Штанько Е.В., магистрант
Костанайский государственный педагогический институт

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НАД КОЛЬЦОМ МАТРИЦ. ПРАВИЛО КРАМЕРА.

Линейная алгебра – ветвь математики столь же старая, как и сама математика. Первоначальной задачей линейной алгебры можно считать задачу решения линейного уравнения ax+b=0. Хотя эта задача не представляет никаких трудностей, прием, при помощи которого она решается, а также свойства соответствующей линейной функции y=ax+b являются исходными образцами для идей и методов всей линейной алгебры. Например, учение о решении систем линейных уравнений со многими неизвестными имеет в своей основе идею замены таких систем цепочками указанных уравнений простейшего вида.

Важность систем линейных уравнений особенно возросла после создания аналитической геометрии, позволившей свести к исследованию систем линейных уравнений все основные вопросы о расположении плоскостей и прямых в пространстве. Поиски общих формул решения системы n уравнений с n неизвестными уже в XVIII веке привели Лейбница и Крамера к понятию определителя. В XIX веке, помимо алгебры и аналитической геометрии, определители проникают и в анализ в работах Остроградского, Якоби (функциональные определители), Вронского и др. В середине прошлого века в связи с исследованиями некоммутативных алгебр (Гамильтон) в работах Кэли и Сильвестра возникает матричное исчисление, занявшее в дальнейшем развитии линейной алгебры одно из главных мест [1].

В текущем столетии методы линейной алгебры получили дальнейшее развитие как внутри самой алгебры, где основные понятия линейной алгебры приобрели новое богатство и гибкость благодаря использованию понятий групп и некоммутативных колец, так и в анализе вследствие использования бесконечно мерных функциональных пространств.

Рассмотрим системы линейных уравнений над кольцом матриц по аналогии с системами линейных уравнений над числовым полем и найдем условие, когда системы линейных уравнений над кольцом матриц будут являться крамеровскими и иметь единственное решение.

Всюду ниже R-кольцо,

$$\mathrm{M}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle\| \; a,b,c,d \in R \right\}.$$

Определение. Системой линейных уравнений над кольцом R с переменными $X_1, \dots, X_n$ называется система вида

$$A_{11}X_1+ \dots +A_{1n}X_n=B_1,$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$A_{m1}X_1+ \dots +A_{mn}X_n=B_m,$$

где $A_{ik}, B_i \in M_2, X_1, \dots, X_n \in M_2$.

Эту систему m линейных уравнений будем кратко записывать в виде

$$A_{i1}X_1+ \dots +A_{in}X_n=B_i, \ (i=1, \dots, m). \qquad (1)$$

Система линейных уравнений (1) является предикатом (условием) с n свободными переменными $X_1, \dots, X_n$. Допустимыми значениями свободных переменных всюду ниже считаются элементы кольца M_2. Этот n-местный предикат является конъюнкцией m более простых n-местных предикатов, каждый из которых определяется одним из уравнений системы (1).

Определение. Вектор $(V_1,\dots, V_n)$ из M_2^n называется решением системы уравнений (1), если верны равенства $A_{i1}V_1+ \dots +A_{in}V_n=B_i$, $(i=1, \dots, m)$.

Определение. Система линейных уравнений называется совместной, если имеет хотя бы одно решение. Система линейных уравнений называется несовместной, если она не имеет решений, т.е. множество ее решений пусто.

Наряду с системой (1) рассмотрим систему (над M_2)

$C_{i1}X_1+\ldots+C_{in}X_n=D_i$, $(i=1, \ldots, m)$. (2)

Отметим, что система линейных уравнений может состоять из одного уравнения.

Определение. Система уравнений (2) называется следствием системы уравнений (1), если каждое решение системы (1) является также решением системы (2).

Запись $(1)\Rightarrow(2)$ означает, что система (2) есть следствие системы (1).

Любая система линейных уравнений (над M_2) с n переменными является следствием несовместной системы уравнений (над M_2) с теми же переменными.

Система линейных уравнений (2) есть следствие системы уравнений (1) тогда и только тогда, когда множество всех решений системы (1) является подмножеством множества всех решений системы (2).

Легко убедиться, что бинарное отношение следования на множестве систем линейных уравнений (над M_2) рефлексивно и транзитивно, т.е. является предпорядком.

Определение. Линейное уравнение $G_1A_{11}+\ldots+G_mA_{m1})X_1+\ldots+(G_1A_{1n}+ +\ldots+ G_mA_{mn})X_n=G_1B_1+\ldots+ G_mB_m$, где $G_1, \ldots, G_m$ – произвольные элементы кольца R, называется линейной комбинацией уравнений системы (1) с коэффициентами $G_1, \ldots, G_m$.

