УДК 517.925

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Наурызова А.С., 4 курс, 5В060100 – математика, инженерно-технический институт, Костанайский региональный университет им. А.Байтурсынова

Ысмагул Р.С., кандидат физико-математических наук, профессор, Костанайский региональный университет им. А.Байтурсынова

В этой статье рассматриваются линейные дифференциальные уравнения с частными производными, дается краткое описание их применения в областях науки. Была изучена линейность и линейный оператор, также были рассмотрены дифференциальные уравнения первого и второго порядка. Для линейных дифференциальных уравнений второго порядка был показан канонический вид, приведена и доказана теорема.

Многие дифференциальные уравнения в частных производных возникли в других областях математики. Нас интересуют дифференциальные уравнения в частных производных, потому что большая часть математической физики описывается такими уравнениями. Например, динамика жидкостей (и в более общем смысле динамика сплошных сред), электромагнитная теория, квантовая механика, транспортный поток [1, с.32].

Как правило, данное дифференциальное уравнение в частных производных доступно только для численного решения, а аналитические решения в практическом или исследовательском сценарии часто невозможны. Однако для того, чтобы провести разумное исследование, необходимо понять общую теорию. Например, нам может понадобиться понять, какой тип дифференциального уравнения в частных производных мы имеем, чтобы убедиться, что численное решение действительно. Действительно, некоторые типы уравнений нуждаются в соответствующих граничных условиях; без знания общей теории возможно, что задача может быть некорректной, что метод решения ошибочен. В данной работе мы попытаемся изучить происхождение дифференциальных уравнений, исследовать линейные дифференциальные уравнения первого и второго порядка и произведем преобразование дифференциальных уравнений с частными производными путем замены переменных.

Дифференциальные уравнения впервые появились с изобретением исчисления Ньютоном и Лейбницем. В главе 2 своей работы 1671 года «Methodus fluxionum et Serierum Infinitarum» Исаак Ньютон перечислил три вида дифференциальных уравнений [2, с.309]:

$$\frac{dy}{dx}=f(x),\ \frac{dy}{dx}=f(x,y),\ x_1\frac{\partial y}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial y}{\partial x_2}=y.$$

Во всех этих случаях y – неизвестная функция x (или x_1, x_2), а f – заданная функция.

Он решает эти и другие примеры, используя бесконечные ряды, и обсуждает неединственность решений. Якоб Бернулли предложил дифференциальное уравнение Бернулли в 1695 году. Это обыкновенное дифференциальное уравнение вида [2, с.311].

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n,$$

для которого в следующем году Лейбниц получил решения, упростив его.

Исторически проблема вибрирующей струны, такой как струна музыкального инструмента, изучалась Жаном ле Рондом д'Аламбером, Леонардом Эйлером, Даниэлем Бернулли и Жозефом-Луи Лагранжем. В 1746 году д'Аламбер открыл одномерное волновое уравнение, а через десять лет Эйлер открыл трехмерное волновое уравнение [3, с.227].

Уравнение Эйлера-Лагранжа было разработано в 1750-х годах Эйлером и Лагранжем в связи с их исследованиями проблемы таутохрона. Эта задача определения кривой, на которой взвешенная частица упадет в фиксированную точку за фиксированное время, независимо от начальной точки. Лагранж решил эту задачу в 1755 году и послал решение Эйлеру. Оба в дальнейшем развили метод Лагранжа и применили его к механике, что привело к формулировке лагранжевой механики.

В 1822 году Фурье опубликовал свою работу о тепловом потоке в «Théorie analytique de la chaleur» (Аналитическая теория тепла), в которой он основывал свои рассуждения на законе охлаждения Ньютона, а именно на том, что поток тепла между двумя соседними молекулами пропорционален чрезвычайно малой разнице их температур. В этой книге содержалось предложенное Фурье уравнение теплопроводности для проводящей диффузии тепла. Это дифференциальное уравнение в частных производных теперь преподается каждому студенту математической физики [3, с.229].

Теперь исследуем сами линейные дифференциальные уравнения. Пусть $u = u(x_1,\ldots,x_n)$ – функция n независимых переменных $x_1,\ldots,x_n$. Дифференциальное уравнение в частных производных – это уравнение, содержащее независимые переменные $x_1,\ldots,x_n$, зависимую переменную или неизвестную функцию u и ее частные производные до некоторого порядка. Согласно Chazarain и Piriou [4, с.84] оно имеет форму

$$F(x_1,\ldots,x_n,u,u_{x1},\ldots,u_{xn},\ldots,u_{x1x1},\ldots,u_{xixj},\ldots) = 0, \quad (1)$$

где F – заданная функция и $u_{xj} = \partial u/\partial x_j, u_{xixj} = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_j, i,j = 1,\ldots,n$ – частные производные u. Порядок уравнения – это порядок старшей производной, которая появляется в уравнении.

