Список использованных источников

1. Э.В. Щанкина «Языковые средства создания образности лирических песен как лингвокультурный элемент русского и английского песенного фольклора 16-19 вв», 2009
2. В.А. Жмуров «Большая энциклопедия по психиатрии», 2012
3. В.А. Кухаренко «Практикум по стилистике английского языка», 2000
4. Y.M. Skrebnev «Fundamentals of English Stylistics» / M., 2000
5. А.Н. Мороховский, О.П. Воробьева, Н.И. Лихошерст, З.В. Тимошенко «Стилистика английского языка»
6. https://science.direct.com//Gauging the association of EFL learners' writing proficiency and their use of metaphorical language
7. https://science.direct.com// Theoretical structure of metaphors in emotional design, WonJoon Chung
8. https://science.direct.com // Acquiring Metaphorical Expressions in a Second Language

УДК 372.851

10 СЫНЫПТА ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ШЕШУДІ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ

Қадырова Қ.Т., 4 курс, М-17-31, А.Байтұрсынов атындағы Қостанай өңірлік университеті
Доспулова У.К, аға оқытушы, Қостанай өңірлік университеті

Тригонометриялық теңдеулер мен теңсіздіктер орта мектептің математика курсында оқу материалының мазмұны бойынша да, оқу-танымдық іс-әрекет тәсілдері бойынша да маңызды орындардың бірін алады.

Тригонометриялық теңдеулерді шешу тригонометрия бойынша барлық оқу материалдарымен байланысты оқушылардың білімін жүйелеудің алғышарттарын жасайды (мысалы, тригонометриялық функциялардың қасиеттері, тригонометриялық өрнектерді түрлендіру әдістері және т.б.) және алгебра бойынша зерттелген материалмен тиімді байланыс орнатуға мүмкіндік береді (теңдеулер, теңдеулердің эквиваленттілігі, теңсіздіктер, алгебралық өрнектерді бірдей түрлендіру және т. б.).

Басқаша айтқанда, тригонометриялық теңдеулерді шешу әдістерін қарастыру осы дағдыларды жаңа мазмұнға ауыстыруды қамтиды. Жалпы білім беретін мектептің 10-сынып бағдарламасында оқушылар «Тригонометриялық теңдеулер мен теңсіздіктер» бөлімінде үйренеді:

- Қарапайым тригонометриялық теңдеулерді шешуді;
- Тригонометриялық теңдеулерді көбейткіштерге жіктеу арқылы шешуді;
- Тригонометриялық теңдеулерді қосымша аргумент енгізу арқылы шешуді;
- Тригонометриялық теңдеулерді алмастыру тәсілі арқылы шешуді;
- Тригонометриялық теңдеулерді тригонометрия формулаларын қолданып шешуді;
- Тригонометриялық теңдеулерді тригонометриялық функциялардың дәреже көрсеткішін төмендету арқылы шешуді;
- Тригонометриялық теңдеулерді аттас тригонометриялық функциялардың теңдігінің әдісі көмегімен шешуді;
- Тригонометриялық теңдеулер жүйесін шешуді;

- Қарапайым тригонометриялық теңсіздіктерді шешуді.

Егер белгісізі (айнымалысы) тринонметриялық функцияның аргументі түрінде берілсе, онда теңсіздікті тригонометриялық теңсіздік деп атайды. Егер теңдеудің құрамында белгісіз айнымалысы тригонометриялық функцияның аргументі түрінде берілсе, онда теңдеу тригонометриялық теңдеу деп аталады.

Тригонометриялық теңдеуді шешу дегеніміз – берілген теңдеуді дұрыс тепе-теңдікке айналдыратын аргументтің мәндерін табу болып табылады

Егер тригонометриялық теңдеулер

$$\cos x = a, \sin x = a, tgx = a, ctgx = a.$$

(мұндағы a –кез келген нақты сан) түрінде берілсе, онда бұл тригонометриялық теңдеулер қарапайым тригонометриялық теңдеулер деп аталады.

