Сизова О.А., магистрант
Костанайский государственный педагогический институт

УРАВНЕНИЯ xa=yb В СВОБОДНОЙ АЛГЕБРЕ ЛИ

В статье [1] нами было рассмотрено уравнение вида *xa=yв* ранга 2 в свободной алгебре Ли *L[a,b]* (в дальнейшем уравнение (1)), для которого осуществлялся поиск нетривиальных решений для слов длины $\leq$ 6. Мы показали, что уравнение (1) для слов длин 2, 4, 6 имеет нетривиальные решения, а для слов длин 3, 5 имеет только тривиальные решения. На основании этого нами была выдвинута гипотеза о том, что для слов нечетной длины уравнение (1) нетривиальных решений не имеет.

Цель нашей работы заключается в рассмотрении вопроса о существовании нетривиальных решений уравнения (1) для слов длины большей шести.

В этой статье мы показали, что уравнение (1) для слов длины 7 имеет только тривиальные решения, а для слов длин 8, 9 имеет нетривиальные решения, тем самым мы опровергли упомянутую выше гипотезу, выдвинутую в статье [1]. Также нами были рассмотрены соотношения размерностей однородного пространства слов фиксированной длины алгебры Ли *L[a,b]* и его двух подпространств, для чего была использована формула Витта. На основании этих соотношений нами выяснена причина наличия или отсутствия нетривиальных решений –уравнения вида *xa=yb* ранга 2 в свободной алгебре Ли *L[a,b]* для слов длин 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Перейдем непосредственно к рассмотрению решений уравнения вида *xa=yb* ранга 2 в свободной алгебре Ли *L[a,b]* для слов длин 7, 8, 9.

Пусть далее *L[X]* – свободная алгебра Ли, где *X* – счетно-бесконечное множество порождающих (символов).

Рассмотрим возможные решения уравнения (1) для слов длины 7.

Будем рассматривать линейные комбинации право нормированных слов длины 7, линейных по каждому входящему в них символу. После соответствующих преобразований, аналогичных преобразованиям статьи [1] получаем:

abcdefg=agbcdef-bgacdef-cgabdef+cgbadef-
-dgabcef+dgbacef+dgcabef-dgcbae-gabcdf+
+egbacdf+egcabdf-egcbadf+egdabcf-egdbacf-
-egdcabf+egdcbaf-fgabcde+fgbacde+fgcabde-
-fgcbade+fgdabce-fgdbace-gdcabe+fgdcbae+
+fgeabcd-fgebacd-fgecabd+fgecbad-gedabc+
+fgedbac+fgedcab-fgedcba

Теперь найдем все нетривиальные решения уравнения (1) для слов длины 7.

Будем всевозможными способами придавать порождающим *a, b, c, d, e, f, g* только два значения *a* или *b*. Для случая слов длины 7 будет 2^7=128 комбинаций присвоения значений *a* или *b*.

На основании просчета с помощью специально созданной программы для нахождения решений уравнения (1) нами было выявлено, что уравнение (1) для слов длины 7 не имеет нетривиальных решений.

Теперь перейдем к вопросу о существовании нетривиальных решений уравнения (1) для слов длины 8. Так же как и в предыдущем случае рассмотрим линейные комбинации правонормированных слов длины 8. После соответствующих преобразований получаем:

abcdefgh=ahbcdefg-bhacdefg-chabdefg+
+chbadefg-dhabcefg+dhbacefg+dhcabefg-
-dhcbaefg-ehabcdfg+ehbacdfg+ehcabdfg-
-ehcbadfg+ehdabcfg-ehdbacfg-ehdcabfg+
+ehdcbafg-fhabcdeg+fhbacdeg+fhcabdeg-
-fhcbadeg+fhdabceg-fhdbaceg-fhdcabeg+
+fhdcbaeg+fheabcdg-fhebacdg-fhecabdg+
+fhecbadg-fhedabcg+fhedbacg+fhedcabg-
-fhedcbag-ghabcdef+ghbacdef+ghcabdef-
-ghcbadef+ghdabcef-ghdbacef-ghdcabef+
+ghdcbaef+gheabcdf-ghebacdf-ghecabdf+
ghecbadf-ghedabcf+ghedbacf+ghedcabf-
-ghedcbaf+ghfabcde-ghfbacde-ghfcabde+
+ghfcbade-ghfdabce+ghfdbace+ghfdcabe-
-ghfdcbae-ghfeabcd+ghfebacd+ghfecabd-
-ghfecbad+ghfedabc-ghfedbac-ghfedcab+
+ghfedcba

