r)}\int_{S(r)} u(r(s))ds + \frac{c_0 d^2(r)}{6}\int_{D(r)} \frac{c(r)}{c_0} 6d^{-2}(r) G_r(r)u(r)dr \tag{4}$$

и в данном случае c_0 должно удовлетворят неравенству

$$\frac{c_0 d_{max}^2}{6} < 1.$$

Поскольку стандартная оценка метода Монте-Карло реализовала вероятностное представление серии Неймана, результат использования интегрального оператора K должен быть выбран случайным образом для построения данной оценки. С помощью (4) мы можем сделать это следующим образом: новая точка $G_i + 1$ равномерно распределяется по сфере на $S(G_i)$ и моделируется с вероятностью $1 - c_0 d_2(GI)/6$:

$$q(r_i, c_0) = [1 - c_0 d^2(r_i)/6]^{-1}.$$

Точка r_{i+1} моделируется внутри шара $D\ (r)$ в соответствии с ее плотностью:

$$6d^{-2}(r_i) \times G_{r_i}(r'),$$

а противоположная вероятность равна $\frac{c_0 d^2(r_i)}{6}$, вес умножается на значение $\frac{c(r_{i-1})}{c_c}$. При достижении G_ε — цепь разрывается и к счетчику добавляется значение граничной функции, умноженное на соответствующий вес в точке границы, близкой к r_{i+1}. Таким образом, случайная оценка будет иметь вид

$$\xi = \sum_{n=0}^{N} Q_n \square (r_n),$$

где,

$$Q_n = \left[\prod_{i=1}^{m_n} \frac{c(r_{k_i})}{c_0}\right]\left[\prod_{i=1}^{n-m_n} q(r_{t_i}, c_0)\right],$$

здесь (r_{t_i}), $i = 1,2,\dots,n-m$ —точки на сфере, и $\{r_{k_i}\}$, $i = 1,2,\dots,mn$ —точки внутри шара. Далее мы можем оценить значение $\square(r)$ для $r \notin G_\varepsilon$ по методу Монте-Карло [5].

Если выполняются условия

$$c^* \geq |(r)|, \quad c_0 < 0.6079c^* \tag{5}$$

существует уникальное ограниченное решение, которое совпадает с серией Неймана и аналогично решению (2). Далее возьмем фактическую оценку ξ, заменив значение функции ψ в точке $u(r)G_\varepsilon$ на точку $P(r) \in G$. В таком случае

$$\square(r) = \psi(P(r)), \quad r \in G_\varepsilon.$$

Теорема 1. Если первые производные решения связаны с D из (4) и удовлетворяют условиям (5), то выполняется $E\xi\varepsilon = u_\varepsilon$ и

$$|u(r) * u_\varepsilon(r)| \leq const\ \varepsilon, \quad r \in D, \qquad \varepsilon > 0.$$

Также легко доказать [10], что дисперсия будет ограниченной при выполнении следующих условий

$$c_0 \geq |c(r)|, \quad c_0 \leq 0.488c^*,$$

где, $c = const < c_0$.

Для расчета соответствующих производных методом Монте-Карло Михайлов Г.А. [9] предложил использовать статистическую оценку

$$\xi_{\varepsilon,1}^{(k)} = \frac{\partial^k \zeta_{\varepsilon,1}}{\partial c^k} = \prod_{i=1}^{N-m_N} \frac{\mu_i!}{(\mu_i - k)!} c^{-k} Q_{t_i} \square(r_{t_{i-1}}) + \frac{m_N!}{(m_N - k)!} c^{-k} Q_N \psi(P(r_N)),$$

где, μ_i — первые t_i шагов в шарах между шарами, т.е. μ_{ti}. В случае $u < k$ соответствующий член равен нулю. В этой же работе [9] есть условия для $E\xi_{\varepsilon_1}^k$ и для этой оценки установлена окончательная дисперсия.

5 Выводы

В работе изучены возможности применения методов Монте-Карло для численного решения трехмерной задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца с применением способа «блуждания по сферам». Эти задачи сформулированы в виде эквивалентных им граничных интегральных уравнений. Применяемый метод реализован на этапе численного решения, аппроксимирующих интегральные уравнения. Он сокращает требования к ресурсам компьютера и позволяет значительно снизить общее решение рассматриваемых задач без потери точности.

