$$(1+\mathrm{tg}1^{\circ})(1+\mathrm{tg}2^{\circ})\dots(1+\mathrm{tg}44^{\circ}) = (\mathrm{tg}45^{\circ}+\mathrm{tg}1^{\circ})(\mathrm{tg}45^{\circ}+\mathrm{tg}2^{\circ})\dots(\mathrm{tg}45^{\circ}+\mathrm{tg}44^{\circ}) = \frac{\sin 46^{\circ}}{\cos 45^{\circ}\cos 1^{\circ}} * \frac{\sin 47^{\circ}}{\cos 45^{\circ}\cos 2^{\circ}} \dots \frac{\sin 99^{\circ}}{\cos 45^{\circ}\cos 44^{\circ}} = \frac{1}{(\cos 45^{\circ})^{44}} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{44}} = \frac{2^{44}}{2^{22}} = 2^{22}.$$ [4, 187бет]

Тригонметиряны жақсы білу, тригонометриялық формулаларды есептер шығаруда дұрыс әрі орынды қолдану, қиындығы жоғары есептерді өте тиімді, тез шығаруға көмектеседі.

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Әбілқасымова А.Е., Кенеш Ә.С. және т.б. Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі, Алматы, 1998.
2. Бидосов Ә. Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі, Алматы 2009.
3. Қаңлыбаев Қ.И. Есеп шығару практикумы. –А., 2011.
4. Литвиненко В.Н ,МордковичА.Г Практикум порешение задач школьной математики. М.,Просвещение,1998.

Қасымқанұлы Б.[1],Назик Л.Н.[2]

1. Ғылыми жетекші, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент

2. Физика-математика және жалпы техникалық пәндер кафедрасы, «Математика» мамандығының 4 курс студенті

КӨПМҮШЕЛІКТЕРМЕН ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛАУ

Кез-келген f(x) функциясын кесте , график, немесе формула түрінде келтіруге болады. Егер f(x) функциясы формула түрінде берілсе , онда бұл формуланы кесте немесе график түрінде келтіру оңай болады. Егер функция таблица немесе график түрінде түрінде берілсе , онда оны формула түрінде онда оны формула түрінде келтіру әлде қайда қиын болады. Берілген жаңа, әлдеқайда жеңіл функциялардың есептеулерін айтарлықтай жеңілдетуін елестету қиын. Интерполяция осындай есептерді шешуге мүмкіндік беретін білім саласы болып табылады.

Функция кесте түрінде берілсін. (1.1 Кесте)

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Мұндағы:

x_i-аргумент;

y_i- функция;

i=1, 2, 3,…, n f(x) функциясының және аргументтеріне тиісті индексті айнымалы.

Сонда интерполяцияның мақсаттарының бірі функциянын мәнін кестеде келтірілмеген аргументтер бойынша анықтау болып табылады.