Найдем хотя бы одно нетривиальное решение уравнения (3) для слов длины 8. Так же как и в случае слов длины 7 будем придавать *a, b, c, d, e, f, g, h* только два значения *a* или *b*. Для случая слов длины 8 будет 2^8=256 комбинаций присвоения значений *a* или *b*. Пусть *a:=b (a* присвоено значение *b), b:=a, c:=b, d:=a, e:=a, f:=b, g:=b, h:=a* тогда

babaabba=baabaabb-aabbaabb-babaaabb+
+baabaabb-aabababb+aaabbabb+aabbaabb-
-aabababb-aabababb+aaabbabb+aabbaabb-
-aabababb+aaababbb-aaaabbbb-aaabbabb+
+aaababbb-babababb+baabbaab+babbaaab-
-babababb++baababab-baaabbab-baabbaab+
+baababab+baababab-baaabbab-baabbaab+
+baababab-baaababb+baaaabbb+baaabbab-
-baaababb-bababaab+baabbaab+babbaaab-
-bababaab+baababab-baaabbab-baabbaab+
+baababab+baababab-baaabbab-baabbaab+
+baababab-baaababb+baaaabbb+baaabbab-
-baaababb+babbabaa-bababbaa-babbbaaa+
+babbabaa-babababa+babaabba+bababbaa-
-babababa-babababa+babaabba+bababbaa-
-babababa+babaabab-babaaabb-babaabba+
+babaabab

Приведя подобные слова, в итоге получим:

babbbaaa-2babbabaa+3babababa-bababbaa=
=2babaabab-2babaaabb+2baabaabb+
+8baababab-4babababb-2baaabbab+
+babbaaab-4baaababb+2baaaabbb-
-2baabbaab+babbaaab

В итоге получено одно из нетривиальных решений уравнения (1) ранга 2 для слов длины 8.

(babbbaa-2babbaba+3bababab-bababba)a=
=(2babaaba-2babaaab+2baabaab+8baababa-
-4bababaa-2baaabba+babbaaa-4baaabab+
+2baaaabb-2baabbaa+babbaaa)b

x_0 *=babbbaa-2babbaba+3bababab-bababba*

y_0*=2babaaba-babaaab+2baabaab+8baababa-*
-4bababaa-2baaabba+babbaaa-4baaabab+
+2baaaabb-2baabbaa+babbaaa

Аналогичным образом можно получить все нетривиальные решения для слов длины 8.

На основании полученного решения делаем вывод, что уравнение вида *xa=yв* ранга 2 над свободной алгеброй Ли *L[a,b]* для слов длины 8 имеет хотя бы одно нетривиальное решение.

Рассмотрим линейные комбинации правонормированных слов длины 9. После соответствующих элементарных преобразований получим:

abcdefghi=aibcdefgh-biacdefgh+ciabdefgh+
+cibadefgh-diabcefgh+dibacefgh+dicabefgh-
-dicbaefgh-eibacdfgh+eibacdfgh+eicabdfgh-
-eicbadfgh+eidabcfgh-eidbacfgh-eidcabfgh+
+eidcbafgh-fiabcdegh+fibacdegh+ficabdegh-
-ficbadegh+fidabcegh-fidbacegh-fidcabegh+
+fidcbaegh+fieabcdgh-fiebacdgh-fiecabdgh+
+fiecbadgh-fiedabcgh+fiedbacgh+fiedcabgh-
-fiedcbagh-giabcdefh-gibacdefh+gicabdefh-
-gicbadefh+gidabcefh-gidbacefh-gidcabefh+
+gidcbaefh+gieabcdfh-giebacdfh-giecabdfh+
+giecbadfh-giedabcfh+giedbacfh+giedcabfh-
-giedcbafh+gifabcdeh-gifbacdeh+gifcabdeh+
+gifcbadeh-gifdabceh+gifdbaceh+gifdcabeh-
-gifdcbaeh-gifeabcdh+gifebacdh+gifecabdh-
-gifecbadh+gifedabch-gifedbach-gifedcabh+
+gifedcbah-hiabcdefg-hibacdefg+hicabdefg-
-hicbadefg+hidabcefg-hidbacefg-hidcabefg+
+hidcbaefg+hieabcdfg-hiebacdfg-hiecabdfg+
+hiecbadfg-hiedabcfg+hiedbacfg+hiedcabfg-
-hiedcbafg+hifabcdeg-hifbacdeg-hifcabdeg+
+hifcbadeg-hifdabceg+hifdbaceg+hifdcabeg-
-hifdcbaeg-hifeabcdg+hifbacdeg+hifecabdg-
-hifecbadg+hifedabcg-hifedbacg-hifedcabg+
+hifedcbag+higabcdef-higbacdef-higcabdef+
higcbadef-higdabcef+higdbacef+higdcabef-
-higdcbaef-higeabcdf+higebacdf+higecabdf-
-higecbadf+higedabcf-higedbacf-higedcabf+
+higedcbaf-higfabcde+higfbacde+higfcabde-
-higfcbade+higfdabce-higfdbace-higfdcabe+
+higfdcbae+higfeabcd-higfebacd-higfecabd+
+higfecbad-higfedabc+higfedbac+higfedcab-
-higfedcba