Қарапайым теңдеулерді шешу:

I. $\sin x = a$

Егер $|a| > 1$ болса, онда $\sin x = a$ теңдеуінің шешімі болмайды. Себебі $y = \sin x$ функциясының мәндер жиыны $[-1; 1]$ кесіндісі.

Егер $|a| \leq 1$ болса, онда $\sin x = a$ теңдеуінің шешімі болады. Арксинустың анықтамасы бойынша берілген теңдеудің $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде бір ғана шешімі бар және ол шешім $arcsina$-ға тең.

$\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ аралығында $y = \sin x$ функциясы кемиді және -1–ден 1–ге дейінгі, 1-ді қоса алғандағы, мәндерді қабылдайды. Сондықтан түбір туралы теорема бойынша осы аралықта $\sin x = a$ теңдеуінің бір ғана түбірі бар және ол түбір $\pi - arcsina$-ға тең.

Демек, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ кесіндісінде $\sin x = a$ теңдеуінің екі шешімі бар: $x_{1=}arcsina$ мен $x_{2=}\pi - arcsina$ және олар $a = 1$ болғанда бірдей.

$y = \sin x$ функциясының периодтылығын (периоды 2π-ге тең) ескерсек, теңдеудің барлық шешімдерін жазудың формулаларын аламыз: $x = arcsina + 2\pi n, x = \pi - arcsina + 2\pi n$ (n –бүтін сан).

Осы екі формуланы біріктірсек,

$x = (-1)^k arc \sin a + \pi k$, ($k$ –бүтін сан немесе $n \in Z$) формуласы шығады.

$\sin x = 1$ теңдеуінің шешімдер жиынының жазылу түрі: $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z\right\}$

$\sin x = -1$ теңдеуінің шешімдер жиынының жазылу түрі: $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z\right\}$

$\sin x = 0$ теңдеуінің шешімдер жиынының жазылу түрі: $\{\pi n, n \in Z\}$.

Теңдеу	Шешімді табу формуласы
$\sin x = a, \lvert a \rvert > 1$	$\emptyset$
$\sin x = a, \lvert a \rvert \leq 1$	$x = (-1)^n arc \sin a + \pi n, n \in Z$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$
$\sin x = 0$	$x = \pi n, n \in Z$

II. $\cos x = a$

Егер $|a| > 1$ болса, онда $\cos x = a$ теңдеуінің шешімі болмайды. Себебі $y = \cos x$ функциясының мәндер жиыны $[-1; 1]$ кесіндісі.

Егер $|a| \leq 1$ болса, онда $\cos x = a$ теңдеуінің шешімі болады. Арккосинустың анықтамасы бойынша берілген теңдеудің $[0; \pi]$ кесіндісінде бір ғана шешімі бар және ол шешім $arccosa$.

Косинус функциясы жұп функция болғандықтан, $[-\pi; 0]$ кесіндісінде $\cos x = a$ теңдеуінің $-arccosa$ –ға тең бір ғана шешімі бар.

Демек, $[-\pi; \pi]$ кесіндісінде $\cos x = a$ теңдеуінің екі шешімі бар: $arccosa$ мен $-arccosa$ және ол шешімдер $a = 1$ болғанда бірдей.

$y = \cos x$ функциясы периодты болғандықтан, теңдеудің қалған шешімдері табылған шешімдерден $2\pi n$-ге ($n -$ бүтін сан) ерекшеленеді.

$\cos x = a$ теңдеуінің түбірлерін табудың жалпы формуласы:

$x = (-1)^n arc \sin a + \pi n, n \in Z$, мұндағы $n -$ бүтін сан және $|a| \leq 1$.

$a = 1$ болғанда, $arccosa$ мен $-arccosa$ сандары бірдей. Сондықтан $\cos x = 1$ теңдеуінің шешімін табу үшін $x = 2\pi n$ ($n -$бүтін сан немесе $n \in Z$) формуласы қолданылады.