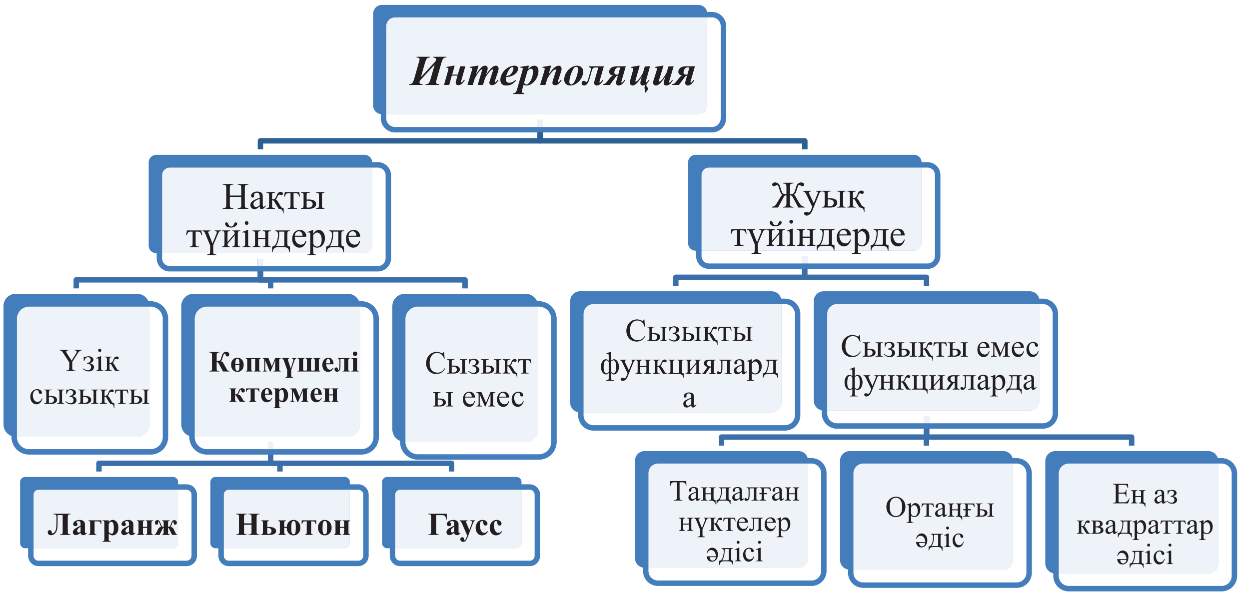
Егер f(x) функциясы формула түрінде болса , онда оның мәнін x-тің кез-келген мәнінде табуға болатыны ақиқат, соның ішінде кестеде берілмеген мәндер бойынша да табуға болады.

Онда интерполяция мақсатын былай тұжырымдауға болады:

Аргументтердің кейбір мәндері функцияның мәндерінде белгілі, аргументтің барлық диапазонындағы мәндері үшін функцияны формула түрінде келтіру керек. Бұл формула кестеде берілген бастапқы мәліметтердің дискретті мәндерін қанағаттандыратын көптеген түрлі формулалар болуы мүмкін. Интерполяция мақсатын дұрыс тұжырымдау үшін қосымша функциялар түрі берілу қажет (мысалы:сызықы, параболалық, логарифмдік және т.б) интерполяция ғылыми зерттеулер мен инженерлік іс жүзінде кең қолданылады.

Оны пайдаланатын бағыттар:

- Модельдеу;
- Экспериментті жоспарлау және статистикалық өңдеу;
- Кестеде берілген аргументтер арқылы функцияның мәнін анықтау;
- Функцияның санағы;
- Аргументтердің белгілі шекарасындағы күрделі емес мәнін күрделі функцияда көрсету;
- Жеңілдетілген, кейбір функцияларды бір-біріне жақындатуға арналған және тығы сол сияқты басқа да жағдайларда қолдануға арналған.



Сурет 1.1

Интерполяция әдістерінің көптеген түрлері бар. Оларды қасиеттеріне байланысты былайша жіктеуге болады: интерполяция түйіндерінің дәлдігіне байланысты, интерполяция функцияларының түріне байланысты, критерийлерімен математикалық аппараттарда қолданылуына байланысты және т.б. 1.1 суретінде осыған ұқсас жіктеулер көрсетілген.

Әрі қарай аталған жіктеулердің толық түрлері беріледі, олардың артықшылығы мен кемшілігі, қолдану аймақтары, ЭВМ-де компютерлік техникалар арқылы есептерді шешу. Және де берілген 1.1 суретіндегі жіктеуіміз толық емес екенін атап өткен дұрыс болады.

Лагранж формуласымен интерполяциялау

$$y_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_n)} + ... + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})}. \quad (1.6)$$

Мұндағы

- $x_0, x_1, \ldots, x_n$- интерполяция түйіні;
- $y_0, y_1, \ldots, y_n$- осы түйіндегі функцияның мәндері.