Придадим *a, b, c, d, e, f, g, h, i* только два значения *a* или *b*. Для случая слов длины 9 будет 2^9=512 комбинаций присвоения значений *a* или *b*.

Пусть *a:=b (a* присвоено значение *a), b:=a, c:=b, d:=a, e:=a, f:=b, g:=b, h:=a, i:=b* тогда

babaabbab=bbabaabba-abbbaabba+
+bbaaabba+bbabaabba-abbababba+
+ababbabba+abbbaabba-abbababba-
-ababbabba+ababbabba+abbbaabba-
-abbababba+abababbba-abaabbbba-
-ababbabba+abababbba-bbbabaaba+
+bbabbaaba+bbbbaaaba-bbbabaaba+
+bbababaaba-bbabbbaba-bbabbaaba+
+bbababaaba+bbababaaba-bbaabbaba-
-bbabbaaba+bbababaaba-bbaababba+
+bbaaabbba+bbaabbaba-bbaababba-
-bbbabaaba-bbabbaaba+bbbbaaaba-
-bbbabaaba+bbababaaba-bbaabbaba-

-bbabbaaba+bbabababa+bbabababa-
-bbaabbaba-bbabbaaba+bbabababa-
-bbaababba+bbaaabbba+bbaabbaba-
-bbaababba+bbbbabaaa-bbbabbaaa+
+bbbbbaaaa+bbbbabaaa-bbbababaa+
+bbbaabbaa+bbbabbaaa-bbbababaa-
-bbbababaa+bbbaabbaa+bbbabbaaa-
-bbbababaa+bbbaababa-bbbaaabba-
-bbbaabbaa+bbbaababa-abbabaabb-
-ababbaabb+abbbaaabb-abbabaabb+
+ababababb-abaabbabb-ababbaabb+
+ababababb+ababababb-abaabbabb-
-ababbaabb+ababababb-abaababbb+
+abaaabbbb+abaabbabb-abaababbb+
+abbbabaab-abbabbaab-abbbbaaab+
+abbbabaab-abbababab+abbaabbab+
-abbabbaab-abbababab-abbababab+
+abbabbaab+abbabbaab-abbababab+
+abbaababb-abbaaabbb-abbaabbab+
+abbaababb+abbbabaab-abbabbaab-
-abbbbaaab+abbbabaab-abbababab+
+abbaabbab+abbabbaab-abbababab-
-abbababab+abbababab+abbabbaab-
-abbababab+abbaababb-abbaaabbb-
-abbaabbab+abbaababb-abbbbabaa+
+abbbabbaa+abbbbbaaa-abbbbabaa+
+abbbababa-abbbaabba-abbbabbaa+
-abbbababa+abbbababa-abbbaabba-
-abbbabbaa+abbbababa-abbbaabab+
+abbbaaabb+abbbaabba-abbbaabab

Снова приведем подобные слова. В итоге получим:

3abbababba-2ababababba+abaabbbba+
+2abbbbabaa-4abbbababa-abbbbbaaa+
+abbbabbaa=4abbaababb-2abbbaabab+
+2abbbaaabb-2abbaaabbb-7abbababab+
+3abbabbaab+4abbbabaab-2abbbbaaab+
+4ababababb-2abbabaabb-3ababbaabb-
-abaabbabb-2abaababbb+abaaabbbb+
+abbaabbab

Мы получили одно из нетривиальных решений уравнения ранга 2 над свободной алгеброй Ли *L[a,b]* для слов длины 9.