$\cos x = -1$ теңдеуінің шешімдер жиынын $\{\pi + 2\pi n, n \in Z\}$ түрінде жазады. $\cos x = 0$ теңдеуінің шешімдер жиыны: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right\}$.

Теңдеу	Шешімді табу формуласы
$\cos x = a, \|a\| > 1$	$\emptyset$
$\cos x = a, \|a\| \leq 1$	$x = \pm arc \cos a + 2\pi n, n \in Z$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n, n \in Z$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

III. $tgx = a$

$tgx = a$ теңдігі орындалатындай a–ның кез келген мәнінде $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалына тиісті бір ғана x саны бар, ол сан $arctga$. Сондықтан $tgx = a$ теңдеуінің $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында бір ғана түбірі бар. Бұл интервалдың ұзындығы π–ге тең, $y = tgx$ функциясының периоды да осы санға тең. Сондықтан $tgx = a$ теңдеуінің қалған түбірлері табылған түбірден πn–ге, мұндағы $n -$ бүтін сан $(n \in Z)$, айырмашылығы бар.

Демек, $tgx = a$ теңдеуінің шешімі $x = arctga + \pi n$, мұндағы $n -$ бүтін сан $(n \in Z)$, формуласы бойынша табылады, шешімдер жиыны $\{arctga + \pi n, n \in Z\}$ түрінде жазылады.

$tgx = a$ теңдеуінің түбірлерін табудың жалпы формуласы:

$x = arctga + \pi n, n \in Z$, мұндағы $n -$ бүтін сан және $a \in (-\infty; +\infty)$.

$tgx = 1$ теңдеуінің шешімдер жиынының жазылу түрі: $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z\right\}$

$tgx = -1$ теңдеуінің шешімдер жиынының жазылу түрі: $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z\right\}$

$tgx = 0$ теңдеуінің шешімдер жиынының жазылу түрі: $\{\pi n, n \in Z\}$.

Теңдеу	Шешімді табу формуласы
$tgx = a, a \in (-\infty; +\infty)$	$x = arctga + \pi n, n \in Z$
$tgx = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$
$tgx = -1$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$
$tgx = 0$	$x = \pi n, n \in Z$

I. $ctgx = a$

$ctgx = a$ теңдігі орындалатындай a–ның кез келген мәнінде $(0;\ \pi)$ интервалына тиісті бір ғана x саны бар, ол сан $arcctga$. Сондықтан $ctgx = a$ теңдеуінің $(0;\ \pi)$ интервалында бір ғана түбірі бар. Бұл интервалдың ұзындығы π–ге тең, $y = ctgx$ функциясының периоды да осы санға тең. Сондықтан $ctgx = a$ теңдеуінің қалған түбірлері табылған түбірден πn–ге, мұндағы $n -$ бүтін сан $(n \in Z)$, айырмашылығы бар.

Демек, $ctgx = a$ теңдеуінің шешімі $x = arcctga + \pi n$, мұндағы $n -$ бүтін сан $(n \in Z)$, формуласы бойынша табылады, шешімдер жиыны $\{arcctga + \pi n, n \in Z\}$ түрінде жазылады.

$ctgx = a$ теңдеуінің түбірлерін табудың жалпы формуласы:

$x = arcctga + \pi n, n \in Z$, мұндағы $n -$ бүтін сан және $a \in (-\infty;\ +\infty)$.

$tgx = 1$ теңдеуінің шешімдер жиынының жазылу түрі: $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z\right\}$

$tgx = -1$ теңдеуінің шешімдер жиынының жазылу түрі: $\left\{\frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z\right\}$

$tgx = 0$ теңдеуінің шешімдер жиынының жазылу түрі: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right\}$.

