НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ИЗ ДИЭДРАЛЬНЫХ ГРУПП ПОРЯДКА 22.

Олькова С.Н.
Костанайский Государственный Педагогический Университет
им. У.Султангазина, г.Костанай

Научный руководитель: Алимбаев А.А.
Костанайский Государственный Педагогический Университет
им. У.Султангазина, г.Костанай

Аннотация:С точностью до изоморфизма описываются все нормальные группы, которые возникают из диэдральной группы D_{11}.

Ключевыеслова: группа, нормальная подгруппа,диэдральная группа, правый смежный класс, левый смежный класс, изоморфизм.

Annotation:Up to isomorphism, all normal groups that arise from the dihedral group D_{11}.are described.

Key words:group, normal subgroup, dihedral group, right coset, left coset, isomorphism.

Аннотация:Изоморфизмгедейінгідәлдікпен D_{11} диэдралық тобынан туындайтын барлық қалыпты топтар сипатталады.

Түйін сөздер:топ, қалыпты кіші топ, диэдральды топ, оң аралас сынып, сол аралас сынып, изоморфизм.

Общие сведения. Теория групп - один из самых красивых и важных разделов не только алгебры, но и всей современной математики. Поэтому на изучение начал теории групп следует обратить особое внимание будущих учителей математики и будущих математиков.

Предыстория современной теории групп неразрывно связана со славными именами таких математиков, как француз Жозеф Луи Лагранж (1736–1813), итальянец Паоло Руффини (1765–1822), норвежец Нильс Хенрик Абель (1802–1829), французы Эварист Галуа (1811–1832), Огюстен Луи Коши (1789–1857) и другие. [3]

Первое общее аксиоматическое определение группы дано немецким математиком Г. Вебером в 1896 г. во втором томе его трехтомного труда «Курс алгебры». Именно, группой Вебер назвал произвольную полугруппу, в которой однозначно разрешимы уравнения $ax = b$ и $ya = b$ для произвольных ее элементов a и b. Общепринятую теперь аксиоматику теории групп предложил Дж. Пьерпонт в 1900 г. [4]

Определение:Группа - это непустое множество G с бинарной операцией $*$, которая удовлетворяет следующим аксиомам:

1. Коммутативность: Если $a \in G$и $b \in G$, то $a * b \in G$.
2. Ассоциативность:$a * (b * c) = (a * b) * c$для всех $a, b, c \in G$.
3. Существование элемента $e \in G$ (называемым единичным элементом) такой, что $a * e = a = e * a$ для каждого $a \in G$.
4. Для каждого $a \in G$ существует элемент $d \in G$ (называемый обратным a), такой, что $a * d = e$ и $d * a = e$. [1]

Определение: Подмножество H группы G является подгруппой вG, если H сама является группой из операции в G. [1]

Определение:Порядком группыG называют количество элементов, из которых эта группа состоит.И обозначается $|G|$.[1]

2.Нахождение диэдральнойгруппы D_{11} . Пусть P - правильный одиннадцатиугольник. Для удобства предположим, что Р имеет центр в начале координат и вершину на отрицательной оси y, а остальные вершины пронумерованы против часовой стрелки.

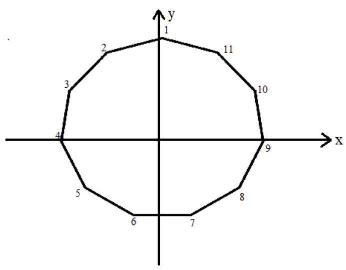

Рисунок 1 Правильный одиннадцатиугольник.

Возьмем обычный белый лист. Вырежем правильный одиннадцатиугольникPи развернем его так, чтобы он точно подходил к месту выреза. Такое движение называется симметрией P . Другими словами, симметрия - это свойства фигуры, состоящее в том. Что существует ее наложение самой на себя.

Определение:Диэдральной группой D_{2n} , где $n \geq 2$, называется группа симметрий правильного плоского n -угольника с центром в точке O, состоящая из поворотов вокруг точки O на углы, кратные $\frac{2\pi}{n}$, и отражений относительно прямых, проходящих через O и одну из вершин или середину одной из сторон.[5]

Таблица1.