Под решением уравнения (1) понимается функция $u \in C^m(\Omega)$ такая, что подстановка u и ее производных до порядка m в (1) делает ее тождественной в $(x_1,\ldots,x_n) \in \Omega$.

Здесь мы хотели бы подробнее изучить, что такое линейность. Согласно Тейлору [5, с.213] это означает следующее. Соответствие

$$u(x_1,\ldots,x_n) \mapsto Lu := F(x_1,\ldots,x_n,u,u_{x1},\ldots,u_{xixj},\ldots)$$

определяет оператор L. Оператор L называется линейным если

$$L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1Lu_1 + c_2Lu_2 \quad (2)$$

Теперь мы остановимся на линейных дифференциальных уравнениях в частных производных первого порядка. Carrier и Pearson [6, с.23] пишут, что такое уравнение с двумя независимыми переменными z,y и зависимой переменной u имеет вид

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y), \quad (3)$$

где $a,b,c,d \in C^1(\Omega), \Omega \subset \mathrm{R}^2$ и $a^2 + b^2 \neq 0$, то есть, по крайней мере, один из коэффициентов a или b не обращается в нуль на Ω. Если мы рассмотрим дифференциальный оператор

$$L = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c,$$

Тогда уравнение (3) записывается, как

$$Lu = d,$$

в то время как однородное уравнение, соответствующее (3), имеет вид

$$Lu = 0. \ (4)$$

Согласно Баскакову [7, с.76], под *общим решением* (4) мы понимаем отношение, включающее произвольную функцию, такое, что для любого выбора произвольной функции мы получаем решение уравнения (4). Если u_h обозначает общее решение однородного уравнения и u_p частное решение неоднородного уравнения (3), то общее решение (1) является

$$u = u_h + u_p. \quad (5)$$

Действительно, (5) является решением уравнения (3), так как по свойству линейности оператора L имеем

$$Lu = L(u_h + u_p) = Lu_h + Lu_p = 0 + d = d.$$

И наоборот, если v – решение (1), то мы покажем, что оно имеет вид (5). Возьмите функцию $v - u_p$ по Баскакову [7, с. 79]. Затем

$$L(v - u_p) = Lv - Lu_p = d - d = 0,$$

то есть $v - u_p$ является решением однородного уравнения (4) и поэтому $u_h = v - u_p$ для некоторого выбора произвольной функции, которая появляется в u_h. Таким образом,

$$v = u_h + u_p.$$

Перейдем к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Основываясь на работе Сергеева [8, с.29], мы вывели общую форму линейного уравнения второго порядка при двух независимых переменных x,y, она имеет вид

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y), \quad (6)$$

где $a,b,c,d,e,f,g \in C^2(\Omega), \Omega \subseteq R^2$ и $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ в Ω.

Если мы рассмотрим дифференциальный оператор в частных производных

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) := a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2}{\partial y^2} + d\frac{\partial}{\partial x} + c\frac{\partial}{\partial y} + f, \quad (7)$$

Тогда уравнение (6) записывается как

$$Lu = g,$$

при однородном уравнении, соответствующим (6) является

$$Lu = 0. \quad (8)$$

Согласно Берсу [9, с.129], оператор L является линейным, так как условие (2) выполняется для каждой пары функций $u_1, u_2 \in C^2(\Omega)$ и любой константы $c_1, c_2 \in R$. Из линейности оператора следует, что если $u_1, \ldots, u_n$ являются решениями однородного уравнения (6), то за каждый выбор константы $c_1, \ldots, c_n$, функции

$$c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n$$

также решение (6). Кроме того, если u_p является частным решением уравнения (6) , то

$$L(c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n + u_p) = L(c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n) + Lu_p = Lu_p = g.$$

Таким образом,

$$u = c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n + u_p$$

является также решением уравнения (6) для каждого выбора констант $c_1, \ldots, c_n$.

Если u_h обозначает общее решение однородного уравнения (8), а u_p – любое частное решение неоднородного уравнения (6), то $u = u_h + u_p$ является общим решением неоднородного уравнения.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка имеют канонические формы в двух независимых переменных [10, с.7].