Теперь опишем условие, когда системы линейных уравнений над кольцом матриц будут являться крамеровскими и иметь единственное решение.

Пусть дана система линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} A_1X+B_1Y=C_1, \\ A_2X+B_2Y=C_2, \end{cases} \qquad (1)$$

где A_i, B_i, $C_i\in M_2$, X, $Y\in M_2$, причем A_i, B_i, C_i – невырожденные матрицы. Обозначим через M основную матрицу этой системы, определитель которой вычисляется двумя различными способами при нахождении соответствующих неизвестных: при нахождении X определитель матрицы $|M|=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=A_2-B_2B_1^{-1}A_1$, при нахождении Y определитель матрицы $|M|=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=B_2-A_2A_1^{-1}B_1$. Для удобства будем помечать $|M_X|$ и $|M_Y|$ для нахождения неизвестного X и для нахождения неизвестного Y, соответственно.

Обозначим через M_k матрицу, которая получается из матрицы M в результате замены k-го столбца столбцом свободных членов системы:

$$M_1=\begin{bmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{bmatrix},\ M_2=\begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{bmatrix}.$$

Определители которых вычисляются следующим образом:

$$|M_1|=\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}=C_2-B_2B_1^{-1}C_1,$$

$$|M_2|=\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}=C_2-A_2A_1^{-1}C_1.$$

Утверждение. Если для определителей $|M_X|$ и $|M_Y|$, выражаемых квадратными матрицами, существуют обратные определители $|M_X^{-1}|$ и $|M_Y^{-1}|$, то система линейных уравнений над кольцом матриц (1) имеет единственное решение, выражаемое формулами

$$X=M_X^{-1}M_1,\ Y=M_Y^{-1}M_2. \qquad (3)$$

Формулы (3) назовем формулами Крамера для систем линейных уравнений над кольцом матриц, а данное утверждение – правилом Крамера для систем линейных уравнений над кольцом матриц.

Пример. Решить по правилу Крамера следующую систему линейных уравнений над кольцом матриц:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}X+\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}X+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} X = M_X^{-1}M_1, \\ Y = M_Y^{-1}M_2. \end{cases}$$

$$|M_X| = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_2 - B_2B_1^{-1}A_1,$$

$$|M_1| = \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix} = C_2 - B_2B_1^{-1}C_1.$$

$$|M_Y| = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = B_2 - A_2A_1^{-1}B_1,$$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = C_2 - A_2A_1^{-1}C_1.$$

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$|M_X| = A_2 - B_2B_1^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{7}{9} & -\frac{35}{9} \end{pmatrix},$$

$$|M_X^{-1}| = (A_2 - B_2B_1^{-1}A_1)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{315}{819} & -\frac{18}{819} \\ -\frac{63}{819} & -\frac{207}{819} \end{pmatrix},$$

$$|M_1| = C_2 - B_2B_1^{-1}C_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & 2 \\ -\frac{5}{3} & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$|M_Y| = B_2 - A_2A_1^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 & -13 \\ -7 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|M_Y^{-1}| = (B_2 - A_2A_1^{-1}B_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{13} & \frac{29}{91} \end{pmatrix},$$

$$|M_2| = C_2 - A_2A_1^{-1}C_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & -40 \\ -11 & -10 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{315}{819} & -\frac{18}{819} \\ -\frac{63}{819} & -\frac{207}{819} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{10}{3} & 2 \\ -\frac{5}{3} & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{120}{91} & \frac{76}{91} \\ \frac{15}{91} & \frac{55}{91} \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{13} & \frac{29}{91} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -31 & -40 \\ -11 & -10 \end{pmatrix} = .$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{11}{7} & \frac{10}{7} \\ -\frac{102}{91} & -\frac{10}{91} \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{cases} X = \begin{pmatrix} \frac{120}{91} & \frac{76}{91} \\ \frac{15}{91} & \frac{55}{91} \end{pmatrix}, \\ Y = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} & \frac{10}{7} \\ -\frac{102}{91} & -\frac{10}{91} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел – М.: высшая школа, 1979.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру – М.: Наука, 1977.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры – М.: Наука, 1975.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966.
5. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1984.

Түйіндеме

Мақалада тікшемдер сақынасындағы сазақты теңдеулер жүйелері қарастырылын, онда Крамер ережесінің жалпы түрі алынған.

Conclusion

This article summarizes the Cramer's rules in case of linear equation systems on matrix.