Теорема:Диэдральная группа D_nявляется группой порядка $2n$, порожденной элементами rи s, такой, что

$$|r| = n, \quad |s| = 2, \quad \text{и} \quad ds = r^{-1}s.$$

$\circ$	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}
r_0	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}
r_1	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_0	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
r_2	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_0	r_1	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_0
r_3	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_0	r_1	r_2	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
r_4	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_0	r_1	r_2	r_3	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_0	s_1
r_5	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	s_8	s_9	s_{10}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
r_6	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_0	s_1	s_2
r_7	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	s_9	s_{10}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
r_8	r_8	r_9	r_{10}	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_0	s_1	s_2	s_3
r_9	r_9	r_{10}	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	s_{10}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9
r_{10}	r_{10}	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
s_0	s_0	s_5	s_{10}	s_4	s_9	s_3	s_8	s_2	s_7	s_1	s_6	r_0	r_9	r_7	r_5	r_3	r_1	r_{10}	r_8	r_6	r_4	r_2
s_1	s_1	s_6	s_0	s_5	s_{10}	s_4	s_9	s_3	s_8	s_2	s_7	r_2	r_0	r_9	r_7	r_5	r_3	r_1	r_{10}	r_8	r_6	r_4
s_2	s_2	s_7	s_1	s_6	s_0	s_5	s_{10}	s_4	s_9	s_3	s_8	r_4	r_2	r_0	r_9	r_7	r_5	r_3	r_1	r_{10}	r_8	r_6
s_3	s_3	s_8	s_2	s_7	s_1	s_6	s_0	s_5	s_{10}	s_4	s_9	r_6	r_4	r_2	r_0	r_9	r_7	r_5	r_3	r_1	r_{10}	r_8
s_4	s_4	s_9	s_3	s_8	s_2	s_7	s_1	s_6	s_0	s_5	s_{10}	r_8	r_6	r_4	r_2	r_0	r_9	r_7	r_5	r_3	r_1	r_{10}
s_5	s_5	s_{10}	s_4	s_9	s_3	s_8	s_2	s_7	s_1	s_6	s_0	r_{10}	r_8	r_6	r_4	r_2	r_0	r_9	r_7	r_5	r_3	r_1
s_6	s_6	s_0	s_5	s_{10}	s_4	s_9	s_3	s_8	s_2	s_7	s_1	r_1	r_{10}	r_8	r_6	r_4	r_2	r_0	r_9	r_7	r_5	r_3
s_7	s_7	s_1	s_6	s_0	s_5	s_{10}	s_4	s_9	s_3	s_8	s_2	r_3	r_1	r_{10}	r_8	r_6	r_4	r_2	r_0	r_9	r_7	r_5
s_8	s_8	s_2	s_7	s_1	s_6	s_0	s_5	s_{10}	s_4	s_9	s_3	r_5	r_3	r_1	r_{10}	r_8	r_6	r_4	r_2	r_0	r_9	r_7
s_9	s_9	s_3	s_8	s_2	s_7	s_1	s_6	s_0	s_5	s_{10}	s_4	r_7	r_5	r_3	r_1	r_{10}	r_8	r_6	r_4	r_2	r_0	r_9
s_{10}	s_{10}	s_4	s_9	s_3	s_8	s_2	s_7	s_1	s_6	s_0	s_5	r_9	r_7	r_5	r_3	r_1	r_{10}	r_8	r_6	r_4	r_2	r_0

Доказательство:Пусть r - вращение против часовой стрелки на $\frac{360}{n}$градусов вокруг центра P; r отправляет вершину 1 в вершину 2, после вершину2 в вершину 3 и т. д. Поскольку r^n- это поворот на $360\ °$, который возвращает P в исходное положение (единичная симметрия).следовательно r имеет порядок n, Пусть s будет отражением по оси $X.s$«меняет ориентацию»P: вершины, которые ранее были пронумерованы против часовой стрелки от вершины 1, теперь нумеруются по часовой стрелке:

Элемент s имеет порядок 2, поскольку двойное отражение по оси x также возвращает P в исходное положение. Поскольку смежные вершины P остаются смежными при любой симметрии, конечное положение P полностью определяется двумя факторами: новой ориентацией P (независимо от того, пронумерованы ли вершины по часовой стрелке или против часовой стрелки от вершины 1) и новым расположением вершины 1. Следовательно, каждая симметрия такая же, как и любая $r^i(0 \leq i < n)$поворот по вертикали на $i\ (\frac{360}{n})$ градусов, который сохраняет ориентацию и перемещает вершину 1 в положение, первоначально занимаемое вершиной $i\ +\ j$ или $r^j s(0 \leq i < n)$отражение по оси x, которое меняет ориентацию, после чего следует вращение против часовой стрелки, которое перемещает вершину 1 в положение, первоначально занимаемое вершиной $i\ +\ j$.

Следовательно

$$D_n = \{e = r^0, r, r^2, \dots, r^{n-1}; s = r^0 s, rs, r^2 s, \dots, r^{n-1}s\}.$$

Таким образом,D_n, является группой порядка $2n$. Наконец, убедимся, что srs перемещает вершину 1 в положение, первоначально занятое вершиной n, и оставляет вершины в порядке против часовой стрелки. Другими словами,srs - это вращение, которое перемещает вершину 1 в вершину n, то есть $srs = r^{n-1}$. Поскольку r имеет порядок n , $r^{-1} = r^{n-1}$ и, следовательно, $srs = r^{n-1}$. Умножение справа на s показывает, что $sr = r^{-1}d$. ■[1]

Подумаем о движении как о функции от одиннадцатиугольника до самого себя, тогда идея следовать одному движению за другим - это просто композиция функций. Группа D_{11}включает в себя 11 поворотов и 11 симметрий. Используя набор

$$D_{11} = \{r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}, s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}\},$$

оснащенный операцией композиции, получим таблицу 1.

Ясно, что D_{11} замкнуто относительно °, и композиция функций ассоциативна. Таблица 1 показывает, что r_0 является единичным элементом, и что каждый элемент в D_{11} имеет обратное значение. Например, $r_1 \circ r_2 = r_3 = r_2 \circ r_1$. Следовательно, D_{11} является группой. Но она не абелева, т.к. например,$r_1 \circ s_2 \neq s_2 \circ r_1 . D_{11}$ называется диэдральной группой степени 11 или группой симметрий одиннадцатиугольника.

3. Построение изоморфизма. Рассмотрим группу поворотов R_{11} и группу симметрий S_{11} правильного одиннадцатиугольника, а с другой стороны, содержащихся в группах подстановок из одиннадцати цифр подгрупп A_{11} и B_{11} , состоящих из элементов a_n и b_n соответственно. Установим между элементами групп R_{11} и A_{11}, S_{11} и B_{11} следующие взаимно однозначные соответствия:

$$r_n \leftrightarrow\ a_n$$
$$s_n \leftrightarrow\ b_n$$

Эти соответствия сохраняют умножение в следующих смыслах. Если какой-либо элемент в левом столбце может быть записан в виде произведения двух элементов (того же левого столбца), например, $r_1 \circ r_5 = r_6$ или $r_2 \circ s_{10} = s_0$, и если мы каждый элемент полученного равенства заменим соответсвующим элементом правого столбца, то равенство останется справедливым.

Заметим, что группы R_{11} и A_{11} , S_{11} и B_{11} хотя и состоят из элементов различной природы (первая группа состоит из поворотов одиннадцатиугольника, третья из симметрий треугольника, относительно оси, проходящей через вершину n, вторая и четвертая из подстановок цифр), но устроены они одинаково: таблицы умножения этих групп отличаются лишь обозначениями и, следовательно, заменой обозначений, т.е. переименованием элементов, они могут быть приведены к одинаковому виду. В этом нам поможет убедиться таблица 2.