Рассмотрим линейное уравнение

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g, \tag{9}$$

и почти линейное уравнение в двух переменных

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \tag{10}$$

где $a,...,g$ относятся к классу $C^2(\Omega), \Omega \subseteq \mathrm{R}^2$ – домен и $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ в Ω.

Выражение $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$

является главной частью каждого из этих уравнений.

Согласно Ветохину [10, с.4], функция Δ определенная с помощью

$$\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$$

и является дискриминантом уравнения (10).

Знак дискриминанта инвариантен при обратимых преобразованиях переменных.

Теорема. Преобразование дифференциальных уравнений с частными производными путем замены переменных.

Введем вместо (x,y) новые независимые переменные (ξ, η). Пусть $\Phi : \begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$

будет плавной сменой переменных, для которой якобиан

$$J\Phi(P) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

и уравнение (10) преобразуется в

$$Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + \Psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0. \tag{11}$$

Тогда знак дискриминанта при $Q = \Phi(P)$ такой же, как и при P [11, с.473].

Доказательство. Производя изменение переменных, мы имеем:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.$$

Подставляя в (10), получаем уравнение (11), где:

$$A = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2,$$

$$B = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + c\xi_y\eta_y,$$

$$C = a\eta_x^2 = 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2.$$

Применяя процедуру MAPLE [12, с.281], мы имеем

$$\Delta' = B^2 - AC = -(-\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y)^2(-b^2 + ca) = (\xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y)^2(b^2 - ac) = J^2\Phi(P)\Delta.$$

Поскольку $J\Phi(P) \neq 0$, доказательство является полным.

Таким образом, из доказанной теоремы ясно, что мы можем классифицировать уравнение (10) по знаку дискриминанта.

В этой статье мы изучили, что такое линейное дифференциальное уравнение в частных производных. Мы разобрались, что дифференциальные уравнения в частных производных используются для математической формулировки и, таким образом, помогают решению физических и других задач, связанных с функциями нескольких переменных, таких как распространение тепла или звука, течение жидкости, упругость, электростатика, электродинамика и т. д. В данной работе мы рассмотрели дифференциальные уравнения первого и второго порядка, канонический вид дифференциальных уравнений второго порядка, а также доказали теорему.

Список использованных источников

1. Л.А. Золкина, Е.С. Плотникова «Дифференциальные уравнения [Текст]», 2012
2. Г. Вилейтнер «История математики [Текст]: монография» / М., 2013
3. Ю.П. Петров «История и философия науки [Текст]: учебно-методическое пособие» / Петербург, 2012
4. J. Chazarain «Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equations [Текст]: монография», 2011
5. М. Тейлор «Дифференциальные уравнения в частных производных II: Качественные исследования линейных уравнений [Текст]: монография» / М., 2013
6. G.F. Carrier «Partial Differential Equations: Theory and Technique [Текст]: монография», 2014
7. А.Г. Баскаков «Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений [Текст]» / М., 2013
8. И.Н. Сергеев «Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения [Текст]» / М., 2009
9. Л. Берс «Уравнения с частными производными [Текст]: монография» / М., 2013
10. А.Н. Ветохин «Линейные дифференциальные уравнения второго порядка [Текст]: учебно-методическое пособие» / М., 2003
11. E. Zauderer «Partial differential equations of applied mathematics [Текст]: монография», 2011
12. Y. Jurang «Oscillation Theorems for Second Order Linear Differential Equations with Damping [Текст]», 1986

ӘОЖ 004.942

ИМЭО-НЫ ҚОЛДАНУДЫҢ ТЕОРИЯЛЫҚ НЕГІЗДЕРІ

Қайдарова Н.Т., 4 курс, 5В011100 – информатика, инженерлік және техникалық институты, А.Байтұрсынов атындағы Қостанай мемлекеттік университеті

Ерсултанова З.С., техника ғылымдарыныңкандидаты, информатика кафедрасының қауымдастырылған профессоры

Қазіргі заман – ғылым және ақпараттық технологиялардың дамып жатқан заманы. Уақыт өткен сайын ақпараттың таралуы мен қолданылуы әрдайым өзгеріп, жаңара түсуде. Кейінгі кезде ақпараттар көлемінің артуы мен компьютерлік технологиялардың жылдам дамуына байланысты компьютерлік технологиялармен оқыту да белсенді түрде дамып