Теңдеу	Шешімді табу формуласы
$ctgx = a, a \in (-\infty;\ +\infty)$	$x = arcctga + \pi n, n \in Z$
$tgx = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$
$tgx = -1$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z$
$tgx = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

Егер белгісізі (айнымалысы) тринонметриялық функцияның аргументі түрінде берілсе, онда теңсіздікті тригонометриялық теңсіздік деп атайды.

Қарапайым тригонометриялық теңсіздіктерге келесі 16 теңсіздік жатады:

$$\sin x > a, \sin x \geq a, \sin x < a, \sin x \leq a,$$
$$\cos x > a, \cos x \geq a, \cos x < a, \cos x \leq a,$$
$$tgx > a, tgx \geq a, tgx < a, tgx \leq a,$$
$$ctgx > a, ctgx \geq a, ctgx < a, ctgx \leq a.$$

(мұндағы a –кез келген нақты сан, x –белгісіз айнымалы)

I. $\sin x > a, \sin x \geq a, \sin x < a, \sin x \leq a$ түріндегі қарапайым теңсіздіктер

Егер $|a| \geq 1$ болса, онда $\sin x > a$ теңсіздігінің шешімі болмайды: $x \in \emptyset$. Егер $a < -1$ болса, онда $\sin x > a$ теңсіздігінің шешімі кез келген нақты саны болып табылады: $x \in R$. Егер $-1 \leq a < 1$ болса, онда $\sin x > a$ теңсіздігінің шешімі $arcsina + 2\pi n < x < \pi - arcsina + 2\pi n, n \in Z$ түрінде жазылады. Егер $a > 1$ болса, онда $\sin x \geq a$ теңсіздігінің шешімі болмайды: $x \in \emptyset$. Егер $a \leq -1$ болса, онда $\sin x \geq a$ теңсіздігінің шешімі кез келген нақты саны болып табылады: $x \in R$. Егер $a = 1$ болса, онда $\sin x \geq a$ теңсіздігінің шешімі $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ түрінде жазылады. Егер $-1 < a < 1$ болса, онда $\sin x \geq a$ теңсіздігінің шешімішекаралық бұрыштарды қамтиды және $arcsina + 2\pi n \leq x \leq \pi - arcsina + 2\pi n, n \in Z$ түрінде жазылады. Егер $a > 1$ болса, онда $\sin x < a$ теңсіздігінің шешімі кез келген нақты саны болып табылады: $x \in R$. Егер $a \leq -1$ болса, онда $\sin x < a$ теңсіздігінің шешімі болмайды: $x \in \emptyset$. Егер $-1 < a < 1$ болса, онда $\sin x < a$ теңсіздігінің шешімі$-\pi - arcsina + 2\pi n < x < arcsina + 2\pi n, n \in Z$ түрінде жазылады. Егер $a \geq 1$ болса, онда $\sin x \leq a$ теңсіздігінің шешімі кез келген нақты саны болып табылады: $x \in R$. Егер $a < -1$ болса, онда $\sin x \leq a$ теңсіздігінің шешімі болмайды: $x \in \emptyset$. Егер $a = -1$ болса, $x = -\frac{\pi}{2} +$

$2\pi n, n \in Z$. Егер $-1 < a < 1$ болса, онда $\sin x \leq a$ теңсіздігінің шешімі$-\pi - arcsina + 2\pi n \leq x \leq arcsina + 2\pi n, n \in Z$ түрінде жазылады.