Определение: Пусть дано взаимно однозначное соответствие

$$g \leftrightarrow g'$$

между множеством этих элементов группы G и множеством всех элементов группы G' . Это соответствие будет называться изоморфным соответствием (или изоморфизмом) между двумя группами, если выполнено следующее условие сохранения умножения, в котором говорится: каково бы ни было соотношение вида

$$g_1 \circ g_2 = g_3$$

между элементами одной группы, например, G, соотношение, получаемое при замене элементов g_n группы G соответствующими элементами из группы G' элементами g'_n оказывается справедливым.[2]

Таблица 2.

$\circ$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_0	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_2	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_0	a_1	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_0
a_3	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_0	a_1	a_2	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
a_4	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_0	a_1	a_2	a_3	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_0	b_1
a_5	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	b_8	b_9	b_{10}	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_6	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_0	b_1	b_2
a_7	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b_9	b_{10}	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_8	a_8	a_9	a_{10}	a_0	a_1	a_2	a_3	r_4	a_5	a_6	a_7	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_0	b_1	b_2	b_3
a_9	a_9	a_{10}	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	b_{10}	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9
a_{10}	a_{10}	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
b_0	b_0	b_5	b_{10}	b_4	b_9	b_3	b_8	b_2	b_7	b_1	b_6	a_0	a_9	a_7	a_5	a_3	a_1	a_{10}	a_8	a_6	a_4	a_2
b_1	b_1	b_6	b_0	b_5	b_{10}	b_4	b_9	b_3	b_8	b_2	b_7	a_2	a_0	a_9	a_7	a_5	a_3	a_1	a_{10}	a_8	a_6	a_4
b_2	b_2	b_7	b_1	b_6	b_0	b_5	b_{10}	b_4	b_9	b_3	b_8	a_4	a_2	a_0	a_9	a_7	a_5	a_3	a_1	a_{10}	a_8	a_6
b_3	b_3	b_8	b_2	b_7	b_1	b_6	b_0	b_5	b_{10}	b_4	b_9	a_6	a_4	a_2	a_0	a_9	a_7	a_5	a_3	a_1	a_{10}	a_8
b_4	b_4	b_9	b_3	b_8	b_2	b_7	b_1	b_6	b_0	b_5	b_{10}	a_8	a_6	a_4	a_2	a_0	a_9	a_7	a_5	a_3	a_1	a_{10}
b_5	b_5	b_{10}	b_4	b_9	b_3	b_8	b_2	b_7	b_1	b_6	b_0	a_{10}	a_8	a_6	a_4	a_2	a_0	a_9	a_7	a_5	a_3	a_1
b_6	b_6	b_0	b_5	b_{10}	b_4	b_9	b_3	b_8	b_2	b_7	b_1	a_1	a_{10}	a_8	a_6	a_4	a_2	a_0	a_9	a_7	a_5	a_3
b_7	b_7	b_1	b_6	b_0	b_5	b_{10}	b_4	b_9	b_3	b_8	b_2	a_3	a_1	a_{10}	a_8	a_6	a_4	a_2	a_0	a_9	a_7	a_5
b_8	b_8	b_2	b_7	b_1	b_6	b_0	b_5	b_{10}	b_4	b_9	b_3	a_5	a_3	a_1	a_{10}	a_8	a_6	a_4	a_2	a_0	a_9	a_7
b_9	b_9	b_3	b_8	b_2	b_7	b_1	b_6	b_0	b_5	b_{10}	b_4	a_7	a_5	a_3	a_1	a_{10}	a_8	a_6	a_4	a_2	a_0	a_9
b_{10}	b_{10}	b_4	b_9	b_3	b_8	b_2	b_7	b_1	b_6	b_0	b_5	a_9	a_7	a_5	a_3	a_1	a_{10}	a_8	a_6	a_4	a_2	a_0

4. Нормальные подгруппы.