(1.6) формуласының интерполяциясы полиномды болатынын көрсетейік. $x=x_0$болсын , онда бірінші мүшесінен басқасы нөлге теңеледі және алымы мен бөлімі қысқарады да, соңында $y_n(x_0)=y_0$болады.

$x=x_1$болса, екінші мүшесі y_1 ал қалғаны нөлге теңеледі және т.с.с

Осылайша келесі теңдіктер шығады:

$y_n(x_0)=y_0$, $y_n(x_1)=y_1$,…, $y_n(x_n)=y_n$

шыққан теңдіктер 1.6 формуласының интерполяциялы екенін білдіреді. Және Лагранж формуласынын алынған көпмүшелік *n*-ші дәрежеден аспайтыны ақиқат.

1 - Мысал

Функция кесте түрінде берілсін. (1.4 кесте)

	Айнымалылардың мәні			
x	1	2	4	6
y	2	9	41	97

Лагранж интерполяциялау формуласын қолдана отырып y=f(x) функциясын көпмүшелік түрінде келтіру керек және x=3, x=5 болғандағы функцияның мәндерін табу керек.

1.4 кестесінің мәндерін (1.6) формласына қою арқылы

$$y(x)=2\frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{(1-2)(1-4)(1-6)}+9\frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(2-1)(2-4)(2-6)}+$$
$$+41\frac{(x-1)(x-2)(x-6)}{(4-1)(4-2)(4-6)}+97\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(6-1)(6-2)(6-4)}\,.$$

Осыдан $y(x)=3x^2-2x+1$ шығады.

Осы шыққан формулаға x=3, сонан соң x=5 мәндерін қою арқылы y(3)=22, y(5)=66 мәндерін аламыз.

Лагранж формуласының кемшілігі y(x)- тің бір мәні қосылса немесе алынса, есептеу барысында алдыңғы мәндері жоғалтады. Ал артықшылығы x аргументінің тұрақты және айнымалылар қадамын өзгерткенде де табуға болатыны.

Гаусс формуласымен интерполяциялау.

y(x) функциясы кесте түрінде берілсін және 2n+1 интерполяция түйіні болсын:

x_{-n}, $x_{-(n-1)}$, …, x_{-1}, x_0, x_1, x_2,…x_n және $h=x_i-x_{i-1}$=const тұрақты қадам.

Көпмүшелік түрінде берілген , дәрежесі 2n-нен аспайтын функция қарастырамыз. Гаусстың формуласының интерполяциясы мынадай:

$$\begin{aligned}
&y(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\\
&+c_3(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)+c_4(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\\
&+c_5(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\ldots \qquad (1.19)\\
&+c_{2n-1}(x-x_{-(n-1)})\ldots(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})+\\
&+c_{2n}(x-x_{-(n-1)})\ldots(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n).
\end{aligned}$$

Формулада берілген c_i коэффицентін анықтаймыз.

$x=x_0$болғанда $y(x_0)=y_0=c_0$

$x=x_1$болғанда $y(x_1)=y_1=c_0+c_1(x_1-x_0)$ немесе $c_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\Delta y_0}{h}$

$x=x_{-1}$болғанда $y(x_{-1})=y_{-1}=c_0+c_1(x_1-x_0)+c_2(x_{-1}-x_0)(x_{-1}-x_1)$ немесе

$$c_2=\frac{y_1-c_0-c_1(x_{-1}-x_0)}{(x_{-1}-x_0)(x_{-1}-x_1)}=\frac{y_{-1}-y_0-\frac{\Delta y_0}{h}(x_{-1}-x_0)}{(x_{-1}-x_0)(x_{-1}-x_1)}=\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!\,h^2}$$

Орындалған есептеулер ақиқат. Осыларды жалғастырсақ:

$$c_3=\frac{\Delta^3\ y_{-1}}{3!h^3},\ c_4=\frac{\Delta^4\ y_{-2}}{4!h^4},\ \dots,\ c_{2n}=\frac{\Delta^{2n}\ y_{-n}}{(2n)!h^{2n}}.$$

Жаңа айнымалы енгіземіз: $\frac{x-x_0}{h}=t.$

(1.19) формуласына жаңа айнымалыны және c_i-дың коэффицентінің мәнін қоямыз.