(3abbababb-2abababbb+abaabbbb+
+2abbbbaba-4abbbabab-abbbbbaa+
+abbbabba)a=(4abbaabab-2abbbaaba+
+2abbbaaab-2abbaaabb-7abbababa+
+3abbabbaa+4abbbabaa-2abbbbaaa+
+4abababab-2abbabaab-3ababbaab-
-abaabbab-2abaababb+abaaabbb+abbaabba)b

x_0 *=3abbababb-2abababbb+abaabbbb+*
+2abbbbaba-4abbbabab-abbbbbaa+abbbabba

y_0 *=4abbaabab-2abbbaaba+2abbbaaab-*
-2abbaaabb-7abbababa+3abbabbaa+
+4abbbabaa-2abbbbaaa+4abababab-
-2abbabaab-3ababbaab-abaabbab-
-2abaababb+abaaabbb+abbaabba

Аналогичным образом можно получить все решения уравнения (1) для слов длины 9.

Получив хотя бы одно нетривиальное решение уравнения вида *xa=yb* ранга 2 в свободной алгебре Ли *L[a,b]* для слов длины 9 мы тем самым опровергаем выдвинутую в статье [1] гипотезу о том, что для слов нечетной длины уравнение вида *xa=yb* ранга 2 в свободной алгебре Ли *L[a,b]* нетривиальных решений не имеет.

Заметим, что все пронормированные слова в свободной алгебре Ли *L[a,b]* делятся на 2 типа: оканчивающиеся на символ *a* и оканчивающиеся на символ *b*. Эти слова образуют два линейных подпространства L_a и L_b соответственно. А так как любой элемент этой алгебры можно представить в виде линейной комбинации правонормированных слов, то и сама алгебра является суммой (необязательно прямой) этих двух подпространств, то есть $L[a,b]= L_a + L_b$.

Пусть $\dim_q L[a,b]$ – размерность свободной алгебры Ли *L[a,b],* рассматриваемого как пространство натянутое на слова длины *q,* $\dim_q L_a$ – размерность линейного подпространства слов длины *q* оканчивающихся на *a*, а $\dim_q L_b$ – размерность линейного подпространства слов длины *q* оканчивающихся на *b*. Тогда, если $\dim_q L[a,b] = \dim_q L_a + \dim_q L_b$, то эти два подпространства имеют нулевое пересечение, то есть пространство алгебры Ли *L[a,b]* становится прямой суммой подпространств и, следовательно, уравнение вида *xa=yb* ранга 2 над свободной алгеброй Ли *L[a,b]* не имеет нетривиальных решений. Если же $\dim_q L[a,b] < \dim_q L_a + \dim_q L_b$, то пересечение подпространств не будет нулевым и, следовательно, некоторая линейная комбинация слов длины *q* оканчивающихся на *a* будет равна некоторой линейной комбинации слов длины *q* оканчивающихся на *b,* что означает, что уравнение вида *xa=yb* ранга 2 над свободной алгеброй Ли *L[a,b]* будет иметь нетривиальные решения.

Рассмотрим случаи для слов длины, меньших либо равных девяти, начиная с двух. Для этого воспользуемся известной формулой Витта. А.И. Ширшовым в работе «О свободных кольцах Ли» [2;113-122] показано, что если $\psi_q(n)$ – ранг модуля однородных многочленов степени q с n образующими, то число $\psi_q(n)$ совпадает с числом правильных слов длины q от n символов. Так как правильные слова образуют базу пространства алгебры Ли *L[a,b],* число правильных слов длины q от n символов и есть размерность этого пространства. Таким образом

$$n^q = q\psi_q(n) + d_1\psi_{d_1}(n) + ... + d_s\psi_{d_s}(n),$$

где n^q - число всех ассоциативных слов длины q от n символов, а d_i - делители числа q.

Формула Витта имеет вид:

$$\psi_q(n) = \frac{1}{q}\sum_{s/q}\mu(s)n^{q/s},$$

где $\mu(s)$ - функция Мебиуса.