Список литературы:

1 Tastanov M., Utemissova A., Maiyer F., Ysmagul R. The Stationary Problem of Two-Phase Filtration by the Monte-Carlo Method: Solutions and Applications. WSEAS Transactions on Mathematics, ISSN / E-ISSN: 1109-2769 / 2224-2880, Volume 21, 2022, P. 770-778.

2 Tastanov M., Utemissova A., Maiyer F. Application of Monte Carlo methods for solving the regular and degenerate problem of two-phase filtration. Вестник Томского государственного университета, серия: Математика и механика, №80, 2022, P. 147-156.

3 Елепов Б.С., Кронберг А.А., Михайлов Г.А. и Сабельфельд К.К. Решение краевых задач методом Монте-Карло. Наука, Новосибирск, 1980.

4 Елепов Б.С., Михайлов Г.А. Применение фундаментальных решений эллиптических уравнений к построению алгоритмов метода Монте-Карло. Журнал: Вычислительная математика и физика (1974) 3, 728-736 с.

5 Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. Наука, Москва, 1982.

6 Ермаков С.М., Некруткин В.В, Сипин А.С. Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. Издательство Kluwer Academic Publishers, 1989.

7 Михайлов Г.А. Решение задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений методом Монте-Карло. Сибирский математический журнал (1994) 35, № 5, 1085-1093 с.

8 Михайлов Г.А. Минимизация вычислительных затрат не аналоговых методов Монте-Карло. World Scientific, Сингапур - Нью-Джерси - Лондон - Гонконг, 1991.

9 Михайлов Г.А. Новые методы Монте-Карло для решения уравнения Гельмгольца. Доклады Рус. Акад. Наука (1992) 326, № 6, 943-947 с.

10 Бурский В.П., Лесина Е.В. О краевых задачах неправильного эллиптического уравнения в круге. Журнал: Вычислительной математики и математической физики, том 60, №8, 2020 г. 1351-1366 с.

АХМЕТХАНОВА, Д.О., ТАСТАНОВ, М.Г.

ДИРИХЛЕНІҢ ҮШ ӨЛШЕМДІ ЕСЕБІН ШЕШУ

Ультра үлкен интегралды жүйелерді қолданудың кеңеюімен және жоғары жиілікті электротехниканың дамуымен паразиттік кедергі, индуктивтілік және сыйымдылық элементтері электронды жүйелердің жұмысына айтарлықтай әсер ете бастады. Олардың жүйенің бөліктеріне әсерін анықтау үшін микро электромеханикалық жүйелерді автоматтандырылған жобалау және өндіру жүйелері жасалады. Сипатталған есептерді шешу үшін Монте-Карло әдісін қолдану параллельді есептеу алгоритмін жүзеге асыруды едәуір жеңілдетеді және аралық деректерді сақтау үшін айтарлықтай шығындарды қажет етпейді. Бұл жұмыс Монте-Карло тәсілін қолдана отырып, Гельмгольц теңдеуіне қойылған Дирихле мәселесінің шешімін қарастырады

Кілт сөздер: Дирихле есебі, Гельмгольц теңдеуі, үш өлшемді есеп, Монте-Карло әдістері, сфераларды кезу, интегралды оператор.

AKHMETKHANOVA, D.O., TASTANOV, M.G.

CALCULATION OF THE THREE-DIMENSIONAL DIRICHLET PROBLEM

With the expansion of the use of ultra-large integrated systems and the development of high-frequency electrical engineering, elements of parasitic resistance, inductance and capacitance began to have a significant impact on the operation of electronic systems. To determine their impact on parts of the system, automated design and manufacturing systems for micro electromechanical systems are being developed. Using the Monte Carlo method to solve the described problems greatly simplifies the implementation of the parallel computing algorithm and does not require significant costs for storing intermediate data. In this paper, we consider the solution of the Dirichlet problem, put into the Helmholtz equation, using the Monte Carlo approach.

Key words: Dirichlet problem, Helmholtz equation, three-dimensional problem, Monte Carlo methods, sphere walk, integral operator.