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0+t\,\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(t+1)\,t\,(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}+ \\ &+\frac{(t+1)\,t\,(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\frac{(t+2)(t+1)\,t\,(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2}+\dots \\ &+\frac{(t+n-1)\dots(t-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}\quad . \end{aligned} \tag{1.20}$$

(1.20) формуласы Гаусстың бірінші интерполяциялық формуласы деп аталады. Оған орталық айырымдары кіреді.

Гаусстың екінші интерполяциялық формуласын Гаусстың бірінші интерполяциялық формуласы сияқты аламыз :

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0+t\,\Delta y_0+\frac{(t+1)\,t}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(t+1)\,t\,(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2}+ \\ &+\frac{(t+2)(t+1)\,t\,(t-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\dots\dots+\frac{(t+n)(t+n-1)\dots(t-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}\,. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Оған орталық айырымдары кіреді.

Интерполяциялық Гаусс формуласын f(x) функциясының интерполяциялауының орта бөлігінде қолданады. Гаусс формуласының кемшілігі мүмкіндіктердің кемшілігі және бірдей қашықтықтағы h=const болғанда ғана қолданылуы.

Стирлинг формуласымен интерполяциялау.

Стирлинг формуласы Гаусс формулаларының орташа арифметикасы.

$$y(x) = y_0 + t\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{t^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t^2-1^2)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} +$$
$$+\frac{t^2(t^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + + \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \qquad (1.22)$$
$$+\frac{t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \ldots + \frac{t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(n-1)^2)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}.$$

$$t = \frac{x - x_0}{h}.$$

Стирлинг формуласын t≤0.25 болғанда қолданады. Ол аргументтің өзгерілу қадамында ғана қолданылады. Және бұл оның бар кемшілігі болып табылады.

Бессел формуласымен интерполяциялау.

y(x) функциясы кесте түрінде берілсін, 2n+2 бірмәнді интерполяциялық түйінде x_{-n}, $x_{-(n-1)}$, …, x_0, x_1, x_2,…,x_{n-1}, x_{n+1} және $h= x_i- x_{i-1}$ (i=-n,…,n+1) тұрақты қадамымен.

Бессель формуласы 2n+2 дәрежелі көпмүшелік түрінде берліледі,оның мәні интерполяциялау түйінінде y(x) функциясымен сәйкес келеді.

Бессель формуласы мынадай түрде беріледі:

$$y(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + (t - \frac{1}{2})\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\cdot\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{(t-\frac{1}{2})t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$
$$+\frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \frac{(t-\frac{1}{2})t(t-1)(t+2)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} +$$
$$+\frac{t(t-1)(t+1)(t+2)(t-2)(t-3)}{6!}\cdot\frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} + \ldots \qquad (1.23)$$
$$\ldots + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)\ldots(t-n)(t+n-1)}{(2n)!}\cdot\frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} +$$
$$+\frac{(t-\frac{1}{2})t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)\ldots(t-n)(t+n-1)}{(2n+1)!}\cdot\Delta^{2n+1} y_{-n}$$

Мұндағы : $t = \frac{x + x_0}{h}$.

Бессель формуласының интерполяциясы 0.25≤t≤0.75 мәндерінде қолданылады. Бұл формуланы x-тің аргументінің өзгеруінде ғана қолдануға болады.

Беркімбай Р.Ә.[1], Нәшірбек Ж.Б. [2]

1.Ғылыми жетекші, аға оқытушы

2. Физика-математика және жалпы техникалық пәндер кафедрасы, «Математика» мамандығының 1 курс студенті