НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ НАВЫКОВ У УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Шаймерденов А.А.
Костанайский Государственный Педагогический Университет
им. У. Султангазина, г. Костанай

Научный руководитель: Асканбаева Г.Б.
Костанайский Государственный Педагогический Университет
им. У. Султангазина, г. Костанай

Аннотация: данная тема поможет повысить уровень логической культуры, а также сформировать исследовательские навыки у школьников.

Ключевые слова: геометрия, треугольник, теорема, доказательство, чевиана.

Annotation: this topic will help to increase the level of logical culture, as well as to form research skills of students.

Key words: geometry, triangle, theorem, proof, cheviana.

Anotasıa: bul taqyryp deńgeıin arttyrý kómektesedi, logıkalyq mádenıet, sondaı-aq oqýshylardyn ǵylymı-zertteý daǵdylary qalyptastyrý.

Negizgi sózder: geometrıa, Úshburysh, teorema, dáleldeý, chevıana.

Геометрию считают трудным предметом. А трудность ее в том, что по сравнению с алгеброй она мало алгоритмизирована. Почти каждую содержательную задачу можно решить несколькими способами, используя различные методы. Поэтому геометрия содержит в себе потенциал для развития гибкости ума, пластичности мышления и конструктивных способностей учащихся, для воспитания у них чувства прекрасного.

В ходе реформы школьного математического образования, повлекшей за собой перестройку учебных планов и программ на математических факультетах педагогических институтов, допущены существенные просчеты и перегибы. Со страниц школьных учебных пособий по геометрии исчезли многие замечательные геометрические факты, своего рода геометрические «жемчужины», использовавшиеся при доказательствах теорем и решении задач. Новые же методы – векторный, координатный, метод преобразований – не заняли должного места в преподавании геометрии и им все меньше уделяется внимания. В этом, на мой взгляд заключается одна из основных причин значительного понижения уровня теоретического и практической подготовки по геометрии выпускников средних школ.

Данная статья призвана возродить интерес к элементарным методам в геометрии. Она адресована всем, кто желает расширить и углубить знания по элементарной геометрии, совершенствовать технику решения планиметрических задач элементарными средствами. Такими читателями являются, прежде всего, учащиеся математических классов и школ их преподаватели, учителя математики общеобразовательных школ, студенты педагогических вузов.

Я столкнулся с тем, что в действительности многие удивительные соотношения и изящные геометрические факты не входят в основной курс геометрии. Многие из них сейчас выглядят малоинтересными, несовершенными и встречаются только в энциклопедиях. Однако некоторые из них продолжают жить, и по сей день. Одни из них теоремы Менелая, Чевы.

Эти теоремы просты, интересны и находят применение при решении как простых, так и весьма сложных задач. Несмотря на это эти теоремы не изучаются в школе на уроках геометрии и встречаются только в школьном учебнике геометрии под редакцией Атанасяна Л.С. в приложении. Доказательства, предложенные автором сложны. Задачи, помещённые в учебнике на применение обратной теоремы Менелая трудны, а задачи на применение прямой теоремы вовсе не рассматриваются.

Теорема Менелая. Пусть задано треугольник ABC и три точки A_1, B_1, C_1 на прямых BC, AC и AB соответственно точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}=1 \qquad (1.1)$$

Замечания. Иногда произведение отношений в теореме Менелая записывают так:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1$$

Все отношения, перемножаются - это отношение ориентированных отрезков.

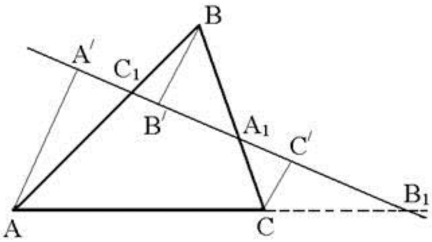

Рисунок 1

Доказательство.

Необходимость. Пусть прямая l пересекает прямые BC, AC и AB в точках A_1, B_1, C_1 и соответственно (См. Рисунок 1) и AA', BB', CC' - перпендикуляры, которые опущены из точек A, B, C на прямую l. Как было доказано ранее:

$$\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{AA'}{BB'} \qquad \frac{B_1C}{B_1A}=\frac{CC'}{AA'} \qquad \frac{A_1B}{A_1C}=\frac{BB'}{CC'}$$

Перемножив записанные отношение, имеем:

$$\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{AA'}{BB'}\cdot\frac{CC'}{AA'}\cdot\frac{BB'}{CC'}=1$$

Достаточность. Проведем прямую l. Мы должны доказать, что эта прямая пересекает AB в точке C_1 . Прежде всего докажем, что A_1B_1 действительно пересекает AB. Предположим, что A_1B_1 параллельная AB (См. Рисунок 2). Но тогда:

$$\frac{B_1A}{B_1C}\cdot\frac{A_1C}{A_1B}=1$$

Отсюда и из равенства (1.1) следует $\frac{C_1A}{C_1B}=1$, невозможно.