Определение: Пусть задана группа G и подгруппа H, пусть также дан элемент $a \in G$. Левым смежным классом называется множество $aH = \{ah|h \in H\}$. Правым смежным классом называется множество$Ha = \{ha|h \in H\}$.[1]

Определение:Подгруппа H группы G называется нормальной, если $Ha = aH$ для каждого $a \in G$.[1]

Предположим, чтоh - поворот, и $a \in D_n$ - произвольный элемент. Если a тоже поворот, то$a^{-1}ha = h$, так как любые два поворота коммутируют. Если a представляет собой осевую симметрию, тогда $a^2 = e$ и $(ah)^2 = e$, так как ah - тоже осевая симметрия. Отсюда, $a^{-1}ha = aha = h^{-1}$ то есть в любом из случаев имеет место равенство$a^{-1}ha = h^{\pm 1}$.Из сказанного следует, что любая подгруппа H, состоящая из поворотов, нормальна в D_n. и их количество равно числу натуральных делителей n.

Теперь рассмотрим подгруппы, состоящие не только из поворотов, то есть такие, которым принадлежит хотя бы одна осевая симметрия. Так как n нечетное число, то все осевые симметрии устроены одинаково: ось симметрии проходит через одну из вершин и середину противоположной стороны. Все такие симметрии сопряжены в группе диэдра, так как их оси переходят друг в друга при помощи поворотов. Нормальная подгруппа H, содержащая хотя бы одну из осевых симметрий, должна содержать все такие симметрии. Тогда она совпадает с D_n.

Найдем все нормальные подгруппы в группе D_{11} .Пусть H - подгруппа $\{r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}\}$ в D_{11}, операционная таблица которой является таблица 1. Правый смежный класс Hs_0 является множеством

$$\{r_0 \circ s_0, r_1 \circ s_0, r_2 \circ s_0, r_3 \circ s_0, r_4 \circ s_0, r_5 \circ s_0, r_6 \circ s_0, r_7 \circ s_0, r_8 \circ s_0, r_9 \circ s_0, r_{10} \circ s_0\} = \\ = \{s_0, s_6, s_1, s_7, s_2, s_8, s_3, s_9, s_4, s_{10}, s_5\}$$

а левым смежным классом s_0H является множеством

$$\{s_0 \circ r_0, s_0 \circ r_1, s_0 \circ r_2, s_0 \circ r_3, s_0 \circ r_4, s_0 \circ r_5, s_0 \circ r_6, s_0 \circ r_7, s_0 \circ r_8, s_0 \circ r_9, s_0 \circ r_{10}\} = \\ = \{s_0, s_5, s_{10}, s_4, s_9, s_3, s_8, s_2, s_7, s_1, s_6\}$$

Итак, $Hs_0 = s_0H$, т.к. элементы группы могут быть перечислены в любом порядке. Подобные вычисления показывают, что каждый правый смежный класс H также является левым смежным классом, то есть

$$Hr_0 = r_0H, Hr_1 = r_1H, Hr_2 = r_2H, Hr_3 = r_3H, Hr_4 = r_4H, Hr_5 = r_5H, Hr_6 = r_6H, Hr_7 \\ = r_7H,$$

$$Hr_8 = r_8H, Hr_9 = r_9H, Hr_{10} = r_{10}H, Hs_0 = s_0H, Hs_1 = s_1H, Hs_2 = s_2H, Hs_3 = s_3H, Hs_4 \\ = s_4H,$$

$$Hs_5 = s_5H, Hs_6 = s_6H, Hs_7 = s_7H, Hs_8 = s_8H, Hs_9 = s_9H, Hs_{10} = s_{10}H$$

Список использованной литературы.

[1]ThowasW. Hungerford. Abstract algebra.Books/cole, 2014 - 595c.

[2]Александров П.С. Журнал Квант «Введение вторию групп» выпуск 7

[3]Боголюбов А. Н. Математики. Механики: Библиографический справочник. - Киев: Наука, 1983. - 640 с.

[4]Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: В 2 томах. Том 1. - Мир, 1972. - 287 с.

[5] Веденёв К.В., Деундяк В.М. Статья «Коды в диэдральной групповой алгебре». 2017