Функция Мебиуса определяется следующим образом:

$$\mu(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s = 1, \\ (-1)^k, & \text{если } s = p_1...p_k,\ p_i - \text{различные простые}, \\ 0, & \text{если } s \text{ делится на квадрат} > 1 \end{cases}$$

В нашем случае n=2 .

Случай 1. q=2

$$\psi_1(2) + \psi_1(2) > \psi_2(2)$$

$$\psi_1(2) = \frac{1}{1}\left(\mu\left(\frac{1}{1}\right)\cdot 2^1\right) = 2$$

$$\psi_2(2) = \frac{1}{2}\left(\mu\left(\frac{2}{1}\right)\cdot 2^1 + \mu\left(\frac{2}{2}\right)\cdot 2^2\right) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

$$2 + 2 > 1 \quad \Rightarrow \quad 4 > 1$$

Следовательно, для слов длины 2 уравнение вида *xa=yb* ранга 2 над свободной алгеброй Ли *L[a,b]* имеет нетривиальные решения.

Случай 2. q=3

$$\psi_2(2) + \psi_2(2) > \psi_3(2)$$

$$\psi_3(2) = \frac{1}{3}\left(\mu\left(\frac{3}{1}\right)\cdot 2^1 + \mu\left(\frac{3}{3}\right)\cdot 2^3\right) = \frac{1}{3}\cdot 6 = 2$$

$$1 + 1 > 2 \quad \Rightarrow \quad 2 > 2$$

Следовательно, для слов длины 3 уравнение вида *xa=yb* ранга 2 над свободной алгеброй Ли *L[a,b]* не имеет нетривиальные решения.

Случай 3. q=4

$$\psi_3(2) + \psi_3(2) > \psi_4(2)$$

$$\psi_4(2) = \frac{1}{4}\left(\mu\left(\frac{4}{1}\right)\cdot 2^1 + \mu\left(\frac{4}{2}\right)\cdot 2^2 + \mu\left(\frac{4}{4}\right)\cdot 2^4\right) = \frac{1}{4}\cdot 12 = 3$$

$$2 + 2 > 3 \quad \Rightarrow \quad 4 > 3$$

Следовательно, для слов длины 4 уравнение вида *xa=yb* ранга 2 над свободной алгеброй Ли *L[a,b]* имеет нетривиальные решения.

Случай 4. q=5

$$\psi_4(2) + \psi_4(2) > \psi_5(2)$$

$$\psi_5(2) = \frac{1}{5}\left(\mu\left(\frac{5}{1}\right)\cdot 2^1 + \mu\left(\frac{5}{5}\right)\cdot 2^5\right) = \frac{1}{5}\cdot 30 = 6$$

$$3 + 3 > 6 \quad \Rightarrow \quad 6 > 6$$

Следовательно, для слов длины 5 уравнение вида *xa=yb* ранга 2 над свободной алгеброй Ли *L[a,b]* не имеет нетривиальные решения.

Случай 5. q=6

$$\psi_5(2) + \psi_5(2) > \psi_6(2)$$

$$\psi_6(2) = \frac{1}{6}\left(\mu\left(\frac{6}{1}\right)\cdot 2^1 + \mu\left(\frac{6}{2}\right)\cdot 2^2 + \mu\left(\frac{6}{3}\right)\cdot 2^3 + \mu\left(\frac{6}{6}\right)\cdot 2^6\right) = \frac{1}{6}\cdot 54 = 9$$

$$6 + 6 > 9 \quad \Rightarrow \quad 12 > 9$$

Следовательно, для слов длины 6 уравнение вида *xa=yb* ранга 2 над свободной алгеброй Ли *L[a,b]* имеет нетривиальные решения.

Случай 6. q=7

$$\psi_6(2) + \psi_6(2) > \psi_7(2)$$

$$\psi_7(2) = \frac{1}{7}\left(\mu\left(\frac{7}{1}\right)\cdot 2^1 + \mu\left(\frac{7}{7}\right)\cdot 2^7\right) = \frac{1}{7}\cdot 126 = 18$$

$$9+9>18 \quad \Rightarrow \quad 18>18$$

Следовательно, для слов длины 7 уравнение вида *xa=yb* ранга 2 над свободной алгеброй Ли *L[a,b]* не имеет нетривиальные решения.