$\cos x > a, \cos x \geq a, \cos x < a, \cos x \leq a$ түріндегі қарапайым теңсіздіктер. Егер $a \geq 1$ болса, онда $\cos x > a$, теңсіздігінің шешімі болмайды: $x \in \emptyset$. Егер $a < -1$ болса, онда $\cos x > a$, теңсіздігінің шешімі кез келген нақты саны болып табылады: $x \in R$. Егер $-1 \leq a < 1$ болса, онда $\cos x > a$, теңсіздігінің шешімі $-arccosa + 2\pi n < x < arccosa + 2\pi n, n \in Z$ түрінде жазылады. Егер $a > 1$ болса, онда $\cos x \geq a$ теңсіздігінің шешімі болмайды: $x \in \emptyset$

Егер $a \leq -1$ болса, онда $\cos x \geq a$ теңсіздігінің шешімі кез келген нақты саны болып табылады: $x \in R$. Егер $a = 1$ болса, онда $\cos x \geq a$ теңсіздігінің шешімі $x = 2\pi n, n \in Z$ түрінде жазылады. Егер $-1 < a < 1$ болса, онда $\cos x \geq a$ теңсіздігінің шешімі$-arccosa + 2\pi n \leq x \leq arccosa + 2\pi n, n \in Z$ түрінде жазылады. Егер $a > 1$ болса, онда $\cos x < a$ теңсіздігінің шешімі кез келген нақты саны болып табылады: $x \in R$. Егер $a \leq -1$ болса, онда $\cos x < a$ теңсіздігінің шешімі болмайды: $x \in \emptyset$. Егер $-1 < a < 1$ болса, онда $\cos x < a$ теңсіздігінің шешімі$arccosa + 2\pi n < x < 2\pi n - arccosa + 2\pi n, n \in Z$ түрінде жазылады. Егер $a \geq 1$ болса, онда $\cos x \leq a$ теңсіздігінің шешімі кез келген нақты саны болып табылады: $x \in R$. Егер $a < -1$ болса, онда $\cos x \leq a$ теңсіздігінің шешімі болмайды: $x \in \emptyset$. Егер $a = -1$ болса, $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$. Егер $-1 < a < 1$ болса, онда $\cos x \leq a$ теңсіздігінің шешімі$arccosa + 2\pi n \leq x \leq 2\pi n - arccosa + 2\pi n, n \in Z$ түрінде жазылады.

$\tan x > a, \tan x \geq a, \tan x < a, \tan x \leq a$ түріндегі қарапайым теңсіздіктер. Кез-келген нақты a мәні үшін $\tan x > a$ теңсіздік шешімі $arctana + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ түрінде болады. Кез-келген нақты a мәні үшін $\tan x \geq a$ теңсіздік шешімі $arctana + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ түрінде болады. Кез-келген нақты a мәні үшін $\tan x < a$ теңсіздік шешімі $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < arctana + \pi n, n \in Z$ түрінде болады. Кез-келген нақты a мәні үшін $\tan x \leq a$ теңсіздік шешімі $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq arctana + \pi n, n \in Z$ түрінде болады.

$\cot x > a, \cot x \geq a, \cot x < a, \cot x \leq a$ түріндегі қарапайым теңсіздіктер. Кез-келген нақты a мәні үшін $\cot x > a$ теңсіздік шешімі $\pi n < x < arc\mathrm{cot}a + \pi n, n \in Z$ түрінде болады. Кез-келген нақты a мәні үшін $\cot x \geq a$ теңсіздік шешімі $\pi n < x \leq arc\mathrm{cot}a + \pi n, n \in Z$ түрінде болады. Кез-келген нақты a мәні үшін $\cot x < a$ теңсіздік шешімі $arc\mathrm{cot}a + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in Z$ түрінде болады. Кез-келген нақты a мәні үшін $\cot x \leq a$ теңсіздік шешімі $arc\mathrm{cot}a + \pi n \leq x < \pi + \pi n, n \in Z$ түрінде болады.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. А.Е. Әбілқасымова, Т.П. Кучер, В.Е. Корчевский, З.Ә. Жұмағұлова «Алгебра және анализ бастамалары [мәтін]: Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық» / А., 2019

2. Қ. Қаңлыбаев, К. Әбдімәжитова, Ш. Бекбаулиев «Тригонометриялық функциялар және олардың теңдеулері мен теңсіздіктері» / А., 1995

3. Н.М. Бескин «Вопросы тригонометрии и ее преподавания», 1950