пусть $\tilde{C}$ - точка пересечения прямых A_1B_1 и AB. По уже доказанному

$$\frac{\tilde{C}A}{\tilde{C}B}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}=1$$

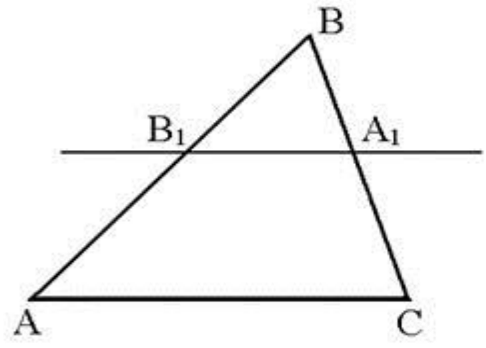

Рисунок 2

Сравнивая с условием, получаем, что

$$\frac{\tilde{C}A}{\tilde{C}B}=\frac{C_1A}{C_1B}$$

Поскольку речь идет об отношении ориентированных отрезков, то $\tilde{C} = C_1$. Что и требовалось доказать. Итак, теорема Менелая полностью доказана.

Замечание 1. При решении конкретных вычислительных задач, если известно, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, можно не беспокоиться о записи отношений ориентированных отрезков в формуле (1.1), а ограничиться отношениями их длин.

Замечание 2. Если заменить в (1.1) ориентированное отношение отношениями длин, обратная теорема перестает быть верной, то есть точки A_1, B_1, C_1, для которых выполняется (1.1), не должны лежать на одной прямой.

Например, пусть точки A_1, B_1 взятые BC, CA на сторонах треугольника ABC так, что $\frac{BA_1}{A_1C} = 2$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1}{2}$ и C_1 - середина стороны AB, тогда

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

но точки A_1, B_1, C_1 не лежащие на одной прямой.

Задача (прямая Симпсона). Основания перпендикуляров, проведенных к прямым, содержащим стороны треугольника, из произвольной точки, описанной около него окружности, лежат на одной прямой.

Решение. Пусть PA_1 , PB_1 , PC_1 перпендикуляры, проведённые к прямым, содержащим стороны треугольника ABC(См. Рисунок 3). Запишем теорему Менелая для ΔABC и секущих A_1, B_1, C_1 .

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = -1$$

1) – прямоугольный. $\overline{BA_1} = BP \cdot cos\, PBC$

ΔPA_1C - прямоугольный. $\overline{CA_1} = CP \cdot cos\, PCB$

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} = -\frac{BP\, cos\, PBC}{CP\, cos\, PCB}$$

2) ΔB_1PC – прямоугольный. $\overline{CB_1} = PC\, cos\, PCA$

ΔABB_1 - прямоугольный. $\overline{AB_1} = PA\, cos\, PA\, C$

$$\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = -\frac{PC\, cos\, PCA}{PA\, cos\, PAC}$$

3) ΔAC_1P - прямоугольный.$\overline{AC_1} = AP\, cos\, PA\, B$

ΔC_1BP - прямоугольный. $\overline{C_1B} = PB\, cos\, PBA$

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = -\frac{AP\, cos\, PAB}{PB\, cos\, PBA}$$

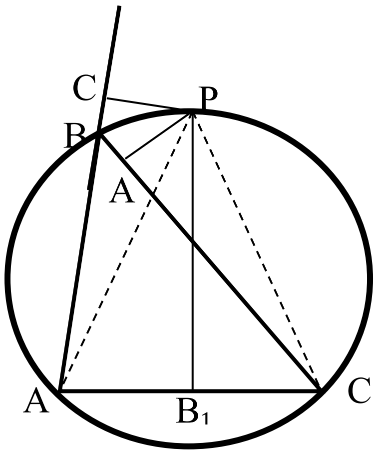

Рисунок 3

4) $\angle PAB = \angle PCB$ - т.к. опираются на одну дугу

$\angle PAC = \angle PBC$ - т.к. опираются на одну дугу

5) $\angle PCA + \angle PBA = 180°$

$\angle PAC = 180° - \angle PBA$

$$cos\, PBC = cos(180° - \angle PBA) = -\, cos\, PBA$$

$$cos\, PAC = cos\, PBA = cos(180° - \angle PCA) = -\, cos\, PCA$$

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = -\frac{BP\, cos\, PBC}{CP\, cos\, PCB} \cdot \left(-\frac{CP\, cos\, PCA}{AP\, cos\, PAC}\right) \cdot \left(-\frac{AP\, cos\, PAB}{PB\, cos\, PBA}\right) = -1$$

Следовательно, в силу теоремы Менелая точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

Теорема Чевы является критерием пересечения трех прямых в одной точке и потому находит широкое применение в задачах на доказательства и вычисления.

Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками на противолежащих сторонах, называют *чевианами.*

Прямая теорема Чевы: случай внутренней точки. Если три чевианы пресекаются в одной точке, то отношения, в которых их основания A_1, B_1, C_1 делят стороны треугольника, удовлетворяют равенству:

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$$

Обратная теорема Чевы: случай внутренней точки. Если выполняется равенство:

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$$

то отрезки A_1A, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Обобщенная теорема Чевы в случае внешней точки звучит следующим образом:

Если в треугольнике ABC на продолжениях сторон AB и BC за точку взяты соответственно точки C_1, A_1, а на стороне AC взята точка B_1, то прямые A_1A, BB_1 и CC_1

- или пересекаются в одной точке
- или параллельны

тогда и только тогда, когда выполнено равенство:

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$$

Задача. В треугольник ABC вписано полукруг так, что его диаметр лежит на стороне BC, а дуга соприкасается сторон AB и AC соответственно в точках C_1 и B_1. Доказать, что прямые BB_1 и CC_1 пересекаются на высоте AA_1 треугольника.

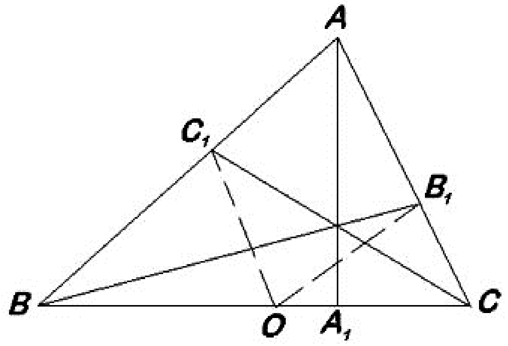

Рисунок 4

Доказательство

Из условия задачи следует, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах треугольника ABC (См. Рисунок 4).

Итак, достаточно доказать, что

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$$

Центр O полукруга соединим с точками соприкосновения C_1 и B_1. Обозначим через r радиус окружности, из прямоугольных треугольников OB_1C и OC_1B находим

$$B_1C=rctgC,\qquad C_1B=rctgB$$

С прямоугольных треугольников ABA_1 и ACA_1 есть

$$BA_1=AA_1ctgB, CA_1=AA_1ctgC$$

Отметим, что отрезки AB_1 и AC_1 касательных к окружности равны, следовательно, получим

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{ctgB}{ctgC}\cdot\frac{ctgC}{ctgB}=1$$

Итак, согласно теореме Чевы прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Теоремы Чевы и Менелая просты в понимании. Но трудности, связанные с освоением этих теорем, оправданы их применением при решении задач.

Решение задач с помощью теорем Чевы и Менелая более рационально, чем их решение другими способами, например векторным, которое требует дополнительных действий.

Я считаю, что такие теоремы должны быть включены в основной курс геометрии 7-х-9-х классов, так как решение задач с помощью этих теорем развивает мышление и логику учеников.

Теоремы Чевы и Менелая помогают быстро и оригинально решить задачи повышенной сложности

Список литературы:

1. Атанасян Л.С., Денисова Н.С., Силаев Е.В. Курс элементарной геометрии. 1 часть. Планиметрия. - М .: Сантакс-Пресс, 1997. - 304 с.

2. Буник И. Теорема Менелая // Математика. - №15 (315), апрель, 2005. - с.17-21.

3. Готман Э.Г., Скопец З.А. Задача одна - решения разные. М .: Сов. шк.-1988.-173с.

11. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии, ч.1. - М .: Наука, 1986. - 272 с

УДК 510.665

МЕТОД АНАЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Юнусова А.
Костанайский государственный педагогический университет им.
М. У. Султангазина, г.Костанай
Научный руководитель: Калжанов М.
Костанайский государственный педагогический университет и.
М. У. Султангазина, г. Костанай

Аннотация: В статье проведен анализ и изложены основные принципы применения метода аналогии в школьном курсе математики.

Ключевые слова: аналогия, метод аналогии, школьный курс математики.

Abstract: the article analyzes and describes the main principles of using the analogy method in a school mathematics course.

Keywords: analogy, method of analogy, school mathematics course.

Аннотация: мақалада мен негізгіпринциптеріәдісінқолдануұқсасмектеп математика курсында.

Түйінді сөздер: аналогия, аналогия әдісі, математика мектеп курсы.

В пояснительной записке к программе по математике отмечается, что данный курс существенно расширяет кругозор учащихся, знакомит их с такими видами умственной деятельности, как индукция и дедукция, обобщение и конкретизация, анализ и синтез, классификация и систематизация, абстрагирование и аналогия. Итак, умственное развитие учащихся на материале курса математики – это программное требование,