Случай 7. q=8

$$\psi_7(2) + \psi_7(2) > \psi_8(2)$$

$$\psi_8(2) = \frac{1}{8}\left(\mu\left(\frac{8}{1}\right)\cdot 2^1 + \mu\left(\frac{8}{2}\right)\cdot 2^2 + \mu\left(\frac{8}{4}\right)\cdot 2^4 + \mu\left(\frac{8}{8}\right)\cdot 2^8\right) = \frac{1}{8}\cdot 240 = 30$$

$$18 + 18 > 30 \quad \Rightarrow \quad 36 > 30$$

Следовательно, для слов длины 8 уравнение вида *xa=yb* ранга 2 над свободной алгеброй Ли *L[a,b]* имеет нетривиальные решения.

Случай 8. q=9

$$\psi_8(2)+\psi_8(2)>\psi_9(2)$$

$$\psi_9(2)=\frac{1}{9}\left(\mu\left(\frac{9}{1}\right)\cdot 2^1+\mu\left(\frac{9}{3}\right)\cdot 2^3+\mu\left(\frac{9}{9}\right)\cdot 2^9\right)=\frac{1}{9}\cdot 504=56$$

$$30+30>56 \qquad \Rightarrow \qquad 60>56$$

Следовательно, для слов длины 8 уравнение вида *xa=yb* ранга 2 над свободной алгеброй Ли *L[a,b]* имеет нетривиальные решения.

Тем самым с помощью формулы Витта мы подтвердили наличие или отсутствие нетривиальных решений уравнения вида *xa=yb* ранга 2 в свободной алгебре Ли *L[a,b]* для слов длин 2,3,4,5, 6,7,8,9. Существование нетривиального решения рассматриваемого уравнения для слов длины 9, найденного в данной работе, это, как уже отмечалось выше, опровергает гипотезу о том, что для слов нечетной длины уравнение вида *xa=yb* ранга 2 в свободной алгебре Ли *L[a,b]* не имеет нетривиальных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демисенов Б.Н., Сизова О.А. О существовании нетривиальных решений уравнения вида *xa=yb* ранга 2 в свободной алгебре Ли *L[a,b]* для слов длины $\leq$ 6.//Вестник КГПИ. 2009. №1.
2. Ширшов А.И. О свободных кольцах Ли. М.,1958. т.45, №2

Түйендемі

Бұл жұмыста еркін Ли L [a, b] алгебрасындағы ұзындығы 7 тең сөздер үшін рангі 2 – ге тең xa=yb түріндегі теңдеулердің тек қана тривиалды шешімдері, ал ұзындығы 8, 9 сөздер үшін тривиалды емес шешімдері бар екенін көрсеттік. Яғни бірінші статьядағы берілген болжамды (гипотезаны) жоққа шығардық.

Conclusion

In this article we have shown that equation of the type xa=yb range 2 in free algebra Lie L[a,b] for words of the length 7 have only trivial decisions, but for words of the lengths 8 and 9 have an untrivial decision, hereunder we refuted promoted hypothesis in article [1].

Шарипов С.М., кандидат технических наук
Бекпергенова Ж.Б., инженер
Кокшетауский государственный университет

СОЗДАНИЕ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ИЗ ОТХОДОВ ПРОИЗВОДСТВА ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ И УСИЛЕНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Все устремления Казахстана направлены на реализацию индустриально-инновационной стратегии диверсификации экономики [1]. В отрасли промышленности строительных материалов диверсификация предполагает прежде всего внедрение новых технологий и расширение номенклатуры продукции, производимой предприятиями с целью повышения её конкурентоспособности на строительном рынке [2;3].

Наиболее рациональным направлением утилизации промышленных отходов является их использование как техногенного сырья при получении различного вида продукции и прежде всего строительного назначения.

На основе применения отходов промышленности возможно развитие производства не только традиционных, но и новых эффективных строительных материалов. Новые материалы обладают комплексом улучшенных технических свойств, и в то же время характеризуются наименьшей ресурсоемкостью как в процессе производства, так и при применении.

Обычно технологический процесс организуется так, чтобы обеспечить получение основного продукта должного качества. На качество же попутного продукта не обращается внимание, его списывают с баланса, транспортируют в отвалы, куда одновременно направляют